



Institut für Elektrische Energiewandlung

Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. h.c. Andreas Binder



**TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT**

Praktikum ETiT

-Grundlagen der Elektrotechnik-

Versuch 5

Schwingkreise & Wellenausbreitung

Inhaltsverzeichnis

5	SCHWINGKREISE UND WELLENAUSBREITUNG.....	3
5.1	SERIENSCHWINGKREIS.....	3
5.1.1	Mathematisches Modell des Serienschwingkreises – Eigenschwingungen	4
5.1.2	Erzwungene Schwingung - Resonanz	8
5.1.3	Praktische Anwendungen des Serienschwingkreises als Filter	12
5.2	PARALLELSCHWINGKREIS	17
5.2.1	Verlustloser Parallelschwingkreis	17
5.2.2	Parallelschwingkreis mit Verlusten.....	18
5.3	WELLENLEITER.....	22
5.3.1	Die Koaxialleitung als Übertragungsleitung	22
5.3.2	Wellenwiderstand, Reflexion und Brechung.....	27
5.3.3	Einschwingvorgänge auf der Leitung.....	29
5.3.4	Erzwungene Schwingungen und Wellen auf der Leitung – Stehende Wellen	31
5.3.5	Resonanz	37
5.3.6	Lecher-Leitung.....	37
5.4	EINFACHE DIPOLANTENNEN.....	38
5.4.1	Ultrahochfrequente (UHF) elektromagnetische Schwingungen	38
5.4.2	Der $\lambda/2$ -Dipol.....	38
5.4.3	Das elektromagnetische Wellenfeld des $\lambda/2$ -Dipols	41
5.4.4	Reflektor und Direktor, Yagi-Antenne.....	44
	VERSUCHSDURCHFÜHRUNG	47
5.5	RLC - REIHENSCHWINGKREIS.....	47
5.5.1	Bestimmung des Spannungspegels am Kondensator.....	49
5.5.2	Bestimmung von $I(f)$ im Reihenschwingkreis und Zeichnen des Diagramms	50
5.5.3	Bestimmung von $ Z(f) $ im Reihenschwingkreis	50
5.5.4	Phasenverschiebung $\varphi(f)$ im Reihenschwingkreis.....	50
5.6	RLC - PARALLELSCHWINGKREIS.....	51
5.6.1	Bestimmung von $I(f)$ im Parallelschwingkreis	53
5.6.2	Bestimmung der Impedanz $ Z(f) $ im Parallelschwingkreis	53
5.6.3	Bestimmung der Phasenverschiebung $\varphi(f)$ im Parallelschwingkreis	53
5.7	LECHER-LEITUNG.....	54
5.7.1	Versuchsziele.....	54
5.7.2	Aufbau.....	54
5.7.3	Durchführung.....	55
5.7.4	Auswertung.....	57
5.8	DIPOLANTENNE	58
5.8.1	Versuchsziele.....	58
5.8.2	Aufbau	58
5.8.3	Durchführung.....	59
5.8.4	Auswertung.....	60
5.9	VORBEREITUNGSAUFGABEN	61

5 Schwingkreise und Wellenausbreitung

5.1 Serienschwingkreis

a) Einfachstes schwingungsfähiges System – zwei Energiespeicher:

Eine **Serienschaltung** aus Kondensator und Spule stellt ein schwingungsfähiges Gebilde dar (**Serienschwingkreis**). Die elektrischen Größen Strom und Spannung stellen dabei die schwingenden Größen dar. Wie bei jedem (einfachsten) Schwingkreis sind mindestens zwei Energiespeicher erforderlich, zwischen denen Energie ausgetauscht wird. Im vorliegenden Fall wird elektromagnetische Energie zwischen dem Kondensator, wo sie als elektrische Energie gespeichert wird, und der Spule, wo sie als magnetische Energie gespeichert wird, ausgetauscht. Ein *Ohm'scher* Widerstand in Serie zu Kondensator und Spule ist die schwingungsdämpfende Größe, da dort elektromagnetische Energie in Wärmeenergie umgesetzt wird.

b) Eigenschwingung, Eigenfrequenz, Dämpfung:

Dieser Austausch (hin und her Schwingen der Energie zwischen den Speichern) ist eine Eigenschaft des schwingungsfähigen Systems und erfolgt mit einer dem System eigenen Frequenz, der "**Eigenfrequenz**" f_d . Man nennt dieses Schwingen die "**Eigenschwingung**" des schwingfähigen Systems. Der *Ohm'sche* Widerstand ist KEIN Energiespeicher; in ihm wird die elektromagnetische Energie in Wärme umgesetzt und damit dem System entzogen. Damit ist der *Ohm'sche* Widerstand ein Schwingungsdämpfer; er bewirkt, dass die Amplitude der mit der Eigenfrequenz f_d schwingenden elektrischen Spannung bzw. des elektrischen Stroms mit der Zeit abklingt. Für die **mathematische Modellierung** werden die inneren Verluste (*Ohm'schen* Widerstände etc.) von Kondensator und Spule mit dem *Ohm'schen* Widerstand des Systems zum resultierenden Widerstand R zusammengefasst, so dass eine ideale Kapazität C und eine ideale Induktivität L in Serie mit R den Resonanzkreis mathematisch darstellen.

c) Anregen der Eigen-Schwingung:

Bei jeder Schalthandlung (z. B. Einschalten oder Abschalten einer elektrischen Spannung am Serienresonanzkreis, Verändern eines oder mehrerer Systemparameter wie z. B. Zuschalten eines *Ohm'schen* Parallelwiderstands zum vorhandenen Widerstand, etc.) wird diese elektrische "Eigenschwingung" angeregt und klingt mit der durch die Systemparameter gegebenen charakteristischen **Zeitkonstanten** ab (**gedämpfter** Schwingkreis).

d) Einfluss der Dämpfung:

Wird der *Ohm'sche* Widerstand (die Dämpfung) zu groß, so erfolgt das Abklingen so rasch, dass keine Schwingung mehr zustande kommt. Der Vorgang wird vom **periodischen Vorgang** ("**Schwingen**") zum **aperiodischen Vorgang** ("**Abklingen ohne Schwingen**"). Jener Parametersatz aus R , L , C , wo das Schwingen in das aperiodische Abklingen übergeht, wird "**aperiodischer Grenzfall**" genannt. Eine weitere Erhöhung der Dämpfung verändert zwar die Zeitkonstante des Abklingens, bleibt aber aperiodisch.

e) Beispiel eines mechanischen Schwingungs-Analogons mit zwei Energiespeichern:

Eine Masse (z. B. Kugel) an einer Feder (z. B. Schraubenfeder) außerhalb des Schwerfelds der Erde ist ein schwingungsfähiges System mit zwei Energiespeichern. Die in der Feder gespeicherte Energie wird beim hin und her Schwingen mit der kinetischen Energie (Bewegungsenergie) der bewegten Masse ausgetauscht. Beim realen Experiment im Erdschwerfeld kommt die Veränderung der potentiellen Energie (Lageenergie) der Masse im Erdschwerfeld als dritter Energiespeicher hinzu.

f) Erzwungene Schwingungen:

Wird von außen eine periodische Veränderung von Strom oder Spannung im Serienschwingkreis z. B. durch Anlegen einer aus einem Wechselspannungsgenerator stammenden Wechselspannung (mit beliebiger Frequenz f , Amplitude und Phasenlage) erzwungen, so schwingen Strom und Spannung im Schwingkreis nach Abklingen der durch das Zuschalten bedingten Eigenschwingung nur noch mit der äußeren Frequenz f . Die Schwingungsamplitude des Stroms bei aufgeprägter äußerer Wechselspannung wird dabei dann **maximal**, wenn die äußere Frequenz identisch ist mit der Eigenfrequenz: $f = f_d$ (**Resonanzfall**).

5.1.1 Mathematisches Modell des Serienschwingkreises – Eigenschwingungen

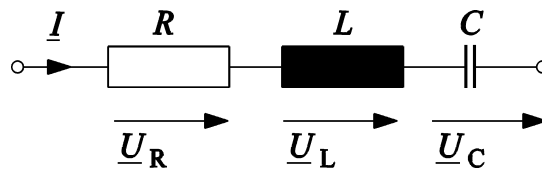


Bild 5.1.1-1: Eine Serienschaltung aus den idealen Elementen R , L und C bildet einen elektrischen Serienschwingkreis. Im sinusförmig eingeschwungenen Zustand kann die komplexe Rechnung verwendet werden.

Während im sinusförmig eingeschwungenen Zustand die komplexe Rechnung verwendet werden kann, muss für Einschwingvorgänge die Differentialgleichung des Systems gelöst werden. Gemäß der *Kirchhoff*'schen Maschenregel gilt für die drei Teilspannungen und den gemeinsamen (Serien-)Strom i , wenn von außen die Serienspannung u zwischen den beiden Klemmen des Serienschwingkreises angelegt wird:

$$u_R + u_L + u_C = u \Rightarrow R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i \cdot dt = u \quad (5.1.1-1)$$

Durch einmaliges Differenzieren nach der Zeit t erhalten wir eine **lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten (5.1.1-2)** (2. Ordnung = höchste vorkommende Ableitung ist zweite Ableitung), deren **homogene Lösung** (rechte Seite ist Null gesetzt) die **Eigenschwingungen** des Serienresonanzkreises beschreibt.

$$L \cdot \frac{d^2 i}{dt^2} + R \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot i = \frac{du(t)}{dt} \quad (5.1.1-2)$$

$$L \cdot \frac{d^2 i}{dt^2} + R \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot i = 0 \Rightarrow \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot i = 0 \quad (5.1.1-3)$$

Die Lösung einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten besteht aus einer **homogenen und einer partikulären Lösung**. Die homogene Lösung erfüllt die Differentialgleichung, wenn deren rechte Seite – wie in (5.1.1-3) – **Null** ist. Die partikuläre Lösung berücksichtigt Terme ungleich Null auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens. Die homogene Lösung ist stets eine Summe aus Exponentialfunktionen (Anzahl der Lösungsfunktionen ("**Eigenfunktionen**") = Anzahl der Ordnung der Differentialgleichung):

$$i_h(t) = \underline{C}_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + \underline{C}_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \quad (5.1.1-4)$$

Die Konstanten \underline{C}_1 , \underline{C}_2 werden gemeinsam mit der partikulären Lösung (Einfluss des Terms auf der rechten Seite der Differentialgleichung) anhand der **Anfangsbedingung** für $i(t)$ ermittelt. Die "**Eigenwerte**" $\underline{\lambda}_1$, $\underline{\lambda}_2$ werden durch Einsetzen der Lösung (5.1.1-4) in (5.1.1-3) bestimmt und sind in im Falle (5.1.1-5) **reell** ($\underline{\lambda}_1 = \lambda_1$, $\underline{\lambda}_2 = \lambda_2$). In diesem Fall sind auch C_1 und C_2 reell.

$$\lambda^2 + \frac{R}{L} \cdot \lambda + \frac{1}{LC} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (5.1.1-5)$$

Der o. g. **aperiodische Grenzfall** tritt auf, wenn $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} = 0$ ist. Diese Bedingung erfüllt die Dämpfung exakt mit

$$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad (5.1.1-6)$$

Die „Schwingung“ klingt mit **EINER Zeitkonstante** ab:

$$T = -\frac{1}{\lambda_1} = -\frac{1}{\lambda_2} = 2L / R \quad (5.1.1-7)$$

$$i_h(t) = C_1 \cdot e^{-t/T} + C_2 \cdot e^{-t/T} = C_3 \cdot e^{-t/T} \quad (5.1.1-8)$$

Ist die Dämpfung noch größer, also $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 > \frac{1}{LC}$, so klingt der aperiodische Vorgang mit **ZWEI Zeitkonstanten** ab:

$$T_1 = -\frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}} \quad T_2 = -\frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}} \quad (5.1.1-9)$$

Bei geringerer Dämpfung als (5.1.1-6) **schwingt** das System. Die Eigenwerte $\underline{\lambda}_1$, $\underline{\lambda}_2$ sind dann komplex, weil der Ausdruck unter der Wurzel (5.1.1-5) negativ wird. Mit Hilfe der *Euler'schen Formel*

$$e^{a+jb} = e^a \cdot e^{jb} = e^a \cdot [\cos b + j \sin b]$$

entsteht aus den beiden Exponentialfunktionen je eine gedämpfte Sinus- und Cosinus-Schwingung.

$$\underline{\lambda}_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = -\frac{1}{T} \pm j \cdot \omega_d \quad (5.1.1-10)$$

Mit $\underline{C}_1 = (D_1 - jD_2)/2$ und $\underline{C}_2 = (D_1 + jD_2)/2$ folgt:

$$\begin{aligned}
 i_h(t) &= \underline{C}_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + \underline{C}_2 \cdot e^{\lambda_2 t} = \\
 &= \underline{C}_1 \cdot e^{-t/T} \cdot [\cos \omega_d t + j \sin \omega_d t] + \underline{C}_2 \cdot e^{-t/T} \cdot [\cos \omega_d t - j \sin \omega_d t] = (5.1.1-11) \\
 &= D_1 \cdot e^{-t/T} \cdot \cos \omega_d t + D_2 \cdot e^{-t/T} \cdot \sin \omega_d t
 \end{aligned}$$

Der Strom schwingt mit der **Eigenfrequenz** f_d und klingt mit der **Zeitkonstante** (5.1.1-7) ab.

$$f_d = \frac{\omega_d}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \quad (5.1.1-12)$$

Ein (*theoretischer*) *Sonderfall* ist der **ungedämpfte** Schwingkreis: $R = 0$. Der Strom schwingt mit der **Eigenfrequenz**

$$f_d = \frac{\omega_d}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (5.1.1-13)$$

und klingt NICHT ab. Die Eigenschwingung bleibt bestehen.

Beispiel 5.1.1-1:

Einschalten einer Gleichspannung $u(t) = U$ an dem Serien-Schwingkreis, der vorher spannungs- und stromlos war. Die Anfangsbedingung ist daher:

- VOR dem Einschalten: $t = 0^-$: $i(0) = 0$, $u_C = u_R = u_L = 0$.

- Unmittelbar NACH dem Einschalten: $u_C + u_R + u_L = U$.

Da die Energie in den Energiespeichern C und L VOR dem Einschalten Null war, muss sie auch unmittelbar NACH dem Einschalten Null sein, denn **Energie kann sich nicht sprungartig ändern**, weil dazu unendlich hohe Leistungen erforderlich wären ($p = dW / dt < \infty$!).

$$W_C = C \cdot u_C^2 / 2 = 0 \Rightarrow u_C(0+) = 0 \quad \text{und} \quad W_L = L \cdot i^2 / 2 = 0 \Rightarrow i(0+) = 0$$

Damit folgt aus

$$u_C(0+) + u_R(0+) + u_L(0+) = u_C(0+) + R \cdot i(0+) + u_L(0+) = U \quad (5.1.1-14)$$

die **Anfangsbedingung**

$$i(0+) = 0 \quad u_L(0+) = L \cdot di / dt \Big|_{t=0+} = U \quad (5.1.1-15)$$

Differentialgleichung (5.1.1-2) :

$$L \cdot \frac{d^2 i}{dt^2} + R \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot i = \frac{du(t)}{dt} = \frac{dU}{dt} = 0 \quad (5.1.1-16)$$

Die homogene Lösung der Differentialgleichung lautet gemäß (5.1.1-11):

$$i_h(t) = D_1 \cdot e^{-t/T} \cos \omega_d t + D_2 \cdot e^{-t/T} \sin \omega_d t \quad (5.1.1-17)$$

Die partikuläre Lösung ist – da die rechte Seite in (5.1.1-16) Null ist – ebenfalls Null: $i_p = 0$.
Die resultierende Lösung ist

$$i(t) = i_h(t) + i_p(t) = i_h(t) = D_1 \cdot e^{-t/T} \cos \omega_d t + D_2 \cdot e^{-t/T} \sin \omega_d t \quad (5.1.1-18)$$

Bestimmen der Konstanten D_1, D_2 durch Einsetzen in die Anfangsbedingung:

$$i(0+) = D_1 \cdot e^{-0/T} \cos 0 + D_2 \cdot e^{-0/T} \sin 0 = D_1 + 0 = 0 \Rightarrow D_1 = 0 \quad (5.1.1-20)$$

Die erste Ableitung von $i(t)$ liefert

$$\begin{aligned} di/dt &= (-D_1/T + D_2\omega_d) \cdot e^{-t/T} \cos \omega_d t + (-D_1\omega_d - D_2/T) \cdot e^{-t/T} \sin \omega_d t \Big|_{t=0+} = \\ &= D_2\omega_d \cdot 1 = U/L \Rightarrow D_2 = \frac{U}{\omega_d L} \end{aligned} \quad (5.1.1-21)$$

Lösung:
$$i(t) = \frac{U}{\omega_d L} \cdot e^{-t/T} \sin \omega_d t \quad (5.1.1-22)$$

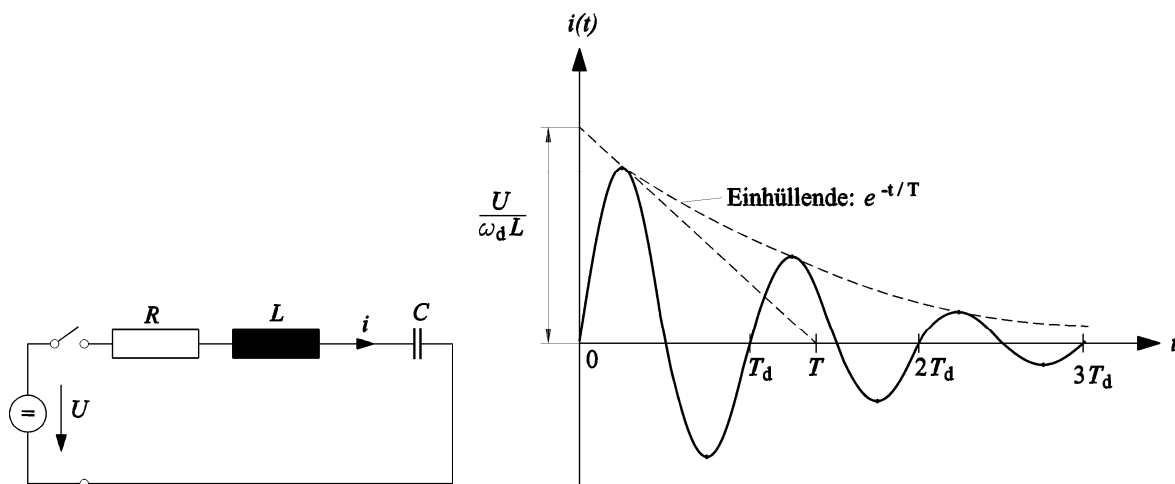


Bild 5.1.1-2: Serienschwingkreis: links: Zuschalten einer Gleichspannung U zum Zeitpunkt $t = 0$, rechts: Einschwingen des „Einschaltstroms“ nach dem Zuschalten

Fazit:

Der Strom schwingt nach dem Einschalten als gedämpfte Sinusschwingung und klingt dann auf Null ab, da der Kondensator bei Anliegen einer Gleichspannung U den Strom sperrt. Nach theoretisch unendlich langer Zeit, praktisch nach etwa drei Zeitkonstanten $t = 3T$ ist der Strom auf Null abgeklungen, die Spannung u_R und u_L sind Null, der Kondensator ist auf die Spannung $u_C = U$ aufgeladen.

Kontrolle der Rechnung: Die einschwingende Kondensatorspannung muss nach unendlich langer Zeit der Gleichspannung U entsprechen:

$$u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt = -\frac{U}{C \cdot \omega_d L} \cdot \frac{1}{\frac{1}{T^2} + \omega_d^2} \cdot e^{-t/T} \cdot \left(\frac{1}{T} \sin \omega_d t + \omega_d \cos \omega_d t \right) \quad (5.1.1-23)$$

$$u_C = \frac{1}{C} \int_0^{\infty} i(t) dt = \frac{U}{C \cdot \omega_d L} \cdot \frac{\omega_d \cdot \cos 0}{\frac{1}{T^2} + \omega_d^2} = \frac{U}{CL} \cdot \frac{1}{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = U$$

Fazit:

Alle Teilspannungen (u_R , u_L , u_C) schwingen mit der Eigenfrequenz, allerdings zueinander so phasenverschoben, dass sie in Summe die Gleichspannung U ergeben. Wegen der Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung tritt in (5.1.1-23) auch ein cos-Term auf.

5.1.2 Erzwungene Schwingung - Resonanz

Bei Anlegen einer Wechselspannung an den Serien-Schwingkreis schwingen der Strom und die Teilspannungen nach Abklingen der Eigenschwingung ("transienter" (flüchtiger) Einschwing-Vorgang, entspricht der homogenen Lösung) mit der von außen aufgeprägten Fremdfrequenz ("stationäre" Schwingung (Dauerschwingung), entspricht der partikulären Lösung).

Beispiel 5.1.2-1:

Dauerschwingung bei Anlegen einer sinusförmigen Wechselspannung

$$u(t) = \hat{U} \cdot \cos \omega t \quad , \quad (5.1.2-1)$$

wobei die Frequenz ω mit der Eigenfrequenz ω_d **nicht** übereinstimmt. Die **partikuläre Lösung** für die Differentialgleichung (5.1.1-2)

$$L \cdot \frac{d^2 i}{dt^2} + R \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot i = \frac{du(t)}{dt} = -\omega \hat{U} \cdot \sin \omega t \quad (5.1.2-2)$$

ist eine Linear-Kombination von ungedämpfter sin- und cos-Schwingung mit ω , da die rechte Seite eine ungedämpfte Sinusschwingung mit ω ist.

$$i_p(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (5.1.2-3)$$

Einsetzen von (5.1.2-3) in (5.1.2-2) ergibt mit den Ableitungen

$$\frac{d \sin \omega t}{dt} = \omega \cos \omega t, \quad \frac{d \cos \omega t}{dt} = -\omega \sin \omega t, \quad \frac{d^2 \sin \omega t}{dt^2} = -\omega^2 \sin \omega t, \quad \frac{d^2 \cos \omega t}{dt^2} = -\omega^2 \cos \omega t$$

$$(-\omega^2 LA + \omega RB + \frac{A}{C}) \cos \omega t + (-\omega^2 LB - \omega RA + \frac{B}{C}) \sin \omega t = -\omega \hat{U} \sin \omega t \quad . \quad (5.1.2-4)$$

Da auf der rechten Seite in (5.1.2-4) nur ein sin-Term steht, muss der Klammerausdruck beim cos-Term auf der linken Seite Null sein, während jener beim sin-Term dem Ausdruck auf der rechten Seite entsprechen muss („Koeffizientenvergleich“).

$$\text{cos-Terme:} \quad (-\omega^2 L + 1/C) \cdot A + \omega R \cdot B = 0 \quad (5.1.2-5a)$$

$$\text{sin-Terme: } -\omega R \cdot A + (-\omega^2 L + 1/C) \cdot B = -\omega \hat{U} \quad (5.1.2-5b)$$

Wir erhalten so ein lineares Gleichungssystem für die Unbekannten A und B , das z. B. mit der *Cramer'schen* Determinantenregel gelöst wird:

$$A = \frac{\omega^2 RC^2}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2} \cdot \hat{U}, \quad B = -\frac{(1 - \omega^2 LC) \cdot \omega C}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2} \cdot \hat{U} \quad (5.1.2-6)$$

Die Lösung für die Dauerschwingung $i(t) = i_p(t)$ lautet mit (5.1.2-3) und (5.1.2-6):

$$i(t) = \frac{\hat{U}}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2} \cdot [\omega^2 RC^2 \cdot \cos \omega t - (1 - \omega^2 LC) \cdot \omega C \cdot \sin \omega t] \quad (5.1.2-7)$$

Will man $i(t)$ durch eine **einzig**e Schwingung (z. B. cos-Schwingung) darstellen, bedient man sich folgender Umformung:

$$i(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t = C \cos(\omega t - \varphi) = C \cos \omega t \cdot \cos \varphi + C \sin \omega t \cdot \sin \varphi$$

$$\text{Koeffizientenvergleich: } A = C \cos \varphi, B = C \sin \varphi \Rightarrow C = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \tan \varphi = B/A$$

$$i(t) = \frac{\hat{U} \cdot \omega C}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} \cdot \cos(\omega t - \varphi(\omega)) \quad \text{mit} \quad \varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega RC}\right) \quad (5.1.2-8)$$

Fazit:

Die Stromdauerschwingung ist zur angelegten Spannung i.a. phasenverschoben, was durch den zusätzlichen sin-Term in (5.1.2-7) bzw. den Winkel φ in (5.1.2-8) zum Ausdruck kommt. Die Amplitude und die Phasenverschiebung von $i(t)$ sind bei unveränderter Amplitude der anliegenden Spannung \hat{U} wegen $A(\omega), B(\omega)$ frequenzabhängig.

Die Lösung (5.1.2-7) lehrt: Wird ein Schaltungsparameter (R, L, C, ω) variiert, alle anderen aber konstant gelassen, so ändern sich die in der Schaltung auftretenden elektrischen Größen (Spannungen an den Schaltelementen u_L, u_C, u_R , Strom i , Phasenverschiebungswinkel φ zwischen angelegter Spannung und Strom). Die **Resonanzkurven** zeigen die Abhängigkeit der elektrischen Größen vom jeweils sich ändernden Parameter. Bei der Übung im Praktikum wird die Kreis-**Frequenz** der angelegten Wechselspannung ω geändert. Für die dabei auftretenden Resonanzkurven des Effektivwerts des Stroms $I = \hat{I} / \sqrt{2}$ gilt:

a) *Abhängigkeit der Stromstärke I von ω :*

Für die Stromstärke $I(\omega)$ (Effektivwert!) gilt gemäß (5.1.2-8):

$$I(\omega) = \frac{U}{\sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}} \quad (5.1.2-9)$$

Die Funktion hat ein **Maximum** für

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad , \quad (5.1.2-10)$$

damit wird

$$I(\omega_0) = \frac{U}{R} \quad . \quad (5.1.2-11)$$

Fazit:

Wenn die Anregungsfrequenz f die Resonanzfrequenz $f_d = f_0$ des ungedämpften Schwingkreises erreicht, ist die Stromamplitude maximal, weil die Teilspannungen an Kondensator und Spule in Gegenphase sind und sich daher aufheben. Der Schwingkreis wirkt rein *ohm'sch*: Strom und anliegende Wechselspannung sind in Phase. Kontrolle: Gemäß (5.1.2-8) ist der Phasenwinkel φ Null.

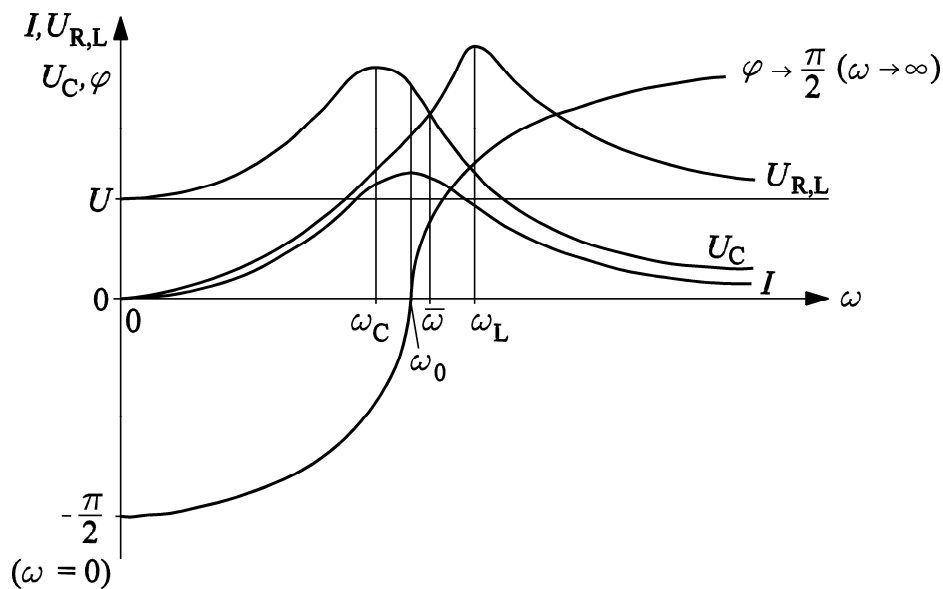


Bild 5.1.2-1: Resonanzkurven des Serien-Schwingkreises bei Frequenzänderung

Die Dauerschwingung stellt den "eingeschwungenen" Zustand dar. Es treten nur noch zeitlich sinusförmig veränderliche Größen auf, daher kann mit Vorteil die **komplexe Rechnung** verwendet werden (Bild 5.1.1-1). Aus (5.1.2-1) und (5.1.2-8) wird

$$\underline{U} = U \quad \text{und} \quad \underline{I} = I \cdot e^{j\varphi} \quad . \quad (5.1.2-12)$$

b) *Abhängigkeit der Kondensatorspannung U_C von ω :*

Es wird wie oben beschrieben angenommen, dass der Kondensator verlustfrei ist. Diese Annahme ist für reale Kondensatoren gerechtfertigt, da sie relativ kleine (dielektrische) Verluste aufweisen. Für $U_C(\omega)$ erhält man mit (5.1.2-9)

$$U_C(\omega) = \frac{I(\omega)}{\omega C} = \frac{U}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2}} \quad . \quad (5.1.2-13)$$

Diese Funktion hat ein Maximum bei der Kreis-Frequenz ω_C , die man mit $dU_C/d\omega = 0$ erhält (bitte selbst nachrechnen!).

$$\omega_C^2 = \omega_0^2 \cdot \left(1 - \frac{R^2 C}{2L}\right) \quad (5.1.2-14)$$

Dieser Wert von ω in (5.1.2-13) eingesetzt, ergibt (bitte selbst nachrechnen!)

$$U_C(\omega_C) = \frac{U \cdot L}{RC \cdot \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{R^2}{4}}} \quad (5.1.2-15)$$

Fazit:

Man erkennt, dass bei variabler Frequenz das Spannungsmaximum am Kondensator NICHT bei der Resonanzfrequenz ω_0 auftritt und daher nicht mit dem Maximum der Stromstärke zusammenfällt, da $\omega_C \neq \omega_0$ ist. Doch liegt bei kleinem R (verlustarmer Schwingkreis) ω_C sehr nahe bei ω_0 .

c) Abhängigkeit der Spannung an Spule (Drossel) und Widerstand $U_{R,L}$ von ω :

Es wird angenommen, dass die Drossel den gesamten *Ohm'schen* Widerstand R des Kreises enthält. Diese Annahme ist sinnvoll, da eine reale Spule infolge des Wicklungswiderstands (und bei Verwendung eines Eisenkerns infolge der dort stattfindenden Ummagnetisierungsverluste) stets eine Kombination aus idealer Induktivität L und Widerstand R darstellt. Der Widerstand R wird als frequenzunabhängig gedacht, was bei geblechtem Eisenkern bis zur "kritischen" Frequenz gültig ist (siehe Kapitel 4), wenn von zusätzlichen Wirbelströmen in der Spulenwicklung selbst abgesehen wird. Damit ist der Ersatz-Zweipol R - L für die Spannung $U_{R,L}$ zu betrachten.

$$\underline{U}_{R,L} = \underline{U}_R + \underline{U}_L \quad (5.1.2-16)$$

Mit (5.1.2-9) folgt:

$$|\underline{U}_{R,L}(\omega)| = U_{R,L}(\omega) = I(\omega) \cdot \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = U \cdot \frac{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (5.1.2-17)$$

Die Bedingung für einen Extremwert $dU_{R,L}(\omega)/d\omega = 0$ ergibt ein **Maximum der Spannung** für die Frequenz (bitte selbst nachrechnen!)

$$\omega_L^2 = \frac{1 + \sqrt{1 + 2R^2 \cdot \frac{C}{L}}}{2 \cdot C \cdot L} \quad (5.1.2-18)$$

d.h. ein Maximum von $U_{R,L}$ der Größe (bitte selbst nachrechnen !)

$$U_{R,L}(\omega_L) = U \cdot \frac{\sqrt{1 + 2R^2 \cdot \frac{C}{L} + R^2 \cdot \frac{C}{L} + 1}}{\sqrt{1 + 2R^2 \cdot \frac{C}{L} + R^2 \cdot \frac{C}{L} - 1}} \quad (5.1.2-19)$$

Wieder fallen ω_L und die Resonanzfrequenz ω_0 **nicht** zusammen; sie liegen aber bei kleinem R nahe beieinander. Der *Ohm'sche* Widerstand verschiebt die Lage des Maximums von $U_{R,L}$ und U_C und ist auch die Ursache für die Ungleichheit der Größe der beiden Maxima. Beide Maxima sind bei $R = 0$ unendlich groß und treten beide bei ω_0 auf. Gleichheit der Teilspannungen $U_{R,L}$ und U_C tritt ein bei $\omega = \bar{\omega}$ (bitte selbst nachrechnen !):

$$\bar{\omega}^2 = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{R^2}{2} \cdot \frac{C}{L}\right)^2} - \frac{R^2}{2} \cdot \frac{C}{L}}{LC} \quad (5.1.2-20)$$

Auch $\bar{\omega}$ liegt bei kleinem R nahe an ω_0 und wird bei $R = 0$ identisch mit ω_0 .

d) *Abhängigkeit des Phasenverschiebungswinkels φ von ω :*

Für den Phasenverschiebungswinkel φ zwischen dem Strom I und der angelegten Spannung U gilt gemäß (5.1.2-8)

$$\tan \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (5.1.2-21)$$

Der Phasenwinkel ändert sich von $\varphi = -90^\circ$ (bei $\omega = 0$) auf $\varphi = 0^\circ$ (bei $\omega = \omega_0$) und geht bei $\omega \rightarrow \infty$ in $\varphi = 90^\circ$ über.

Fazit:

Bei Frequenz "Null" wirkt der Serienschwingkreis rein kapazitiv. Der Strom ist Null, da die Kapazität den (Gleich-)Strom sperrt. Bei unendlich hoher Frequenz ist der Serienschwingkreis rein induktiv. Der Strom ist wieder Null, da die Impedanz ωL unendlich groß ist. Dazwischen liegt das Strommaximum bei $\omega = \omega_0$.

e) *Abhängigkeit des Impedanz Z von ω :*

Der Betrag der Impedanz

$$Z = |Z| = \sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2} \quad (5.1.2-22)$$

sinkt bei kleinen Kreis-Frequenzen $\omega \ll \omega_0$ etwa mit $Z \cong 1/(\omega C)$, also hyperbolisch, während bei großen Kreis-Frequenzen $\omega \gg \omega_0$ die Impedanz mit $Z \cong \omega L$ linear ansteigt. Bei der Resonanz $\omega = \omega_0$ ist Z rein *Ohm'sch*: $Z = R$ (Bild 5.1.2-2).

5.1.3 Praktische Anwendungen des Serienschwingkreises als Filter

a) *Bandpass:*

Der Spannungsfall $U_R = R \cdot I$ am Widerstand R ist maximal bei $\omega = \omega_0$. Liegen am Serienschwingkreis mehrere sinusförmige Spannungen U mit unterschiedlichen Frequenzen ω an

("Frequenzgemisch"), so werden gemäß Bild 5.1.2-1 jene Spannungen mit einer Frequenz ω , die deutlich von ω_0 abweicht, zu kleinen (abgeschwächten) Spannungen U_R führen, während jene mit Frequenzen nahe ω_0 nahezu unabgeschwächt bleiben. Aus (5.1.2-9) folgt für den "Abschwächungsfaktor"

$$a_R = \frac{U_R}{U} = \frac{R \cdot I(\omega)}{U} = \frac{R}{\sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}}, \quad 0 \leq a_R \leq 1 \quad (5.1.3-1)$$

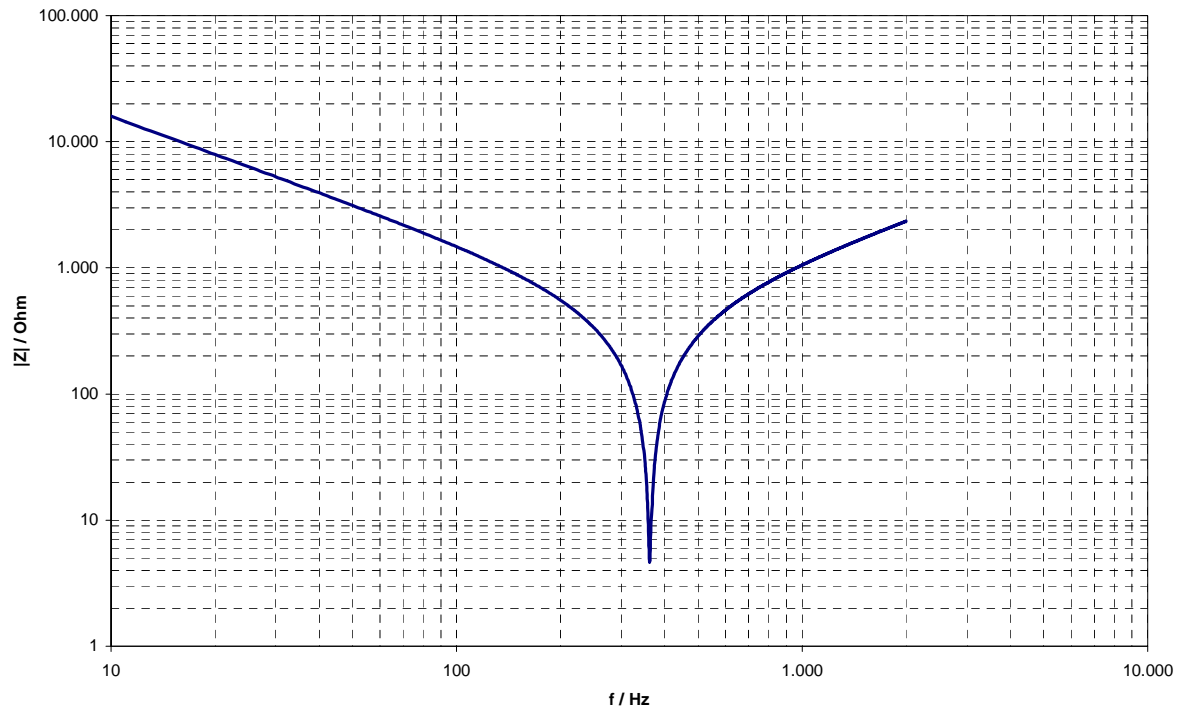


Bild 5.1.2-2: Resonanzkurve $Z(f)$ eines Serien-Schwingkreises; die Zahlenwerte der Parameter R, L, C sind etwa dieselben wie von Bild 5.1.3-1. Die Resonanzfrequenz beträgt $f_0 = 366$ Hz.

Man kann so aus einem Frequenzgemisch Spannungen mit der gewünschten Frequenz ω_0 heraus filtern, indem man den Serienschwingkreis so auslegt, dass die gewünschte Frequenz ω_0 als Resonanzfrequenz auftritt ("Abstimmen" des Schwingkreises auf ω_0). Natürlich werden alle Spannungen, deren Kreis-Frequenz in der Nähe von ω_0 liegt, entsprechend (5.1.3-1) kaum abgeschwächt. Das Frequenz-Band, innerhalb dessen die Abschwächung $a \geq 0.5$ beträgt ("Halbwerts-Bandbreite" $\Delta\omega$), ist bestimmt durch (5.1.3-3).

$$a_R = 0.5 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{R}{\sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}} \Rightarrow \omega_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{CL} + \frac{3R^2}{4L^2}} \pm \frac{\sqrt{3}R}{2L} \quad (5.1.3-2)$$

$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = \frac{\sqrt{3}R}{L} \quad (5.1.3-3)$$

Fazit:

Das Kreis-Frequenz-Band $\Delta\omega$ ist um so schmaler und damit das Filter um so "selektiver", je kleiner der Widerstand R ist, also je verlustärmer der Serienschwingkreis ist.

Diese Selektivität wird ausgedrückt durch das Verhältnis $\omega_0 / \Delta\omega$, wobei Q die **Güte des Schwingkreises** heißt.

$$\omega_0 / \Delta\omega = \frac{1}{\sqrt{3}R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (5.1.3-4)$$

$$Q = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (5.1.3-5)$$

Beispiel 5.1.3-1:

Ein Schwingkreis mit der Güte $Q = 10$ schwächt Spannungen, deren Frequenz um weniger als

$$\pm \frac{\Delta\omega}{2} = \pm \frac{\sqrt{3}R}{2} \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot \omega_0 \cong \pm R \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot \omega_0 = \frac{\omega_0}{Q},$$

hier also um weniger als $\pm \omega_0 / 10$ von der Resonanzfrequenz abweichen, weniger als 50% ab.

Das Filter wirkt somit als "**Bandpass**" mit der Bandbreite $\Delta\omega \cong 2 \frac{\omega_0}{Q}$, da es Spannungen

mit Frequenz $\omega_0 \pm \frac{\omega_0}{Q}$ weniger als 50% abgeschwächt passieren lässt.

Beispiel 5.1.3-2:

Die Resonanzkurve $I(f)$ eines Serien-Schwingkreises ist in Bild 5.1.3-1 dargestellt. Wie hoch ist die Güte des Schwingkreises?

Antwort:

Bei halber Höhe des Resonanz-Peaks $I(f) = 0.046$ A, also bei 0.023 A ist die Bandbreite $\Delta f \approx 80$ Hz. Die Resonanzfrequenz liest man mit $f_0 \approx 370$ Hz ab. Daraus folgt für die Güte

$$Q \cong \frac{2\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{2f_0}{\Delta f} = \frac{2 \cdot 370}{80} = \underline{\underline{9.25}}$$

Achtung:

Die Zeitkonstante des Einschwingvorgangs beim Einschalten des Filters ist gemäß (5.1.1-7)

$$T = \frac{2L}{R} = \frac{\sqrt{3}}{\Delta\omega} \quad (5.1.3-6)$$

Fazit:

Je selektiver (verlustärmer) das Filter ist, desto länger schwingt es ein. Ein verlustfreies Filter (Güte ist unendlich groß) schwingt theoretisch unendlich lange ein, was natürlich unbrauchbar ist.

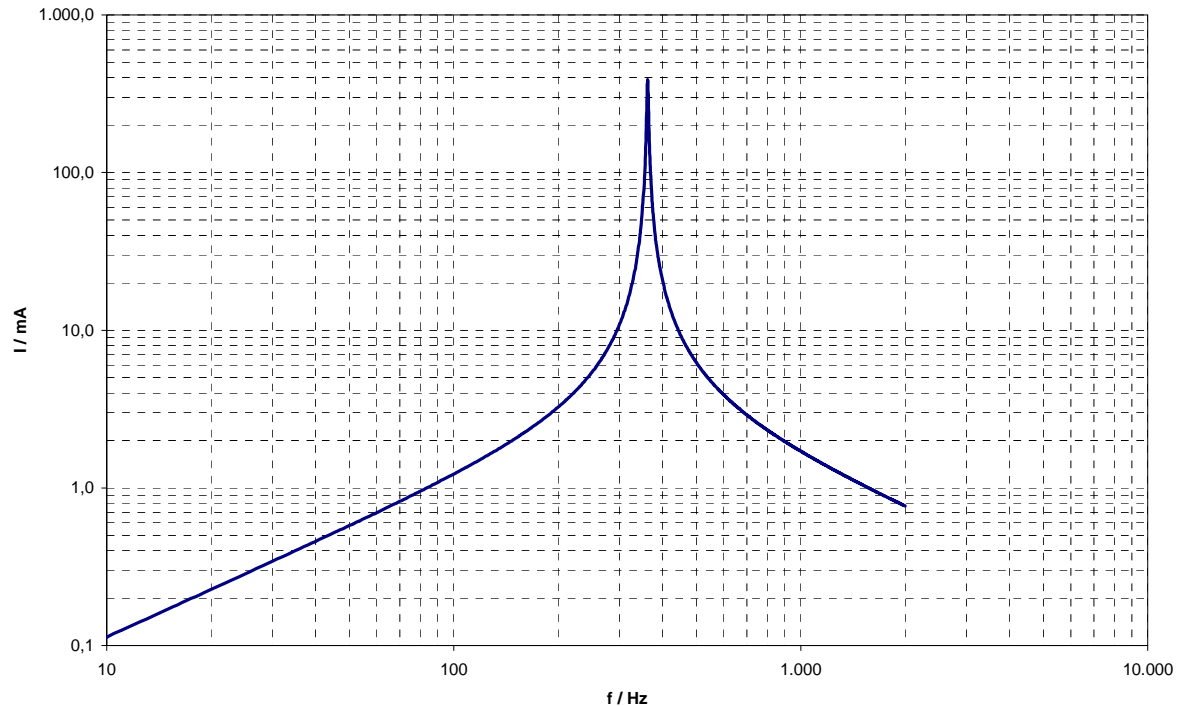


Bild 5.1.3-1: Resonanzkurve $I(f)$ eines Serien-Schwingkreises

b) Tiefpass:

Wird die Spannung an dem Kondensator als Nutzsignal verwendet, so ergibt sich eine Abdämpfungsfunktion a_C gemäß (5.1.2-13)

$$a_C = \frac{U_C(\omega)}{U} = \frac{I(\omega)}{U \cdot \omega C} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2}} \quad (5.1.3-7)$$

Bei niedrigen Frequenzen ist a_C nahezu 1, bei Frequenzen oberhalb von ω_C strebt a_C gegen Null ("**Tiefpass**": Spannungen mit **tiefen** Frequenzen passieren das Filter nahezu unabgedämpft).

Bei einem Schwingkreis mit hoher Güte ($R \ll \sqrt{L/C}$, $\omega_C \cong \omega_0$) ist die Trennung in niedrige Frequenzen mit unabgedämpfter Spannung und höhere Frequenzen mit abgedämpfter Spannung relativ scharf. Beispielsweise kann eine aus einem Bordnetzteil stammende Wechselspannung, die mittels leistungselektronischer Komponenten (Schalttransistoren !) erzeugt wurde und die neben der gewünschten "Grundfrequenz" (parasitäre) Spannungsanteile mit höheren Frequenzen enthält, durch einen als **Tiefpass** geschalteten Serienschwingkreis von den unerwünschten Spannungen mit höheren Frequenzen "befreit" werden. An der Kapazität des Schwingkreises ("**Sinusfilter**") steht eine nahezu sinusförmige Ausgangsspannung zu Verfügung.

Zu beachten ist, dass U_C (und auch U_L) bei Resonanz deutlich höhere Werte als U annehmen kann. Diese Überhöhung ist etwa das Q -fache von U ! Daher müssen die Frequenzen der abzuschwächenden parasitären Spannungen deutlich oberhalb der Resonanzfrequenz liegen (Faustwert: oberhalb der 10-fachen Resonanzfrequenz, siehe Bild 5.1.3-2). Mit (5.1.2-15) folgt:

$$U_C(\omega_C) = \frac{U \cdot L}{RC \cdot \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{R^2}{4}}} \cong \frac{U \cdot L}{RC \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}} = U \cdot Q \quad (5.1.3-8)$$

In Kapitel 2 ist die **doppeltlogarithmische Darstellung** von Spannungsverhältnissen als **Pegel L** im **Bode-Diagramm** besprochen worden. Bild 5.1.3-2 zeigt den Verlauf von

$$L = 20 \cdot \lg \left| \frac{U_C(\omega)}{U} \right| = 20 \cdot \lg(a_C(\omega)) \quad (5.1.3-9)$$

über der logarithmisch dargestellten Frequenz $f = \omega/(2\pi)$ für exemplarisch ausgesuchte Zahlenwerte von R, L, C , wie sie auch im Praktikum verwendet werden. Für hohe Frequenzen gilt mit $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ und $(\omega CR)^2 \ll (1 - \omega^2 LC)^2$ sowie $(1 - \omega^2 LC)^2 \approx (\omega^2 LC)^2$

$$\begin{aligned} L &= 20 \cdot \lg|a_C| = 20 \cdot \lg \left| \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2}} \right| \cong 20 \cdot \lg \left| \frac{1}{\sqrt{(-\omega^2 LC)^2}} \right| = \\ &= 20 \cdot \lg \left| \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right| = 40 \cdot \lg \left| \frac{\omega_0}{\omega} \right| = -40 \cdot \lg \left| \frac{\omega}{\omega_0} \right| \end{aligned} \quad (5.1.3-10)$$

Bei einer Verzehnfachung der Frequenz sinkt der Pegel um 40 dB (**Pegelabnahme um 40 dB/Dekade**): $L = -40 \cdot \lg|10| = -40$ dB. Bei hohen Frequenzen wird die Spannung am Kondensator **daher sehr stark abgeschwächt**.

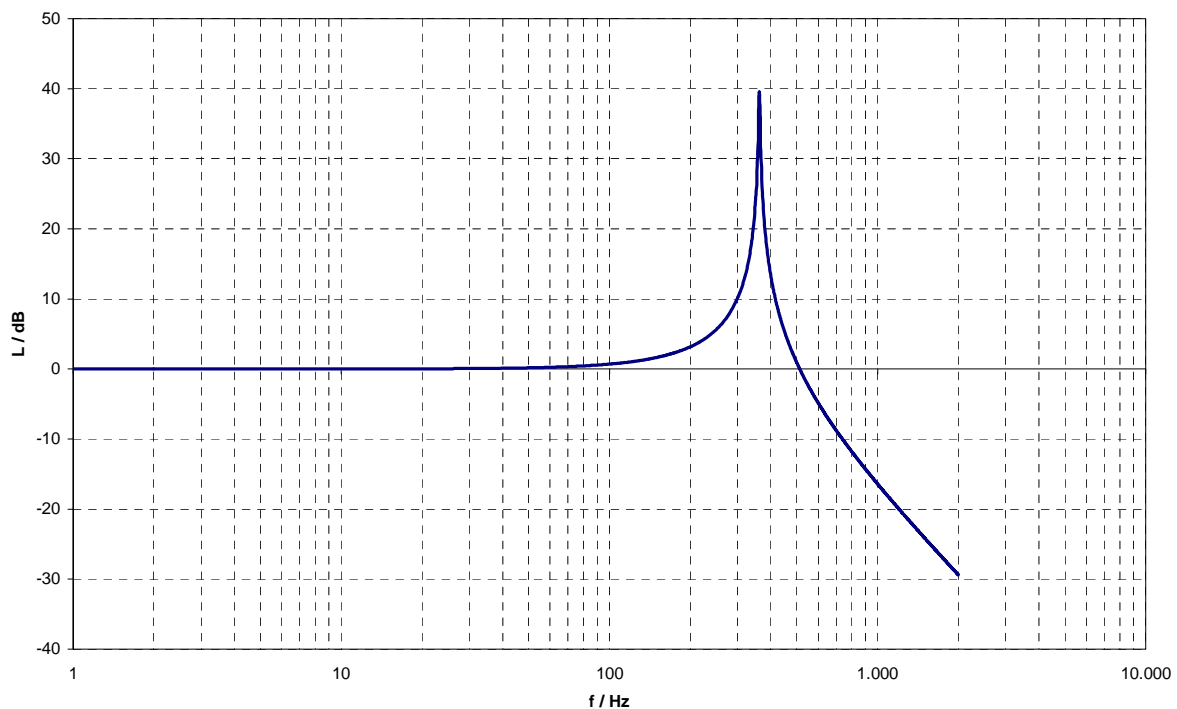


Bild 5.1.3-2: Bode-Diagramm für die Erhöhung/Abschwächung der Spannung am Kondensator. Bei Resonanz: $U_C/U \cong 100 \Rightarrow L = 40$ dB. Bei hohen Frequenzen: L sinkt mit 40 dB je Dekade (= Verzehnfachung von f).

5.2 Parallelschwingkreis

5.2.1 Verlustloser Parallelschwingkreis

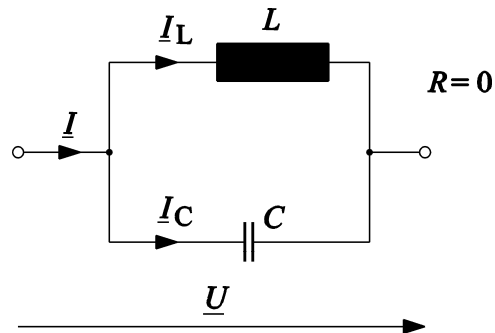


Bild 5.2.1-1: Verlustloser Parallelschwingkreis

Eine Parallelschaltung einer idealen Spule mit der Induktivität L und eines idealen Kondensators mit der Kapazität C nennt man einen **verlustlosen Parallelschwingkreis**. Einschwingvorgang und erzwungene Dauerschwingung werden analog zu den in Abschnitt 5.1 sehr ausführlich dargestellten Berechnungsmethoden ermittelt. Für die Berechnung der erzwungenen Dauerschwingungen kann wieder mit Vorteil die komplexe Rechnung verwendet werden. Der komplexe Widerstand \underline{Z} des Parallelschwingkreises, bestimmt aus dem Leitwert \underline{Y} ,

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} = \frac{1}{\frac{1}{j\omega L} + j\omega C} = \frac{j}{\frac{1}{\omega L} - \omega C} \quad (5.2.1-1)$$

wird bei der Frequenz

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (5.2.1-2)$$

maximal (vgl. (5.1.2-10)), nämlich unendlich groß, da $\frac{1}{\omega_0 L} = \omega_0 C$:

$$\underline{Z}(\omega_0) \rightarrow \infty \quad (5.2.1-3)$$

Bei **Resonanz** kann folglich kein Summenstrom I fließen, weil die beiden Teilströme I_C und I_L gegenphasig fließen und sich im Knotenpunkt zu Null ergänzen. Es gelten **bei Resonanz** die Beziehungen

$$\underline{I} = 0, \quad \underline{I}_L = -\underline{I}_C \quad (5.2.1-4)$$

$$\underline{I}_L = \frac{\underline{U}}{j\omega_0 L} = -j \frac{\underline{U}}{\sqrt{L/C}}, \quad \underline{I}_C = \underline{U} \cdot j\omega_0 C = j \frac{\underline{U}}{\sqrt{L/C}} \quad (5.2.1-5)$$

Es tritt also **Resonanz** bei derselben Frequenz (5.2.1-2) wie bei der Serienresonanz auf. Allerdings ist nun die Stromstärke nicht maximal, sondern Null; es wird also für Spannungen mit der Resonanzfrequenz der Stromfluss völlig gesperrt (**Sperrkreis**). Einen völlig verlustlosen Sperrkreis gibt es aber nicht. Die Verluste der Drossel und des Kondensators werden durch entsprechende *Ohm'sche* Vorwiderstände berücksichtigt.

5.2.2 Parallelschwingkreis mit Verlusten

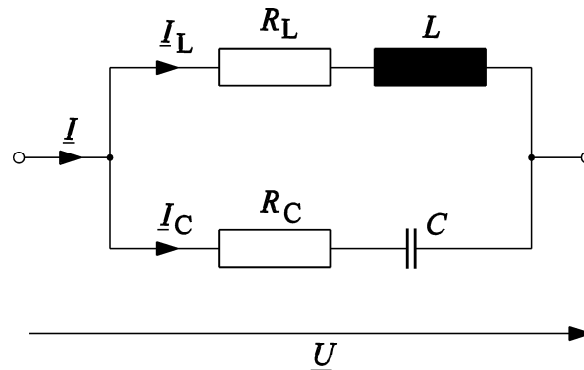


Bild 5.2.2-1: Verlustbehafteter Parallelschwingkreis

Die **Parallelresonanz** lässt sich beim verlustbehafteten Parallelschwingkreis auf zwei Arten definieren:

- 1) Der **Phasenverschiebungswinkel** zwischen Gesamtstrom I und Spannung U ist bei ω_{01} **Null**. Diese Bedingung ist analog zum Serienschwingkreis als Resonanz definiert und wird im folgenden behandelt.
- 2) Der **Gesamtstrom** I wird bei ω_{02} **minimal**. Diese Bedingung ist analog zum verlustlosen Parallelschwingkreis definiert (dort ist der Minimalstrom Null!).

Die aus den beiden Bedingungen 1) und 2) sich ergebenden Resonanzfrequenzen ω_{01} , ω_{02} sind im Gegensatz zum Fall der Serienresonanz im allgemeinen **voneinander verschieden**. Je kleiner jedoch die Widerstände R_L und R_C sind, umso geringer wird der Unterschied der beiden Resonanzfrequenzen. Der komplexe Widerstand der Schaltung ist durch

$$\underline{Z} = \frac{(R_L + j\omega L) \cdot \left(R_C + \frac{1}{j\omega C} \right)}{R_L + j\omega L + R_C + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R_L R_C + \frac{L}{C} + j \left(\omega L R_C - \frac{R_L}{\omega C} \right)}{R_L + R_C + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} \quad (5.2.2-1)$$

bestimmt. Ableiten von $|\underline{Z}|^2$ nach ω und Null setzen liefert ω_{02} . Für die beiden Folgenden Sonderfälle gilt:

$$R_L = R_C : \omega_{02} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad R_C = 0, R_L = R : \omega_{02} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{1 + \frac{2R^2 C}{L} - \frac{R^2 C}{L}} \quad (5.2.2-2)$$

Bild 5.2.2-2 zeigt die Resonanzkurve $Z = |\underline{Z}(f)|$ für einen verlustbehafteten Parallelschwingkreis mit Zahlenwerten R_L , R_C , C , L , wie sie typischerweise im Praktikum verwendet werden. Bei der Frequenz $f_{02} = \omega_{02} / (2\pi) \approx 80 \text{ Hz}$ wird die Impedanz maximal, der Summenstrom daher minimal, was somit der Resonanz gemäß Bedingung 2) entspricht.

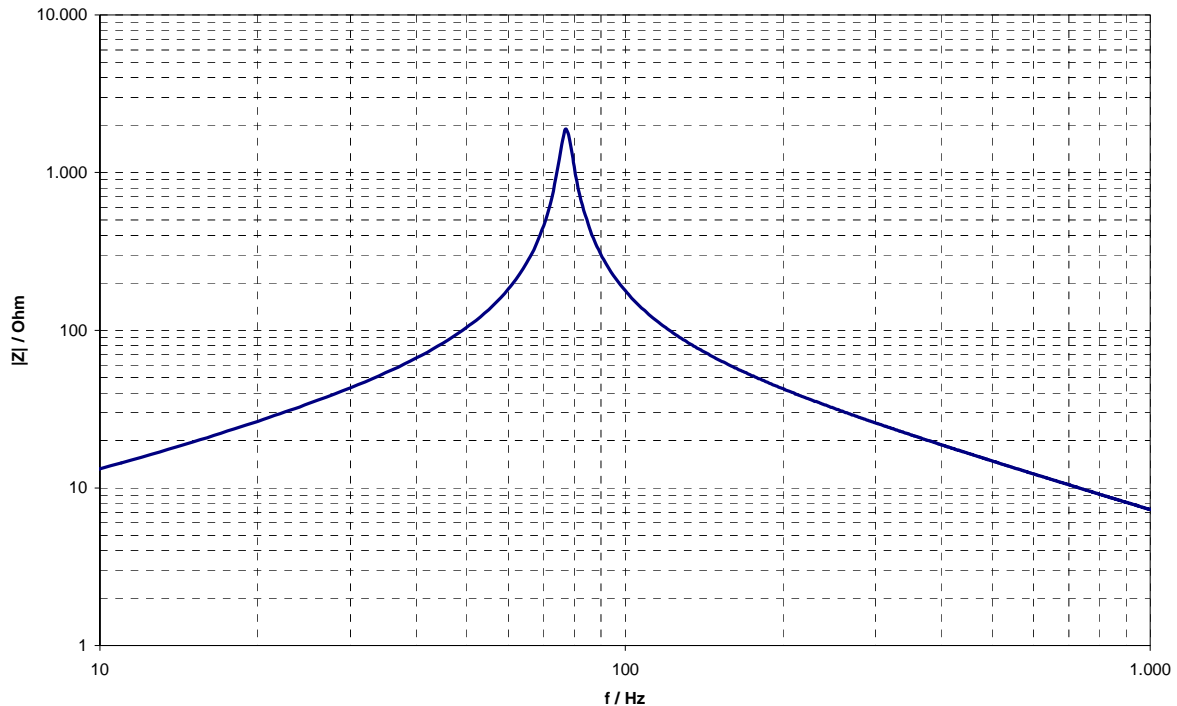


Bild 5.2.2-2: Resonanzkurve $Z(f)$ für einen verlustbehafteten Parallelschwingkreis

Für die nach 1) definierte Resonanz ist Z bei $\omega = \omega_{01}$ reell. Dies ist dann der Fall, wenn das Argument des Zählers gleich dem des Nenners ist, d.h. es muss gelten

$$\frac{\omega L R_C - \frac{R_L}{\omega C}}{R_L R_C + \frac{L}{C}} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R_L + R_C},$$

woraus für die **Resonanzfrequenz** $\omega = \omega_{01}$ folgt (bitte selbst nachrechnen!)

$$\omega_{01} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{\frac{L - CR_L^2}{L - CR_C^2}}. \quad (5.2.2-3)$$

Mit der im Allgemeinen nicht vorliegenden, aber zwecks Vereinfachung angenommenen Voraussetzung

$$R_L = R_C = R \quad (5.2.2-4)$$

wird aus (5.2.2-3) die bekannte Kreis-Frequenz

$$\omega_{01} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (5.2.2-5)$$

Aus (5.2.2-1) ergibt sich für die Impedanz bei Resonanzbedingung 1)

$$\underline{Z}(\omega_0) = \frac{\frac{L}{C} + R^2}{2R} \quad (5.2.2-6)$$

Ist $R_L = R_C = R \ll \sqrt{L/C}$ erfüllt (**verlustarmer Sperrkreis**, hohe Güte $Q = \sqrt{L/C}/R$), so folgt aus (5.2.2-6)

$$\underline{Z}(\omega_0) = \frac{\frac{L}{C} + R^2}{2R} \cong \frac{L}{2RC} \quad (5.2.2-7)$$

Bei Resonanz gilt für diesen Spezialfall das Zeigerdiagramm mit $I_L = I_C$ gemäß Bild 5.2.2-3, da neben der Annahme $R_L = R_C = R$ wegen (5.2.2-5) auch $\omega_0 L = 1/(\omega_0 C) = X$ gilt und damit $Z_L = Z_C$ gegeben ist. Die Strombeträge I_L und I_C werden somit gleich groß. Da

$$\underline{Z}_L = R + jX \quad , \quad \underline{Z}_C = R - jX \quad (5.2.2-8)$$

ist, eilt der Strom \underline{I}_C um denselben Phasenwinkel der Spannung \underline{U} vor, wie \underline{I}_L dieser Spannung nachhilt. Damit ist der resultierende Strom $\underline{I} = \underline{I}_L + \underline{I}_C$ in Phase mit \underline{U} und folglich Resonanz-Bedingung 1) erfüllt.

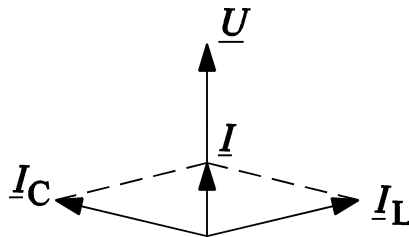


Bild 5.2.2-3: Strom- und Spannungszeigerdiagramm bei Parallelresonanz gemäß Bedingung 1) " $\varphi = 0^\circ$ " im verlustbehafteten Parallelschwingkreis mit der zusätzlichen Annahme $R_L = R_C$

Bei der Übung werden die Resonanzkurve bei veränderlicher Frequenz $f = \omega/(2\pi)$ (alle anderen Parameter konstant) aufgenommen. Bild 5.2.2-4 zeigt die zu Bild 5.2.2-2 gehörende Resonanzkurve $I(f)$. Da die Verlustwiderstände R_L und R_C deutlich kleiner als $\sqrt{L/C}$ sind, kann für Frequenzen außerhalb des Resonanzbereichs die Impedanz \underline{Z} mit der Formel für den verlustlosen Parallelschwingkreis (5.2.1-1) abgeschätzt werden:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}}{\frac{1}{\omega L} - \omega C} \quad \Rightarrow \quad \omega \ll \omega_0 : \underline{I} \cong \frac{\underline{U}}{j\omega L} \sim \frac{1}{\omega} \quad (5.2.2-9)$$

$$\Rightarrow \quad \omega \gg \omega_0 : \underline{I} \cong \frac{\underline{U}}{-j/(\omega C)} \sim \omega$$

Fazit:

Der Strom sinkt bei kleinen Frequenzen hyperbolisch mit steigender Frequenz und steigt bei hohen Frequenzen linear mit dieser an. Bei der Resonanzfrequenz f_{0I} tritt der "Ohm'sche Reststrom" (5.2.2-10) auf.

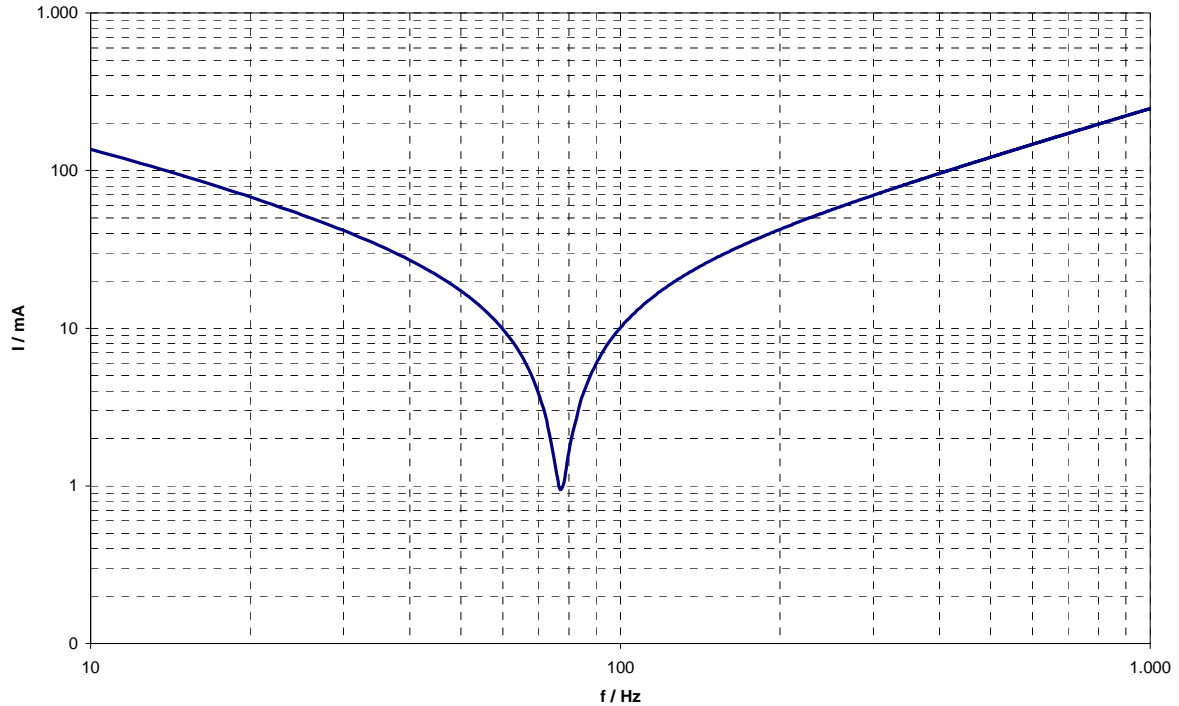


Bild 5.2.2-4: Resonanzkurve $I(f)$ eines verlustbehafteten Parallel-Schwingkreises

Wie erwähnt, können aber Resonanzkurven auch bei Veränderung **eines anderen Parameters** als der Frequenz aufgenommen werden. In Bild 5.2.2-5 ist als Beispiel die Kapazität C verändert worden, während die Frequenz und die anderen Parameter konstant blieben. Dabei sind die Kurven $I_C(C)$, $I_L(C)$ und $I(C)$ eines verlustlosen Parallelresonanzkreises ($R = 0$) im Vergleich zu $I(C)$ für $R_L = R_C = R > 0$ dargestellt. Bei der durch (5.2.2-5) gegebenen Resonanzstelle $C = C_0 = 1/(\omega^2 L)$ verschwindet I bei $R > 0$ nicht, sondern nimmt – mit Verwendung von (5.2.2-6) - den kleinen Wert des "**Ohm'schen Reststroms**" an.

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\frac{R}{2} + \frac{L}{2RC_0}} \cong U \cdot \frac{2RC_0}{L} \tag{5.2.2-10}$$

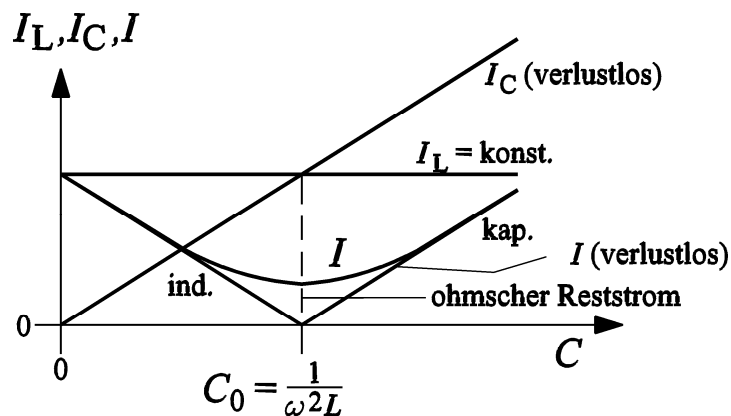


Bild 5.2.2-5: Verlustfreier und verlustbehafteter Parallelschwingkreis (Annahme $R_L = R_C$): Variation von C bei sonst konstanten Parametern

5.3 Wellenleiter

5.3.1 Die Koaxialleitung als Übertragungsleitung

a) BNC-Kabel als Wellenleiter:

Die Spannungszuführungen an die Oszilloskopeingänge, die im Praktikum verwendet werden, sind als **Koaxialkabel** ausgeführt ("**BNC-Kabel**"). Potentialführend ist der **Innenleiter**, während der als Hohlzylinder ausgeführte **Außenleiter** auf Nullpotential (Gehäusepotential des Oszilloskops) liegt. Dazwischen liegt aus (weißem) Kunststoff der dielektrische **Isolator**.

Wie breitet sich ein Spannungssignal längs dieses Kabels aus? Wenn am Koax-Kabeleingang (Spannungsabgriff an der Messschaltung) eine Spannungsänderung auftritt, tritt sie dann gleichzeitig auch am Kabelende (Oszilloskopeingang) auf oder verzögert? Gemäß der speziellen Relativitätstheorie kann sich Energie maximal nur mit Lichtgeschwindigkeit bewegen, also muss sich die Spannungsänderung der Messschaltung zum Oszilloskopeingang ebenfalls mit der im Koax-Kabel gültigen Lichtgeschwindigkeit bewegen, und steht damit am Oszilloskopeingang erst verzögert an.

Fazit:

Elektrische/elektromagnetische Signale breiten sich als (elektromagnetische) Wellen mit (endlicher) Lichtgeschwindigkeit aus. Längs eines Kabels werden diese Signale als leitungsgebundene Wellen geführt. Das Kabel fungiert als "Wellenleiter".

b) Mathematisches Modell des Wellenleiters:

Wir versuchen, zuerst näherungsweise herauszufinden, wie sich die Leitung bei verhältnismäßig kleinen Frequenzen benimmt. Fließt auf dem Innenleiter ein Messstrom I IN das Oszilloskop, so fließt er auf dem Außenleiter als Rückstrom mit **umgekehrter** Stromrichtung $-I$ zurück. Außerhalb des Kabels tritt daher **kein** Magnetfeld H auf, weil gemäß dem *Ampere'schen* Durchflutungssatz (5.3.1-1) längs einer geschlossenen Kurve C um das Kabel die Summendurchflutung Θ Null ist (Vorteil des BNC-Kabels!).

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \Theta = I + (-I) = 0 \quad (5.3.1-1)$$

Zwischen Hin- und Rückleiter (mittlerer Radius R als Radius der geschlossenen kreisförmigen Kurve C im Isolator) tritt das Magnetfeld

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = H \cdot 2\pi R = \Theta = I \Rightarrow H = \frac{I}{2\pi R} \quad (5.3.1-2)$$

auf, dem ein magnetischer Fluss Φ entspricht. Zwischen Hin- und Rückleiter tritt somit eine Induktivität $L = \Psi/I = N\Phi/I$ ($N = 1$) auf, die **pro Längeneinheit** des Kabels als "**Induktivitätsbelag**" $L' = L/l$ bezeichnet wird. Ebenso bildet sich auf Grund der Spannungsdifferenz zwischen dem Innen- und Außenleiter ein radial gerichtetes E -Feld im Isolator aus und bewirkt, dass Innen- und Außenleiter als Elektroden eines Zylinderkondensators mit der Kapazität C aufgefasst werden können. Diese Kapazität pro Längeneinheit $C' = C/l$ wird "**Kapazitätsbelag**" genannt. Daher können wir das Verhalten einer **beliebigen** Übertragungsleitung bei niedrigen Frequenzen beschreiben, indem wir ihre Induktivität pro Längeneinheit L' und ihre Kapazität pro Längeneinheit C' angeben. Den Leitungswiderstand und die dielektrischen Verluste im Isolator werden im folgenden

vernachlässigt (**verlustlose Leitung**). Weiter sollen Induktivitäts- und Kapazitätsbelag längs der Leitung zunächst konstant sein (**homogene Leitung**). Wir können die Leitung als eine Kette von L - C -Schaltungen mathematisch analysieren, indem wir kleine Induktivitätselemente $dL = L' dz$ in Reihe und kleine Kapazitäten $dC = C' dz$ parallel schalten. Dabei ist dz ein **Längenelement** der Leitung (gemessen in m) und z die Längskoordinate längs der Leitungsachse.

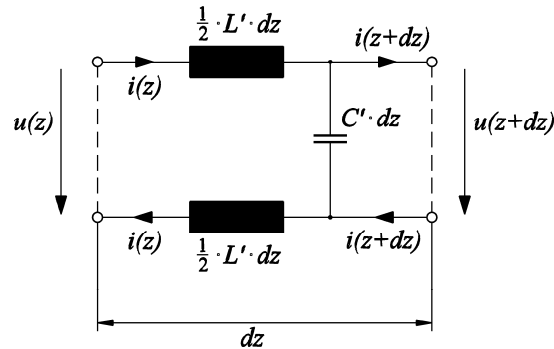


Bild 5.3.1-1: Eine „Elementarzelle“ einer (verlustlosen) elektrischen Leitung enthält Induktivitäts- und Kapazitätsabschnitte

Betrachten wir, was an zwei benachbarten Punkten der Übertragungsleitung im Abstand z und $z + dz$ von ihrem Anfang passiert. Nennen wir den Spannungsunterschied zwischen den beiden Leitern $u(z)$ und den Strom im Hin-Leiter $i(z)$, (Bild 5.3.1-1). Ändern sich der Strom und die Spannung in der Leitung mit der Zeit t , so hängen folglich Strom und Spannung sowohl vom Ort z als auch von der Zeit t ab: $u = u(z,t)$, $i = i(z,t)$. Die *Kirchhoff*'sche Knoten- und Maschengleichung, angewendet auf die "Elementarzelle" der Leitung längs der Länge dz , führt auf

$$u(z,t) = L' dz \frac{di(z,t)}{dt} - \frac{1}{C' dz} \int_0^t [i(z+dz,t) - i(z,t)] \cdot dt \quad (5.3.1-3)$$

und

$$u(z+dz,t) - u(z,t) = -L' dz \frac{di(z,t)}{dt} \quad (5.3.1-4)$$

Wird (5.3.1-3) nach der Zeit differenziert, so erhalten wir

$$\frac{du(z,t)}{dt} = L' dz \frac{d^2 i(z,t)}{dt^2} - \frac{1}{C'} \cdot \frac{i(z+dz,t) - i(z,t)}{dz} \quad (5.3.1-5)$$

Für den **Grenzübergang** $dz \rightarrow 0$ verschwindet der erste Term der rechten Seite, während der zweite die Ableitung di/dz darstellt.

$$\frac{du(z,t)}{dt} = -\frac{1}{C'} \cdot \frac{di(z,t)}{dz} \quad (5.3.1-6)$$

Aus (5.3.1-4) folgt nach Division durch dz

$$\frac{u(z+dz,t) - u(z,t)}{dz} = -L' \cdot \frac{di(z,t)}{dt} \quad (5.3.1-7)$$

und daraus wieder für den **Grenzübergang** $dz \rightarrow 0$

$$\frac{du(z,t)}{dz} = -L' \cdot \frac{di(z,t)}{dt} \quad (5.3.1-8)$$

Die Gleichungen (5.3.1-6) und (5.3.1-8) sind die Grundgleichungen einer verlustlosen Übertragungsleitung. Um anzudeuten, dass u und i von ZWEI Variablen (z, t) abhängen, aber nur jeweils nach EINER variablen differenziert werden, werden diese „**partiellen Ableitungen**“ statt mit $d \cdot / dt$ mit $\partial \cdot / \partial t$ geschrieben. Die Grundgleichungen (5.3.1-6a) und (5.3.1-8a) sind **partielle Differentialgleichungen**.

$$\frac{\partial u(z,t)}{\partial t} = -\frac{1}{C'} \cdot \frac{\partial i(z,t)}{\partial z} \quad (5.3.1-6a)$$

$$\frac{\partial u(z,t)}{\partial z} = -L' \cdot \frac{\partial i(z,t)}{\partial t} \quad (5.3.1-8a)$$

Differenziert man in (5.3.1-6) nach der Zeit t , in (5.3.1-8) nach dem Ort z , so kann man $i(z,t)$ eliminieren und erhält nur noch eine Differentialgleichung für $u(z,t)$:

$$\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2} = -\frac{1}{C'} \cdot \frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z \cdot \partial t}, \quad \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} = -L' \cdot \frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t \cdot \partial z} \Rightarrow \underline{\underline{\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} = L' C' \cdot \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2}}} \quad (5.3.1-9)$$

Hätte man umgekehrt in (5.3.1-6) nach z , in (5.3.1-8) nach t differenziert, so kann man $u(z,t)$ eliminieren und erhält **DIESELBE Differentialgleichung** für $i(z,t)$:

$$\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t \cdot \partial z} = -\frac{1}{C'} \cdot \frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z \cdot \partial t} = -L' \cdot \frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t^2} \Rightarrow \underline{\underline{\frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z^2} = L' C' \cdot \frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t^2}}} \quad (5.3.1-10)$$

Die lineare, **partielle** Differentialgleichung (5.3.1-9), (5.3.1-10) heißt **eindimensionale Wellengleichung**, da räumlich nur eine Dimension (die Wegkoordinate z längs der Leitung) vorkommt. Die Lösung dieser „**partiellen**“ (= Ableitung partiell nach z und t) Differentialgleichung ist eine **Welle** (= eine Funktion, die sich räumlich UND zeitlich ändert).

Fazit:

Für die gleichförmige (homogene) Übertragungsleitung breitet sich die Spannung u (und der Strom i) entlang der Leitung als Welle aus.

Die allgemeine *Lösungsfunktion* der Spannung bzw. des Stroms entlang der Leitung hat die Form (A, B, v : Konstante) einer Überlagerung von zwei **Wanderwellen** f und g

$$u(z,t) = A \cdot f(z - v \cdot t) + B \cdot g(z + v \cdot t) \quad (5.3.1-11)$$

$$\text{Mit } \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = f''(z - v \cdot t), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 f''(z - v \cdot t), \quad \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = g''(z + v \cdot t), \quad \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = v^2 g''(z + v \cdot t)$$

folgt, eingesetzt in (5.3.1-9):

$$A \cdot f'' + B \cdot g'' = L' C' v^2 \cdot (A \cdot f'' + B \cdot g'') \quad (5.3.1-12)$$

Diese Gleichung ist nur erfüllt, wenn die Geschwindigkeit v der Wanderwellen

$$v = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} \quad (5.3.1-13)$$

ist.

c) *Veranschaulichung der Lösung der Wellengleichung*

Wenn $f(\alpha)$ eine beliebige Funktion ist, wobei $\alpha = z - v \cdot t$ ist, so bleibt der Funktionswert (Ordinatenwert) $f(\alpha)$ UNVERÄNDERT, wenn

$$\alpha = z - v \cdot t = \text{konst.} \quad (5.3.1-14)$$

ist. Nehmen wir z. B. als Funktion $f(z - vt)$ die Cosinus-Funktion $\cos(z - vt)$ und stellen sie für die beiden Zeitpunkte $t = 0$ und $t = t_1$ als Funktion des Ortes z dar (Bild 5.3.1-2).

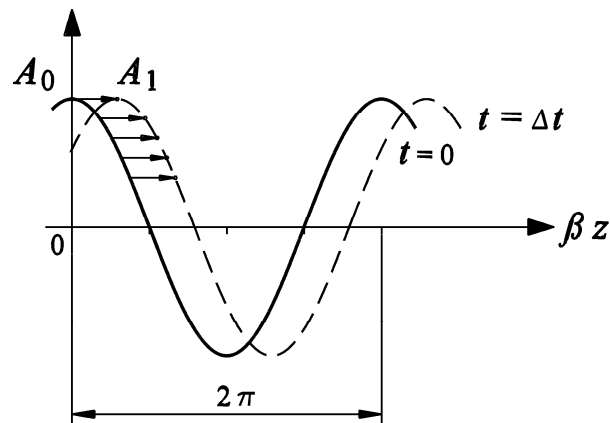


Bild 5.3.1-2: Eine Cosinus-Welle wandert mit der Geschwindigkeit v von der Lage A_0 in die Lage A_1 (Anmerkung: $\beta = 2\pi/\lambda$, λ : Wellenlänge)

Irgendein Punkt auf der Kurve $t = 0$ (Ausgangslage A_0) bewegt sich unter Beibehaltung seines Ordinatenwerts innerhalb der Zeit t_1 um das Weegelement Δz nach rechts (Lage A_1). Das Gleichbleiben des Ordinatenwerts bedeutet, dass auch das Argument α der Cosinus-Funktion sich nicht ändert: $\alpha = \text{konst} = K$. Differenziert man nun (5.3.1-14) nach der Zeit t , so erkennt man, dass v die **Geschwindigkeit** darstellt, mit der sich die Funktion f in z -Richtung von der Lage A_0 in die Lage A_1 bewegt.

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{dz}{dt} - v \cdot \frac{dt}{dt} = \frac{dz}{dt} - v \cdot 1 = \frac{dK}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dz}{dt} = v_z = v \quad (5.3.1-15)$$

Somit bewegen sich alle Punkte auf der Cosinuskurve unter Beibehaltung ihrer Phase mit konstanter Geschwindigkeit v (5.3.1-16) von links nach rechts. Der gesamte Kurvenzug bewegt sich – OHNE seine Form zu verändern – mit dieser Geschwindigkeit. Man nennt v die **Ausbreitungs-** oder **Phasengeschwindigkeit** der Welle.

$$v = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} \quad (5.3.1-16)$$

Setzt man in $f(z - vt)$ statt $z - vt$ das Argument $z + vt$, so erhält man analog zu (5.3.1-15)

$$\frac{dz}{dt} = v_z = -v = -\frac{1}{\sqrt{L'C'}} \quad (5.3.1-17)$$

also eine Welle, die von rechts nach links wandert (**gegenläufige Welle**). Beide Wellenarten sind gemäß (5.3.1-13) Lösung der Wellengleichung. Während man eine Welle mit beliebiger Form (Funktion) $f(z - vt)$ eine "**Wanderwelle**" nennt, entspricht eine Welle mit einer **periodischen** Funktion $f(z - vt)$, wie z. B. der Cosinus-Funktion in Bild 5.3.1-2 mehr unseren Vorstellungen einer Welle. Den räumlichen Abstand z.B. zwischen den Maxima der Cosinus-Funktion nennt man dann die **Wellenlänge** λ . An einem festen Ort z_0 ändert sich die Funktion zeitlich periodisch mit $\cos(z_0 - vt)$. Die Welle wandert um eine Wellenlänge weiter in der Zeit

$$T = \frac{\lambda}{v} \quad (5.3.1-18)$$

Während dieser Zeit hat am Ort z_0 die Funktion $\cos(z_0 - vt)$ eine volle Schwingung durchgeführt. Daher ist die zeitliche Schwingfrequenz f der Welle an festen Orten z_0

$$f = \frac{1}{T} = \frac{v}{\lambda} \Rightarrow v = f \cdot \lambda \quad (5.3.1-19)$$

Da Licht eine Form elektromagnetischer Wellen ist, stellt die Geschwindigkeit $v = \frac{1}{\sqrt{L'C'}}$ die

Lichtgeschwindigkeit der Welle auf der Leitung dar. In Bild 5.3.1-2 ist die Wanderwelle in der häufig anzutreffenden Schreibweise

$$\cos(\beta(z - vt)) = \cos(2\pi z / \lambda - 2\pi v / \lambda \cdot t) = \cos(2\pi z / \lambda - 2\pi f \cdot t)$$

dargestellt. Einer Wellenlänge λ entspricht dadurch die Zahl 2π .

Beispiel 5.3.1-1:

Zweidraht-Leitung aus parallelen zylindrischen Leitern (Leiterraßenradius R), Mittenabstand der parallelen Leiterachsen $2a$. Die Leiter seien dünn: $R \ll 2a$. Beide Leiter bilden einen Zylinderkondensator mit dem Kapazitätsbelag C' und eine Leiterschleife mit dem Induktivitätsbelag L' (siehe: Vorlesung "Grundlagen der Elektrotechnik"):

$$C' \cong \frac{\pi \cdot \epsilon_0}{\ln\left(\frac{2a}{R}\right)}, \quad L' \cong \frac{\mu_0}{\pi} \cdot \ln\left(\frac{2a}{R}\right) \quad (5.3.1-20)$$

Daraus ergibt sich für die Wellen-Geschwindigkeit die **Vakuum-Lichtgeschwindigkeit** ($\epsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12} \text{ As/(Vm)}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/(Am)}$):

$$v = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 2.99793 \cdot 10^8 \text{ m/s} = c_0 \quad (5.3.1-21)$$

Für Kupfer-Zweidraht-Leitungen und Koaxial-Kabeln mit PVC-Isolation ist wegen $\epsilon_r \approx 4$ die Geschwindigkeit kleiner: $v \approx c_0 / 2$.

5.3.2 Wellenwiderstand, Reflexion und Brechung

Bei Einkopplung eines hochfrequenten elektromagnetischen Feldes in einer Leitung pflanzt sich eine Spannungswelle (5.3.1-20) in Drahtrichtung z fort, deren Frequenz f und Wellenlänge λ mit denen des eingekoppelten elektromagnetischen Feldes übereinstimmt. Der Spannung $u(z)$ zwischen den Drähten entspricht eine Ladungsverteilung $Q(z)$ längs der Drähte, deren Verschiebung einen sich wellenförmig ausbreitenden Strom $i(z)$ durch die Drähte liefert. Setzt man die Spannungswelle $u(z, t) = \hat{U} \cdot \cos(z - vt)$ in (5.3.1-8) ein, so erhält man für die Stromwelle

$$\begin{aligned} \frac{du(z, t)}{dz} &= -L' \cdot \frac{di(z, t)}{dt} \Rightarrow -\hat{U} \cdot \sin(z - vt) = -L' \cdot \frac{di(z, t)}{dt} \Rightarrow \\ \Rightarrow i(z, t) &= \frac{\hat{U}}{L'} \int \sin(z - vt) dt = \frac{\hat{U}}{L' \cdot v} \cdot \cos(z - vt) = \hat{I} \cdot \cos(z - vt) \end{aligned} \quad (5.3.2-1a)$$

Zwischen der Amplitude von Strom- und Spannungswelle (und damit allgemein zwischen u und i) steht als Proportionalitätsfaktor der so genannte **Wellenwiderstand** UNABHÄNGIG vom Ort z auf der Leitung:

$$Z_0 = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = L' \cdot v = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \quad (5.3.2-2)$$

Für eine zurücklaufende Spannungswelle erhalten wir für die zugehörige Stromwelle

$$i(z, t) = -\frac{\hat{U}}{L' \cdot v} \cdot \cos(z + vt) = -\hat{I} \cdot \cos(z + vt) \quad ; \quad (5.3.2-1b).$$

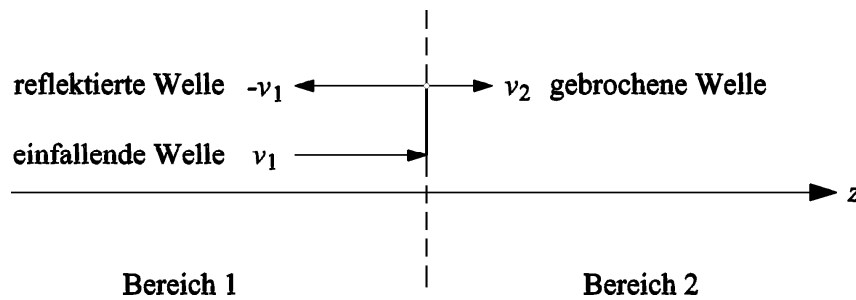
es **ändert sich somit das Vorzeichen** des Stroms. Wird für die vorlaufende Wellen $u_V = Z_0 i_V$ geschrieben, so gilt für die zurücklaufenden Wellen sinngemäß $u_R = -Z_0 i_R$.

Beispiel 5.3.2-1:

Im Praktikum wird eine Zwei-Drahtleitung mit parallelen zylindrischen Leitern (Leiterraßenradius $R = 3.5$ mm, Mittenabstand der parallelen Leiterachsen $2a = 26$ mm) verwendet. Die Leiter sind hohl mit dünner Wandstärke $d \ll R$. Die Leiter sind dünn: $R \ll 2a$: $3.5 \ll 26$!

Aus (5.3.1-20) ergibt sich rechnerisch der Wellenwiderstand 240 Ohm. Die Angabe im Datenblatt lautet 200 Ohm.

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cdot \frac{\ln\left(\frac{2a}{R}\right)}{\pi} = 240 \text{ Ohm.}$$

Bild 5.3.2-1: Brechung und Reflexion einer Wanderwelle an der Stelle $z = l$

Tritt an der Stelle $z = l$ eine **Änderung** des Wellenwiderstands (von $Z_{0,1}$ auf $Z_{0,2}$) durch eine Änderung des Induktivitäts- und/oder Kapazitätsbelags, also eine **Inhomogenität** auf, so erfolgt dort eine **Reflexion und Brechung der Welle**. Der reflektierte Wellenanteil u_r läuft von der Stelle $z = l$ mit derselben Geschwindigkeit v_1 in dem Bereich 1 ($z < l$) zurück, stellt also eine Welle mit negativer Wellengeschwindigkeit dar, deren Größe an der Stelle $z = l$ durch den **Reflexionsfaktor** r bestimmt ist. Der gebrochene Wellenanteil u_b läuft nach der Inhomogenitäts-Stelle $z = l$ weiter in die Richtung der ursprünglichen Wellenausbreitung (Bereich 2: $z > l$), aber mit geänderter Geschwindigkeit v_2 , da ja Induktivitäts- und/oder Kapazitätsbelags sich geändert haben. Die Größe der gebrochenen Welle an der Stelle $z = l$ wird durch den **Brechungsfaktor** b bestimmt.

Beispiel 5.3.2-2:

Das **Ende der Leitung** ("offenes Leitungsende") $z = l$ ist eine Inhomogenität, da der Wellenwiderstand von $Z_{0,1}$ auf $Z_{0,2} = \infty$ "springt". Vorlaufende und reflektierte Spannungswelle u und u_r haben gleiches Vorzeichen und sind bei $z = l$ gleich groß:

$$u_r(z = l, t) = r \cdot u(z = l, t) \rightarrow r = 1. \text{ Der Reflexionsfaktor ist Eins.}$$

Vorlaufende und reflektierte Stromwelle i und i_r haben gemäß (5.3.2-1 a, b) **entgegengesetztes** Vorzeichen. Die Stromsumme bei $z = l$ ergibt sich in physikalisch richtiger Weise zu Null:

$$i(z, t) = u(z, t) / Z_{0,1}, i_r(z, t) = -u_r(z, t) / Z_{0,1} \rightarrow i(l, t) + i_r(l, t) = (1 - r) / Z_{0,1} = 0.$$

Fazit:

Zwischen Strom- und Spannungswellen $i(z, t)$ und $u(z, t)$ auf einer Leitung ist der Wellenwiderstand Z_0 der Proportionalitätsfaktor: $u = Z_0 \cdot i$. An einer Inhomogenität der Leitung (= Änderung des Wellenwiderstands von $Z_{0,1}$ auf $Z_{0,2}$), die die Leitung in die Bereiche 1 und 2 teilt, werden vorlaufende Spannungs- und Stromwellen u und i reflektiert und gebrochen. Es gilt:

$$u = Z_{0,1} \cdot i, u_r = -Z_{0,1} \cdot i_r, u_b = Z_{0,2} \cdot i_b. \quad (5.3.2-3)$$

Im **Bereich 1** ($z < l$) setzt sich die Welle aus der ursprünglichen vorlaufenden Welle und der reflektierten (zurücklaufenden) Welle zusammen, im **Bereich 2** ($z > l$) ist nur die gebrochene Welle vorhanden.

Bereich 1:

$$u_1(z, t) = u(z - v_1 t) + u_r(z + v_1 t)$$

$$i_1(z, t) = [u(z - v_1 t) - u_r(z + v_1 t)] / Z_{0,1}$$

Bereich 2:

$$u_2(z, t) = u_b(z - v_2 t) \quad (5.3.2-4)$$

$$i_2(z, t) = u_b(z - v_2 t) / Z_{0,2} \quad (5.3.2-5)$$

An der Stelle $z = l$ müssen Strom und Spannung **stetig** sein: $u_1(l,t) = u_2(l,t)$, $i_1(l,t) = i_2(l,t)$, da die Energie in Kapazitäts- und Induktivitätsbelag ($W'_C = C'u^2/2$, $W'_L = L'i^2/2$) sich nicht "sprungartig" ändern können.

$z = l$:

$$u(l - v_1t) + u_r(l + v_1t) = u_b(l - v_2t) \quad (5.3.2-6)$$

$$[u(l - v_1t) - u_r(l + v_1t)] / Z_{0,1} = u_b(l - v_2t) / Z_{0,2} \quad (5.3.2-7)$$

Wird $u_r(l + v_1t)$ aus (5.3.2-6) in (5.3.2-7) eingesetzt, erhalten wir u_b in Abhängigkeit von u .

$$u_b(l - v_2t) = \frac{2Z_{0,2}}{Z_{0,2} + Z_{0,1}} \cdot u(l - v_1t) = b \cdot u(l - v_1t) \quad (5.3.2-8)$$

Den Faktor b nennt man **Brechungsfaktor**.

$$b = \frac{2Z_{0,2}}{Z_{0,2} + Z_{0,1}} \quad (5.3.2-9)$$

Wird $u_b(l - v_2t)$ aus (5.3.2-6) in (5.3.2-7) eingesetzt, erhalten wir u_r in Abhängigkeit von u .

$$u_r(l + v_1t) = \frac{Z_{0,2} - Z_{0,1}}{Z_{0,2} + Z_{0,1}} \cdot u(l - v_1t) = r \cdot u(l - v_1t) \quad (5.3.2-10)$$

Den Faktor r nennt man **Reflexionsfaktor**. Durch Vergleich mit (5.3.2-9) stellt man fest, dass $r = b - 1$ ist.

$$r = \frac{Z_{0,2} - Z_{0,1}}{Z_{0,2} + Z_{0,1}} = b - 1 \quad (5.3.2-11)$$

Der Reflexionsfaktor variiert abhängig vom Verhältnis $Z_{0,2}/Z_{0,1}$ zwischen $-1 \leq r \leq 1$.

Beispiel 5.3.2-3:

Wenn die beiden Drahtenden einer Zwei-Draht-Leitung an der Stelle $z = l$ **kurzgeschlossen** sind, sinkt der Wellenwiderstand $Z_{0,2}$ auf Null, daher ist $r = -1$ und $b = 0$. Es tritt **keine** gebrochene Welle auf.

5.3.3 Einschwingvorgänge auf der Leitung

Die (verlustlose) Leitung ist gemäß Abschnitt 5.3.1 als Kettenleiter von L - und C -Abschnitten darstellbar und daher eine Serienschaltung verlustloser L - C -Schwingkreise. Wie beim Schwingkreis tritt auch bei der Leitung folglich ein **Einschwingverhalten** nach dem Einschalten auf (Bild 5.3.3.-1).

(1): Wird z. B. Gleichspannung der Größe U aus einer idealen Spannungsquelle (Innenwiderstand R_i ist Null !) an die Klemmen einer an den Enden offenen Zweidrahtleitung geschaltet, so läuft die Spannungswelle mit der Amplitude U von den Klemmen ($z = 0$) zum Leitungsende ($z = l$) in der Zeit $t_p = l/v$. Dort tritt Spannungs-Reflexion mit $r = 1$ auf. Gemäß

(5.3.2-6), (5.3.2-10) verdoppelt sich die resultierende Spannung am Leitungsende auf den Wert $2U$:

$$u_{res}(z=l) = u + u_r = u + r \cdot u = U + r \cdot U = U + U = 2U$$

(2): Die reflektierte Welle läuft in der Zeit t_p zum Leitungsanfang zurück. Am Leitungsende bleibt der resultierende Spannungswert $2U$ dadurch aufrecht. Wegen der am Leitungsanfang angeschlossenen Spannungsquelle mit $R_i = 0$ ist die Leitung für die Welle dort kurz geschlossen; es tritt Reflexion mit $r = -1$ auf. Die Wellenfront kehrt sich von U auf $-U$ um; die Spannung am Eingang sinkt auf $U - U = 0$:

$$u_{res}(z=0) = u + u_r = u + r \cdot u = U + r \cdot U = U - U = 0$$

(3): Die Welle läuft nun mit der Amplitude $-U$ zum Leitungsende in der Zeit t_p und wird dort wieder mit $r = 1$ reflektiert und läuft mit $-U$ zurück. Am Leitungsausgang entsteht durch diese Reflexion aus $-U$ der Wert $-2U$, da sich einfallende und reflektierte Welle überlagern. Diese Spannung ergibt mit der vorher noch vorhandenen Spannung $2U$ den resultierenden Wert Null: $-2U + 2U = 0$.

$$u_{res}(z=0) = u + u_r = u + r \cdot u = 2U + r \cdot 2U = -2U + 2U = 0$$

(4): Die mit $-U$ in der Zeit t_p zurücklaufende Welle wird am Eingang wegen $r = -1$ auf U reflektiert, so dass am Leitungsanfang die Spannung unverändert U ist. Die Spannungswelle läuft wie im Zeitabschnitt (1) mit der Amplitude U zum Leitungsende. Damit ist in der Zeit

$$T = 4t_p = 4 \cdot \frac{l}{v} = 4 \cdot l \cdot \sqrt{LC} = 4 \cdot \sqrt{L \cdot l \cdot C \cdot l} = 4 \cdot \sqrt{L \cdot C} \quad (5.3.3-1)$$

ein vollständiger Zyklus durchlaufen. Am Ausgang und Eingang der Leitung tritt eine "Rechteck"-Schwingung mit der Frequenz (Eigenfrequenz der Leitung)

$$f_d = \frac{1}{4\sqrt{LC}} \quad (5.3.3-2)$$

auf. Die Amplitude dieser Schwingung ist U , wobei am offenen Leitungsende eine Spannungsüberhöhung durch Reflexion als Verdopplung $2U$ auftritt.

Fazit:

Im Vergleich zum verlustlosen L - C -Serienschwingkreis ist die Eigenschwingung der Leitung (L - C -Kettenleiter) nicht mehr sinusförmig, sondern rechteckförmig. Die Eigenfrequenz ist nicht mehr $f_d = 1/(2\pi\sqrt{LC})$, sondern $f_d = 1/(4\sqrt{LC})$.

Bei der realen Leitung klingt die Eigenschwingung aus zwei Gründen ab:

- (1) Der Betrag des Reflexionsfaktors ist kleiner als 1, so dass durch fortgesetzte Reflexion die Amplitude der reflektierten Wellen abnimmt.
- (2) Die Leitung ist nicht verlustfrei, so dass während des Ausbreitungsvorgangs auf der Leitung deren Amplitude sinkt.

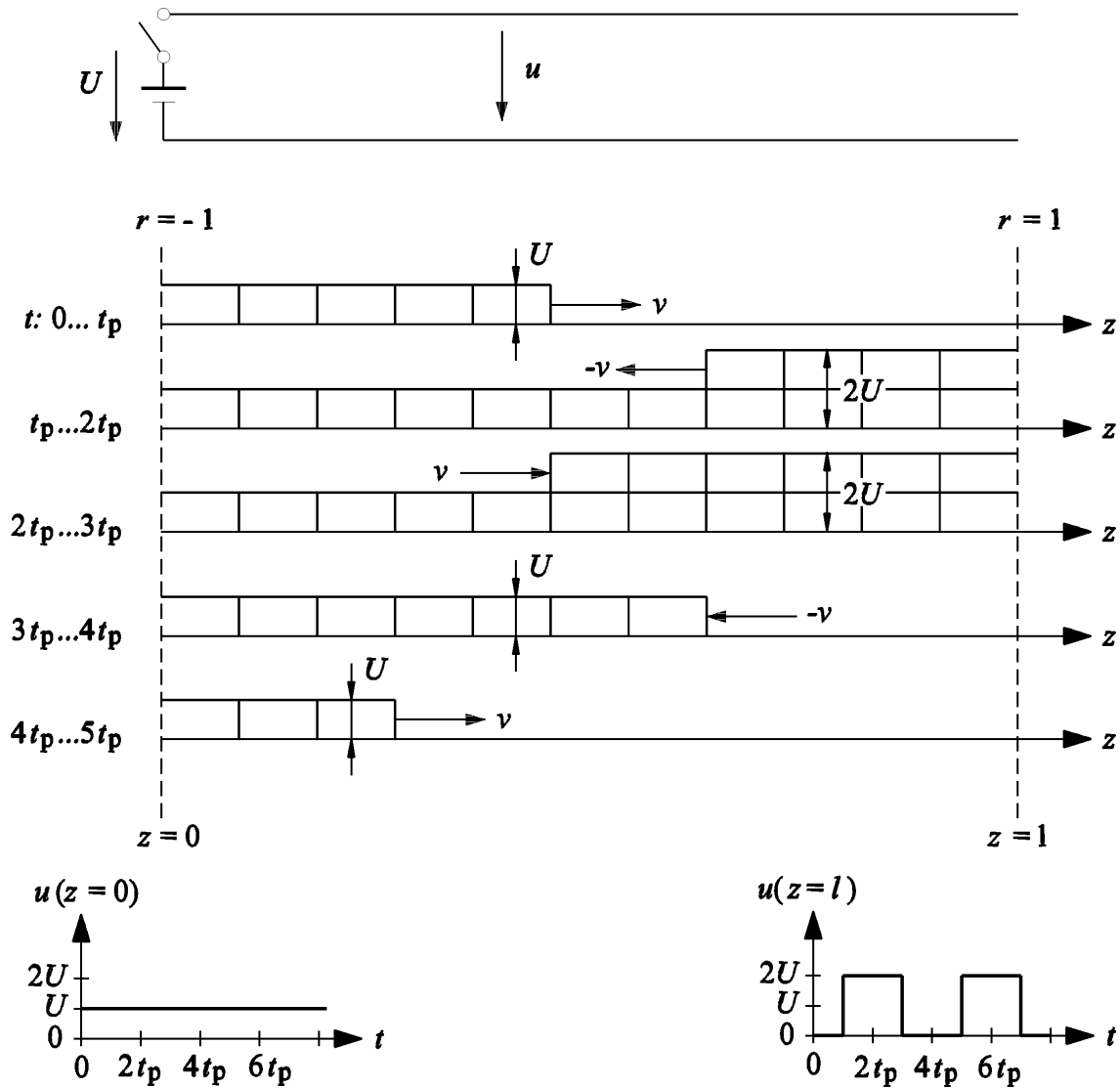


Bild 5.3.3-1: Einschwingvorgang auf einer verlustlosen, homogenen Leitung mit offenem Leitungsende
 Oben: Leitung, darunter: Wellenausbreitung, unten: Spannungszeitverlauf am Anfang und Ende der Leitung

5.3.4 Erzwungene Schwingungen und Wellen auf der Leitung – Stehende Wellen

a) *Physikalisches Phänomen und dessen Erklärung:*

Wird am Leitungsanfang eine Wechselspannung mit fester Amplitude \hat{U} und Frequenz f eingepreßt, so bildet sich nach dem Abklingen des Einschwingvorgangs auf der Leitung der "eingeschwungene" Zustand aus. Das sind **stehende Strom- und Spannungswellen**, die mit der Frequenz f pulsieren und deren Wellenlänge gemäß (5.3.1-19) bestimmt ist. Diese stehenden Wellen ändern die räumliche Lage der **Wellenknoten** und **Wellenbäuche** NICHT.

Wellenknoten: Die Größe (Elongation) von Strom bzw. Spannung ist Null: $i = 0$ bzw. $u = 0$.

Wellenbauch: Die Größe (Elongation) von Strom bzw. Spannung ist maximal.

Am Ort der Spannungsknoten sind Strombäuche, am Ort der Stromknoten treten Spannungsbäuche auf (**räumliche Phasenverschiebung zwischen $i(z)$ und $u(z)$ um eine Viertel-Wellenlänge**). Strom- und Spannungsschwingung sind auch **um eine Viertel-Schwingungs-**

periode phasenverschoben: Wenn die Spannungswelle sich mit maximalen Ausschlägen ausbildet, ist die Stromwelle in diesem Moment Null.

Die **stehende Wellen** entstehen durch die Überlagerung der einlaufenden (+z) und an den Leitungsenden reflektierten (-z) Strom- und Spannungswellen.

Beispiel 5.3.4-1:

Eine am Ende offene Leitung wird aus einer idealen Stromquelle am Eingang gespeist (Innenwiderstand der Stromquelle unendlich groß). So erhält man die "beidseitig offene" Leitung. Die Entstehung der stehenden Wellen aus der einlaufenden und reflektierten Welle ist in Bild 5.3.4-1 für unterschiedliche Zeitpunkte graphisch dargestellt. Die Speise-Frequenz f der Quelle ist so hoch gewählt, dass die Wellenlänge der stehenden Wellen genau die halbe Leitungslänge $l/2$ beträgt. Diese resultierende **stehende** Welle (fette Linie) verändert die Lage ihrer Schwingungsbäuche (B) und Knoten (K) nicht; sie pulsiert mit der Frequenz $f = 1/T$, wandert aber nicht.

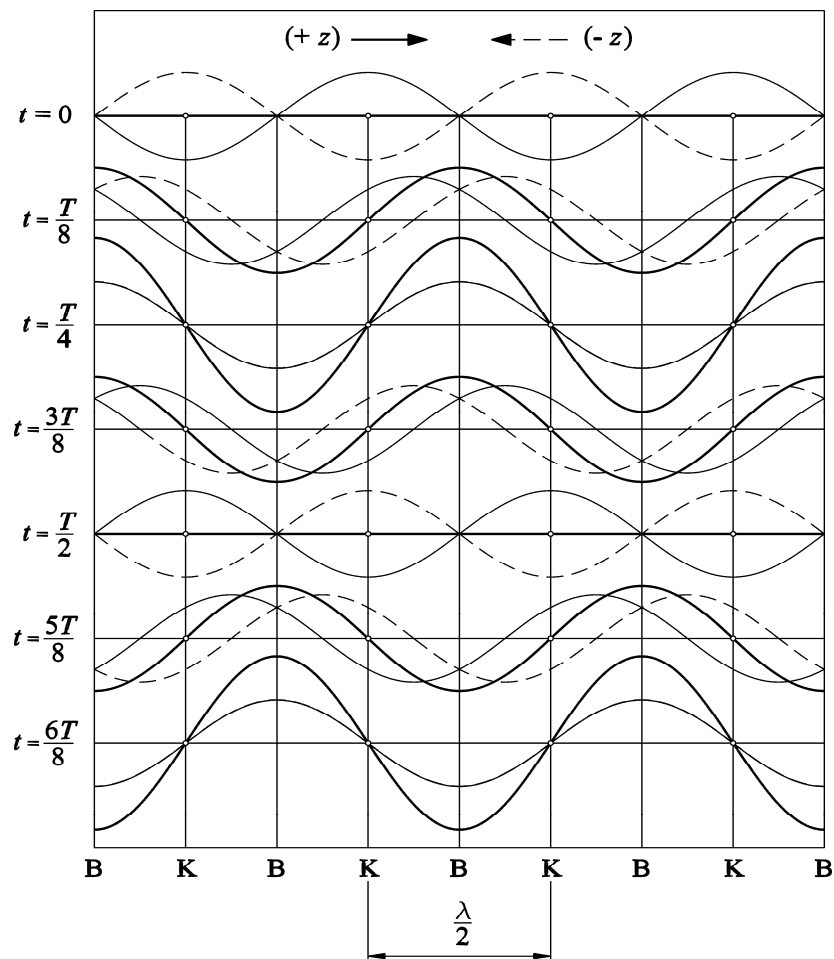


Bild 5.3.4-1: Entstehung einer stehenden Welle durch Überlagerung einer hin- und rücklaufenden Welle bei beidseitig offenen Leitungsenden

Fazit:

Werden zwei in entgegengesetzter Richtung laufende, sonst aber gleichartige Wellen überlagert, so entsteht eine stehende Welle. Der Abstand zweier Knoten ist gleich der halben Wellenlänge der fortschreitenden Welle.

Sind die Drahtenden jedoch durch einen *Ohm'schen* Widerstand verbunden, der dem Wellenwiderstand der Leitung entspricht ($Z = R = Z_0$), so tritt **keine** Inhomogenität auf, und es findet **keine** Reflexion statt. Es ist $r = 0$. Da keine zurücklaufende Welle entsteht, bildet sich **keine** stehende Wellen aus.

Fazit:

Bei Abschluss der Leitung mit dem Wellenwiderstand treten keine Reflexionen und keine stehenden Wellen auf.

Beispiel 5.3.4-2:

Im Praktikum ist die Zwei-Draht-Leitung $l = 88$ cm lang. Mit welcher Frequenz muss gespeist werden, damit sich an der am Ende offenen Leitung eine stehende Welle mit der Wellenlänge $\lambda = 4/5 \cdot l$ ausbildet?

Antwort:

Die Wellengeschwindigkeit ist gemäß (5.3.1-21) $v = c_0$ (Vakuum-Lichtgeschwindigkeit).

$$f = c_0 / \lambda = \frac{c_0}{\frac{4}{5}l} = \frac{2.9979 \cdot 10^8}{\frac{4}{5} \cdot 0.88} = 425.88 \cdot 10^6 \text{ Hz} = 425.88 \text{ MHz.}$$

Beispiel 5.3.4-3:

Wie lang muss die Zwei-Draht-Leitung sein, damit sich bei Speisung mit Netzfrequenz 50 Hz eine stehende Spannungswelle mit der Wellenlänge $\lambda = l$ ausbilden kann?

Antwort:

$$l = \lambda \Rightarrow l = c_0 / f = \frac{2.9979 \cdot 10^8}{50} = 5996 \cdot 10^3 \text{ m} \cong 6000 \text{ km (!)}$$

Fazit:

Die Wellennatur der Ausbreitung elektromagnetischer Signale ist erst bei hohen Frequenzen bzw. sehr großen Distanzen (= sehr großen Leitungslängen) bemerkbar.

Im Praktikum wird mit einem Hochfrequenz-Sender 433.93 MHz gearbeitet, der Wellen mit Wellenlängen im Dezimeter-Bereich erzeugt (bei Lichtgeschwindigkeit c_0 : $\lambda = 69$ cm).

b) Mathematisches Modell:

Bei zeitlich sinusförmiger Anregung (Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$) kann die Leitungsgleichung (5.3.1-9)

$$v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (5.3.4-1)$$

mit **komplexer Rechnung** gelöst werden:

$$u(z, t) = \hat{U} \cos(z - vt) = \hat{U} \cos(2\pi \cdot z / \lambda - \omega t) = \hat{U} \cos(\beta \cdot z - \omega t) = \text{Re} \left\{ \hat{U} e^{j(-\beta z + \omega t)} \right\}$$

$$\text{Re} \left\{ \hat{U} e^{j(-\beta z + \omega t)} \right\} = \text{Re} \left\{ \underline{U}(z) e^{j\omega t} \right\} \quad (5.3.4-2)$$

Einsetzen von $\underline{U}(z) \cdot \exp(j\omega t)$ in (5.3.4-1) ergibt

$$v^2 \frac{d^2 \underline{U}(z)}{dz^2} = (j\omega)^2 \underline{U}(z) \Rightarrow v^2 \frac{d^2 \underline{U}(z)}{dz^2} + \omega^2 \underline{U}(z) = 0 \quad (5.3.4-3)$$

Das ist eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten (komplexen) Koeffizienten für $\underline{U}(z)$, die mit dem Exponentialansatz mit (komplexen) Konstanten gelöst wird:

$$\underline{U}(z) = \underline{C}_1 e^{k_1 z} + \underline{C}_2 e^{k_2 z} \quad (5.3.4-4)$$

Wird allgemein e^{kz} in (5.3.4-3) eingesetzt, erhalten wir

$$v^2 \cdot \underline{k}^2 \cdot e^{kz} + \omega^2 \cdot e^{kz} = 0 \quad \text{bzw.}$$

$$\underline{k}^2 = -\frac{\omega^2}{v^2} = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \Rightarrow \underline{k}_{1,2} = \pm j \frac{2\pi}{\lambda} \quad (5.3.4-5)$$

und – eingesetzt in (5.3.4-4) - mit (5.3.4-2) die Lösung

$$u(z, t) = \text{Re} \left\{ \underline{C}_1 e^{j(2\pi z / \lambda + \omega t)} + \underline{C}_2 e^{j(-2\pi z / \lambda + \omega t)} \right\} \quad (5.3.4-6)$$

Die Lösung besteht aus einer **Überlagerung** einer vor- und einer zurücklaufenden Welle mit der Wellenlänge $\lambda = v / f$.

$$\text{Vorlaufende Welle:} \quad \text{Re} \left\{ \underline{C}_2 e^{j(-2\pi z / \lambda + \omega t)} \right\} \sim \cos(2\pi z / \lambda - \omega t)$$

$$\text{Zurücklaufende Welle:} \quad \text{Re} \left\{ \underline{C}_1 e^{j(2\pi z / \lambda + \omega t)} \right\} \sim \cos(2\pi z / \lambda + \omega t)$$

Mit (5.3.1-8) wird die zugehörige Lösung für den Strom $i(z, t) = \text{Re} \left\{ \underline{I}(z) e^{j\omega t} \right\}$ berechnet:

$$\frac{du(z, t)}{dz} = -L' \cdot \frac{di(z, t)}{dt} \Rightarrow \frac{d\underline{U}(z)}{dz} = -j\omega \cdot L' \cdot \underline{I}(z) \quad (5.3.4-9)$$

$$\underline{I}(z) = \frac{2\pi / \lambda}{\omega L'} \cdot \left(\underline{C}_1 e^{j(2\pi z / \lambda + \omega t)} - \underline{C}_2 e^{j(-2\pi z / \lambda + \omega t)} \right) \quad (5.3.4-10)$$

Der Ausdruck $\frac{2\pi / \lambda}{\omega L'} = \frac{1}{\lambda f L'} = \frac{1}{v L'} = \frac{\sqrt{L' C'}}{L'} = \sqrt{\frac{C'}{L'}} = \frac{1}{Z_0}$ zeigt wieder, dass zwischen Strom- und Spannungsamplitude der Wellenwiderstand als Proportionalitätsfaktor auftritt.

Beispiel 5.3.4-4:

Am Ende offene Zweidraht-Leitung bei $z = l$: $i(l) = 0$: $\underline{I}(l) = 0$

Am Leitungsanfang wird die Wechselspannung $u(z = 0, t) = \hat{U} \cos \omega t$ eingespeist: $\underline{U}(0) = \hat{U}$

Aus diesen Randbedingungen werden die Konstanten \underline{C}_1 , \underline{C}_2 bestimmt:

$$\underline{I}(l) = 0: \quad \underline{C}_1 e^{j2\pi l / \lambda} - \underline{C}_2 e^{j(-2\pi l / \lambda)} = 0 \quad (5.3.4-11)$$

$$\underline{U}(0) = \hat{U} : \quad \underline{C}_1 + \underline{C}_2 = \hat{U} \quad (5.3.4-12)$$

Aus diesem linearen Gleichungssystem können z. B. mit der *Cramer'schen* Regel die beiden Unbekannten \underline{C}_1 , \underline{C}_2 berechnet werden. Es folgt mit der Umformung $e^{ja} + e^{-ja} = 2 \cos a$

$$\underline{C}_1 = \hat{U} \cdot \frac{e^{-j \cdot 2\pi \cdot l / \lambda}}{2 \cdot \cos(2\pi \cdot l / \lambda)}, \quad \underline{C}_2 = \hat{U} \cdot \frac{e^{j \cdot 2\pi \cdot l / \lambda}}{2 \cdot \cos(2\pi \cdot l / \lambda)} \quad (5.3.4-13)$$

Einsetzen von \underline{C}_1 , \underline{C}_2 in (5.3.4-4) und (5.3.4-10) ergibt mit der Umformung $e^{ja} - e^{-ja} = 2j \sin a$ die Lösungen

$$\underline{U}(z) = \hat{U} \cdot \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot (z-l)\right)}{\cos\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right)}, \quad \underline{I}(z) = \frac{j}{Z_0} \hat{U} \cdot \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot (z-l)\right)}{\cos\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right)} \quad (5.3.4-14)$$

Mit (5.3.4-2) erhalten wir über die Realteilbildung die Lösungen **im Zeitbereich**

$$u(z, t) = \hat{U} \cdot \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot (z-l)\right)}{\cos\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right)} \cdot \cos \omega t \quad (5.3.4-15)$$

$$i(z, t) = -\frac{\hat{U}}{Z_0} \cdot \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot (z-l)\right)}{\cos\left(\frac{2\pi l}{\lambda}\right)} \cdot \sin \omega t \quad (5.3.4-16)$$

Die Lösungen (5.3.4-15), (5.3.4-16) zeigen:

- Es treten **KEINE** Wanderwellen $F(2\pi/\lambda - \omega t)$ auf, sondern **STEHENDE** Wellen,
- Strom und Spannung **pulsieren zeitlich** mit der Frequenz $f = \omega/(2\pi)$,
- Strom und Spannung sind räumlich um eine Viertel-Wellenlänge **verschoben**,
- Strom und Spannung schwingen **zeitlich um 90° phasenversetzt** (= eine Viertel-Schwingungsperiode $T/4$, $T = 1/f$).

Eigenschaften bei Niederfrequenz:

Bei sehr niedrigen Frequenzen wird wegen $v = c_0 = \lambda \cdot f$ die Wellenlänge sehr groß. Das Verhältnis $(z-l)/\lambda$ wird für $0 \leq z \leq l$ bei großen Wellenlängen sehr klein: $(z-l)/\lambda \rightarrow 0$.

Dann wird aus (5.3.4-15) $u(z, t) = \hat{U} \cdot \frac{\cos 0}{\cos 0} \cdot \cos \omega t = \hat{U} \cdot \cos \omega t$: Es ist keine Änderung von U

längs der Leitung feststellbar. **Das Wellenphänomen verschwindet.** Aus (5.3.4-16) wird

$i(z, t) = -\frac{\hat{U}}{Z_0} \cdot \frac{\sin 0}{\cos 0} \cdot \sin \omega t = 0$: Es kann wegen der am Ende offenen Leitung **kein Strom**

fließen.

In Bild 5.3.4-2 ist die Lösung graphisch für den Fall dargestellt, dass die speisende Frequenz so bemessen ist, dass die Wellenlänge λ der stehenden Welle $4/5$ der Leitungslänge l beträgt. Es sind die vier Zeitpunkte $t = 0, T/4, T/2$ und $3T/4$ dargestellt.

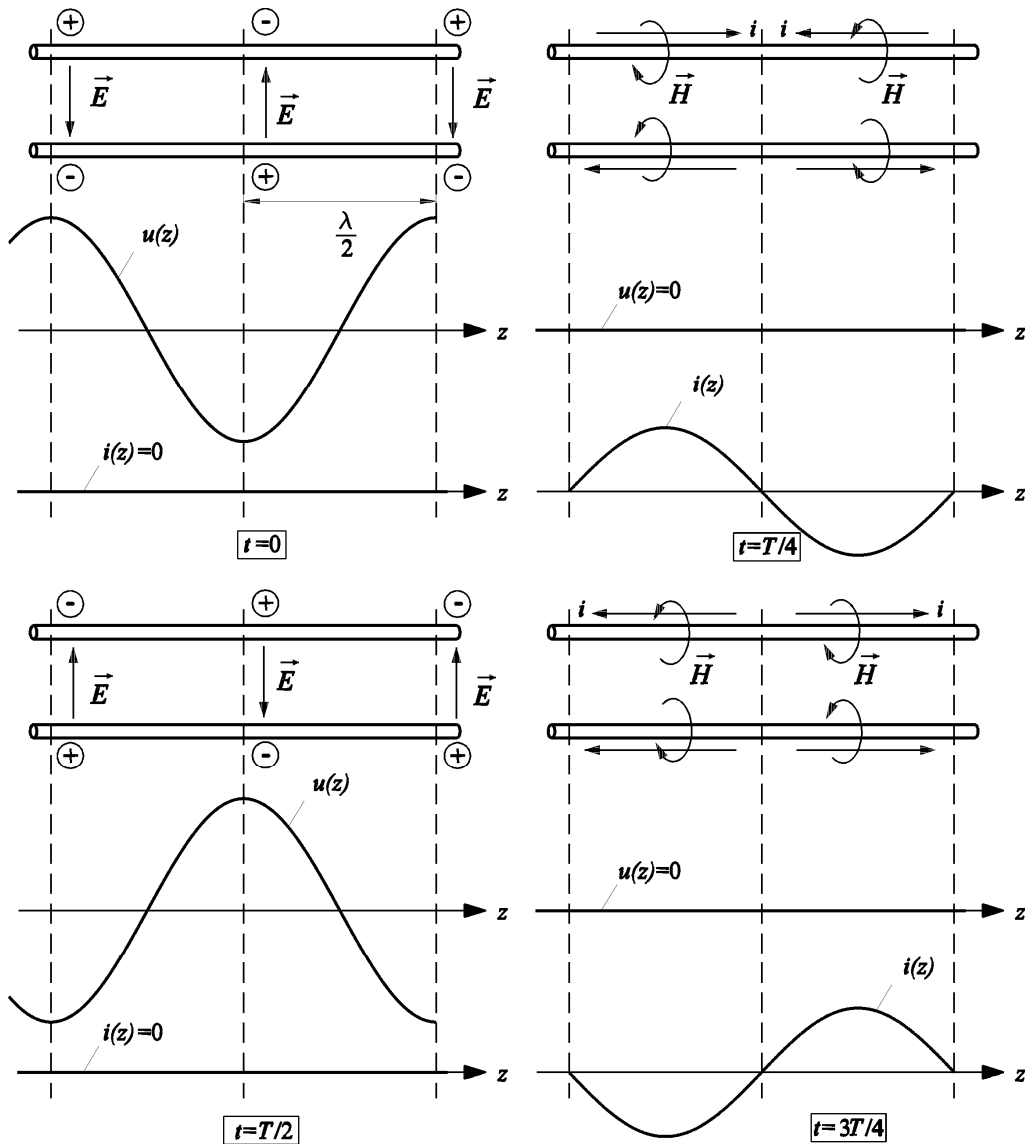


Bild 5.3.4-2: Stehende Strom-/Spannungswelle und zugehöriges elektrisches und magnetisches Feld E und H auf einer am Ende offenen Zweidraht-Leitung mit der Länge $l = 5/4 \lambda$ für die vier Zeitpunkte $t = 0, T/4, T/2$ und $3T/4$

Bei maximaler Spannungsamplitude (Zeitpunkte $t = 0, T/2$) ist das E -Feld zwischen den beiden Leitern voll ausgebildet und dort maximal, wo die Spannungswelle Bäuche hat (Sitz der positiven und negativen Ladungen), und dort Null, wo die stehende Spannungswelle Knoten hat. Der Strom ist in den beiden Leitern zu diesen Zeitpunkten Null. Zu den Zeiten $t = T/4$ und $3T/4$ ist die Spannung und damit des E -Feld Null. Von den Punkten maximalen Potentials (positiver Spannungsbauch) fließen die Ladungen als elektrischer Strom zu den Punkten minimalen Potentials (negativer Spannungsbauch) und erregen ein magnetisches H -Feld, das sich um die Leiter schließt.

5.3.5 Resonanz

Wie beim Reihen- oder Parallelschwingkreis tritt auch bei der Leitung Resonanz auf, wenn die Speisefrequenz f mit der Eigenfrequenz f_d der Leitung übereinstimmt.

$$f = f_d = \frac{1}{4 \cdot \sqrt{L' C'} \cdot l} = \frac{v}{4l} \quad (5.3.5-1)$$

Wird dies in (5.3.4-15), (5.3.4-16) eingesetzt, so wird deren Nenner Null, d.h. die Amplituden von Strom und Spannung werden theoretisch unendlich groß.

$$\cos(2\pi l / \lambda) = \cos(2\pi l / (v / f)) = \cos(2\pi l / (4l)) = \cos(\pi / 2) = 0 \quad (5.3.5-2)$$

Auf Grund der Verluste ist die Resonanzüberhöhung der Amplituden endlich groß. Aus (5.3.5-1,2) folgt, dass bei Resonanz die Bedingung

$$\frac{2\pi l}{\lambda} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow l = \lambda / 4 \quad (5.3.5-3)$$

erfüllt ist. Natürlich wird $\cos(2\pi l / \lambda) = 0$ auch bei $l = \lambda / 4, 3\lambda / 4, 5\lambda / 4, \dots$, so dass auch bei kürzeren Wellenlängen und entsprechend höheren Frequenzen Resonanz gegeben ist. Im Praktikum wird die Frequenz so gewählt, dass die stehende Welle sich entsprechend $l = 5\lambda / 4$ ausbildet.

5.3.6 Lecher-Leitung

Eine Zwei-Draht-Leitung aus parallelen Hin- und Rückleiter nennt man *Lecher-Leitung*. Als Isolator fungiert die Luft zwischen den beiden Leitern. Aus berechnetem Induktivitäts- und Kapazitätsbelag ergibt sich als Ausbreitungsgeschwindigkeit etwa die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.

Mit Hilfe eines **Spannungsmessers** (hochohmiger Eingang) kann man sehr einfach zwischen Hin- und Rückleiter die Spannung u in Abhängigkeit des Orts z und damit die Lage der Spannungsbäuche und -knoten messen, indem man an die Ausgangsklemmen des Spannungsmessers entweder eine Anzeige oder eine Glühlampe anbringt. Setzt man eine **Induktionsschleife** in die Nähe der Leitung (ohne die Leitung zu berühren), so induziert das vom Strom i erregte H -Feld in die Schleife eine Spannung. Bei niederohmigem Abschluss der Schleife (Glühlampe) ist der in der Schleife fließende Strom direkt proportional dem Strom i , so dass die Lage der Bäuche und Knoten der stehenden Stromwelle z. B. über die Helligkeit der Glühlampe gemessen werden kann. Die **Helligkeit** ist zur Verlustleistung in der Glühlampe $p = i^2 R$ bzw. $p = u^2 / R$ direkt proportional. Die Maxima der Helligkeit treten somit beim Strom- bzw. Spannungsbauch auf.

Bei offenen Leitungsenden werden **im Praktikumsversuch** mit der Glühlampe bzw. einem Spannungsmesser die Lage der Spannungsbäuche (Glühlampe leuchtet maximal) und -knoten (Glühlampe bleibt dunkel) ermittelt. Anschließend wird dies mit der Induktionsschleife und angeschlossener Glühlampe wiederholt, um die Lage der Bäuche und Knoten des Stroms zu messen. Bäuche und Knoten von Strom und Spannung sind um einen Viertel-Wellenlänge

zueinander verschoben. Am offenen Ende ist z. B. die Spannung maximal, der Strom aber Null.

Biegt man eine Zweidrahtleitung zu einer flachen dipolartigen Schleife (**Schleifendipol**), so hat diese bei gleichem Drahtdurchmesser und Drahtabstand als Eingangswiderstand denselben Wellenwiderstand wie die *Lecher*-Leitung. Mit diesem Schleifendipol kann die *Lecher*-Leitung **reflexionsfrei** abgeschlossen werden. Im Versuch werden zum Nachweis der reflexionsfreien Ausbreitung auf der *Lecher*-Leitung mit Schleifendipol nacheinander ein Tastkopf mit Glühlampe und eine Induktionsschleife mit Glühlampe in festem Abstand über die *Lecher*-Leitung geführt. Beide Glühlampen **leuchten gleichmäßig**, d.h. es gibt keine ausgeprägten Spannungs- oder Strommaxima auf der *Lecher*-Leitung.

5.4 Einfache Dipolantennen

5.4.1 Ultrahochfrequente (UHF) elektromagnetische Schwingungen

Durch weitgehende Verkleinerung der Kapazität C und Induktivität L eines Schwingkreises nach Bild 5.4.1-1 erhalten wir einen Schwingkreis **extrem hoher Eigenfrequenz**.

$$f_d = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (5.4.1-1)$$

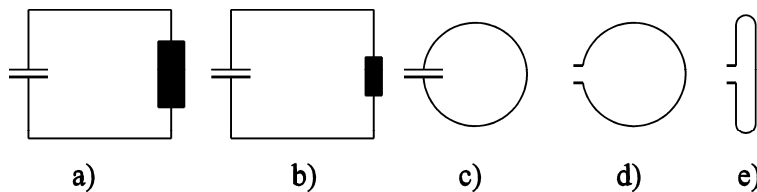


Bild 5.4.1-1: Erzeugung eines UHF-Schwingkreises für sehr hohe Eigenfrequenz

Wir verkleinern zuerst die Windungszahl der Spule auf wenige Windungen (a-c) und wählen einen Kondensator sehr kleiner Kapazität (d). Wir lassen nun alle Windungen der Spule weg, es verbleibt nur mehr ein Metallbügel (e), der die beiden Kondensatorplatten verbindet. Dieser Bügel stellt eine Windung dar. Diese besitzt nur mehr eine sehr kleine Induktivität.

5.4.2 Der $\lambda/2$ -Dipol

Denken wir uns nach Bild 5.4.2-1 einen geschlossenen UHF-Schwingkreis auseinander gebogen (b-c), so sinkt die Kapazität des Kondensators wegen des steigenden Plattenabstands. Soll die Eigenfrequenz des Schwingkreises, also gemäß (5.4.1-1) das Produkt LC , erhalten bleiben, so können wir die Kapazitätseinbuße durch eine größere Induktivität wettmachen, indem wir den Draht des Bügels verlängern (d). Setzen wir diesen Vorgang kontinuierlich fort und lassen schließlich die Kapazität der Metallplatten an den Enden verkümmern, so gelangen wir zu einem gestreckten Leiter bestimmter Länge (e), den wir **Dipol** nennen, der wie der UHF-Schwingkreis zu elektromagnetischen Schwingungen fähig ist (**Stabdipol, Stabantenne**).

Wird der Stabdipol in der Mitte an eine Wechsel-Spannungsquelle angeschlossen, so fungiert jede Stabhälfte als Wellenleiter für Strom- und Spannungswelle mit offenem Ende. Durch

Reflexion an den Stabenden entstehen stehende Strom- und Spannungswellen. Maximale Strom- und Spannungs-Amplituden ergeben sich bei **Resonanz** ($f = f_d$), wenn also jede Stabhälfte die Länge $L = \lambda/4$ hat. Die gesamte Dipollänge ist somit $l = 2L = \lambda/2$ (" $\lambda/2$ -Dipol"). Wie bei der Zweidraht-Leitung kann entlang des Dipols Strom und Spannung **der stehenden Welle** gemessen werden. An den offenen Enden hat die Stromwelle Knoten (Null) und daher die Spannung je einen Bauch (maximal). An der mittigen Einspeisestelle befinden sich der Strombauch und der Spannungsknoten.

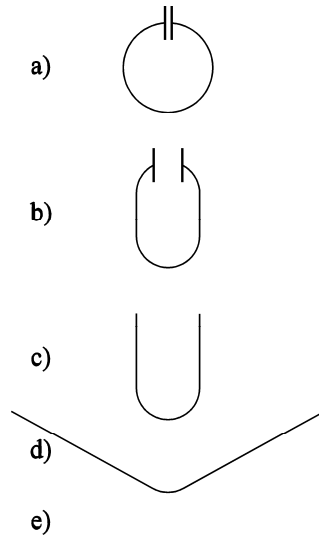


Bild 5.4.2-1: Entstehung eines $\lambda/2$ -Dipols aus einem UHF-Schwingkreis

a) *Stromverteilung im Dipol:*

Zu ihrer Untersuchung könnten wir an verschiedenen Stellen des Dipols Glühlämpchen einbauen (z. B. in Dipolmitte). Einfacher aber geht dies, indem wir nach Bild 5.4.2-2 das vom Dipolstrom verursachte Magnetfeld mit einer Induktionsschleife messen.

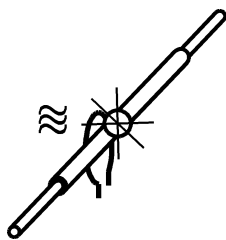


Bild 5.4.2-2: Messung des Dipolstroms
Entweder über eingebaute Glühlämpchen
oder eine Induktionsschleife

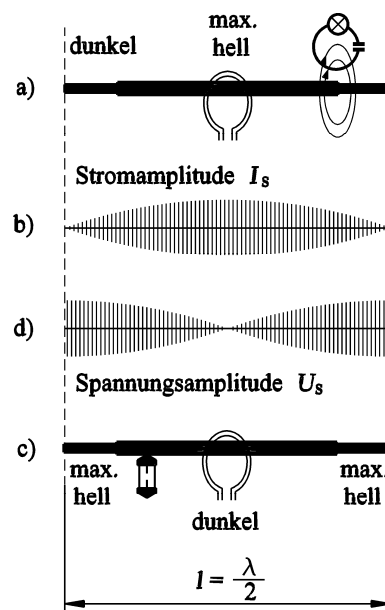


Bild 5.4.2-3: (a) Strom- und (d) Spannungsverteilung
der stehenden Welle an einem $\lambda/2$ -Dipol, (a) H -Feld und
Messschaltung mit UHF-Resonanzkreis für i , (c) Mess-
schaltung mit Glimmlampe für u

Wir speisen den Dipol mit einer UHF-Spannungsquelle mit der Frequenz f . Nach Bild 5.4.2-3a wird das vom Dipolstrom $i(z)$ verursachte Magnetfeld H mit einer Induktionsschleife und damit der Strom selbst gemessen. Ebenso kann ein UHF-Schwingkreis verwendet werden, dessen Eigenfrequenz $f_d = f$ ist (Resonanzabstimmung des UHF-Schwingkreises). Wo der Strom im Dipol stärker ist, ist er von einem stärkeren, ihn zylindrisch umkreisenden magnetischen Wechselfeld H umgeben. Wir müssen die Induktionsschleife so in die Nähe des Dipols halten, dass sie von den magnetischen Feldlinien durchsetzt wird. Das ist der Fall, wenn der Dipol in der von der Induktionsschleife aufgespannten Ebene liegt. In der Mitte des Dipols leuchtet die Glühlampe in der Induktionsschleife am stärksten, gegen seine Enden hin wird das Leuchten schwächer und hört am Dipolende völlig auf, dort fließt also kein Strom (Bild 5.4.2-3b).

b) Der Potentialverlauf im Dipol:

Den Potentialverlauf $u(z)$ im Dipol könnten wir durch Berühren mit einer kleinen, stabförmigen Glimmlampe, deren anderes Ende wir in der Hand halten (Bild 5.4.2-3c), prüfen. Dabei stellen wir als Messperson das Erdpotential dar, und das elektrische Potential der Spannungswelle treibt einen kleinen (ungefährlichen) Glimmstrom über die Messperson gegen Erde, welcher die Lampe zum Glimmen bringt. Bei kräftiger Spannung zündet die Glimmlampe, wenn wir das Dipolende berühren. Sollte dies nicht eintreten, so muss sie durch Berühren mit einem geriebenen Glasstab gezündet werden. An den Dipolenden wird eine hohe Wechselspannung gemessen. Bewegen wir die Glimmlampe gegen die Dipolmitte, so wird ihr Leuchten immer schwächer, bis sie schließlich erlischt. Gegen die Dipolmitte hin nimmt also die Spannungsamplitude ab (Verlauf der Spannungsamplitude nach Bild 5.4.2-3d).

Verlängert man gemäß Bild 5.4.2-4 den $\lambda/2$ -Dipol einseitig am unteren Dipolende um eine weitere $\lambda/2$ -Länge, so entsteht der λ -Dipol mit drei Stromknoten. Durch Falten des zweiten $\lambda/2$ -Teils und Verbinden mit dem oberen Dipolende entsteht der elektromagnetisch (nahezu) gleichwertige **Faltdipol (Schleifendipol)**. Da er den doppelten Strom (parallel) in beiden Leitern führt, hat er bei gleicher elektrischer Leistung etwa den vierfachen Eingangswiderstand Z wie der $\lambda/2$ -Dipol: $P = (2i)^2 Z_{\lambda/2} = i^2 Z_S$ $Z_S = 4Z_{\lambda/2}$. Dieser Wert ist etwa so groß wie jener der *Lecher*-Leitung. Am Schleifendipol kann die elektrische Spannungsverteilung mit zwei Spannungsabgriffen zwischen den beiden parallelen Drähten der Schleife gemessen werden (Praktikumsversuch!), wie bei der *Lecher*-Leitung.

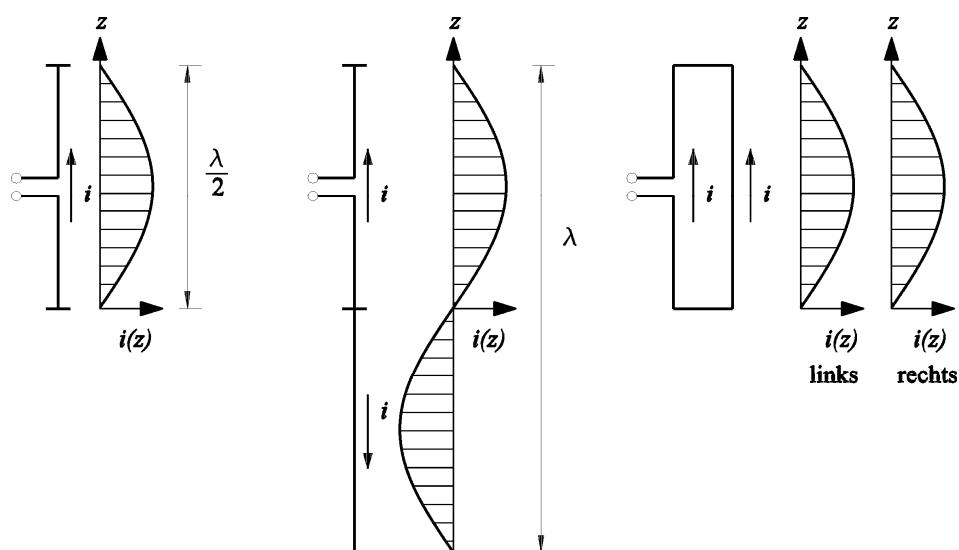


Bild 5.4.2-4: Gedankliche Entstehung des Schleifendipols

Hinweis:

Reale Dipole sind wegen der endlichen Drahtstärken der Schleifen bzw. Stäbe etwas kürzer als $\lambda/2$ ausgeführt.

Beispiel 5.4.2-1:

Frequenz $f = 433.92$ MHz \Rightarrow Wellenlänge: $\lambda = c_0 / f = 69.1$ cm

$\lambda/2$ -Dipol: Länge $l = \lambda/2 = 69.1/2 = 34.5$ cm theoretisch, wegen endlichem Durchmesser mit 7 mm aber nur 32 cm lang.

Schleifendipol: Soll er wie ein $\lambda/2$ -Dipol wirken, so muss seine Länge ebenfalls $l = \lambda/2 = 69.1/2 = 34.5$ cm sein, ausgeführt: 32 cm.

5.4.3 Das elektromagnetische Wellenfeld des $\lambda/2$ -Dipols

a) *Die elektrische Verschiebungsstromdichte:*

J. C. Maxwell zeigte, dass sowohl ein elektrischer Strom (Durchflutung) ein Magnetfeld erregt, als auch eine (rasche) Änderung der elektrischen Feldstärke. Der *Ampere'sche* Durchflutungssatz ist folglich zu erweitern, wobei C die Berandungskurve der Fläche A darstellt.

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \Theta + \int_A \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{A} \quad (5.4.3-1)$$

Dabei ist Θ der Leitungsstrom auf dem Dipolstab. Die Feldänderung kommt durch die Verschiebung der Ladung an den Enden zwischen je 2 Halbperioden zustande. Daher heißt der Ausdruck $\varepsilon \cdot \partial \vec{E} / \partial t$ "**Verschiebungsstromdichte**".

Beispiel 5.4.3-1:

$\lambda/2$ -Dipol: $I = 70$ mA, $U = 3.8$ V, $l = 14$ cm, $d = 7$ mm Durchmesser. Wir schätzen grob ab:

Feldstärke $\hat{E} = \sqrt{2}U / l = 38$ V/m, Stromdichte im Dipol: $\hat{J} = \sqrt{2}I / (d^2\pi / 4) = 2.6$ mA/mm²

Bei welcher Frequenz tragen Verschiebungsstromdichte und Leitungsstromdichte Θ/A gleichermaßen zur resultierenden Stromdichte J bei?

Antwort:

Wir berechnen die Verschiebungsstromdichte in Luft: $\varepsilon = \varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$ As/(Vm):

$$E(t) = \hat{E} \cos(\omega t) \Rightarrow \varepsilon_0 \cdot \partial E / \partial t = -\varepsilon_0 \omega \hat{E} \cdot \sin(\omega t) \Rightarrow \varepsilon_0 \omega \hat{E} = \hat{J} / 2$$

$$f = \frac{\hat{J} / 2}{\varepsilon_0 2\pi \hat{E}} = \frac{2.6 \cdot 10^3 / 2}{8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 2\pi \cdot 38} \text{ Hz} = 615 \text{ MHz}$$

Fazit:

Die Verschiebungsstromdichte wird erst bei sehr hohen Frequenzen quantitativ wirksam, nämlich im UHF-Bereich. Hier bestimmt sie maßgeblich die Feldabstrahlung von der Antenne mit. H. Hertz wies dies als erster experimentell mit seinem Hertz'schen Dipol (Dipollänge $l \ll \lambda/2$) nach.

b) *Feldabstrahlung:*

Laden sich beim Dipol die Enden durch Ladungsansammlung auf (Spannungsbauch), so müssen sich die E -Feldlinien über den umgebenden Raum zum anderen Dipolende schließen

(Bild 5.4.3-1, Zeitpunkt $t = 0$). Bei einer elektrischen Anregung des Dipols mit $f = f_d$ (Resonanz) kommt es zu maximalen E -Feldstärken. Nach einer halben Periode $T/2 = 1/(2f)$ hat sich das E -Feld umgepolt. Eine Änderung des elektrischen Felds ("Verschiebungsstromdichte") ruft nun ein magnetisches Feld H hervor. Gleichzeitig fließt beim Umschwingen die Ladung von den Dipolenden zur Mitte. Dieser Leitungsstrom verstärkt das H -Feld gemäß (5.4.3-1).

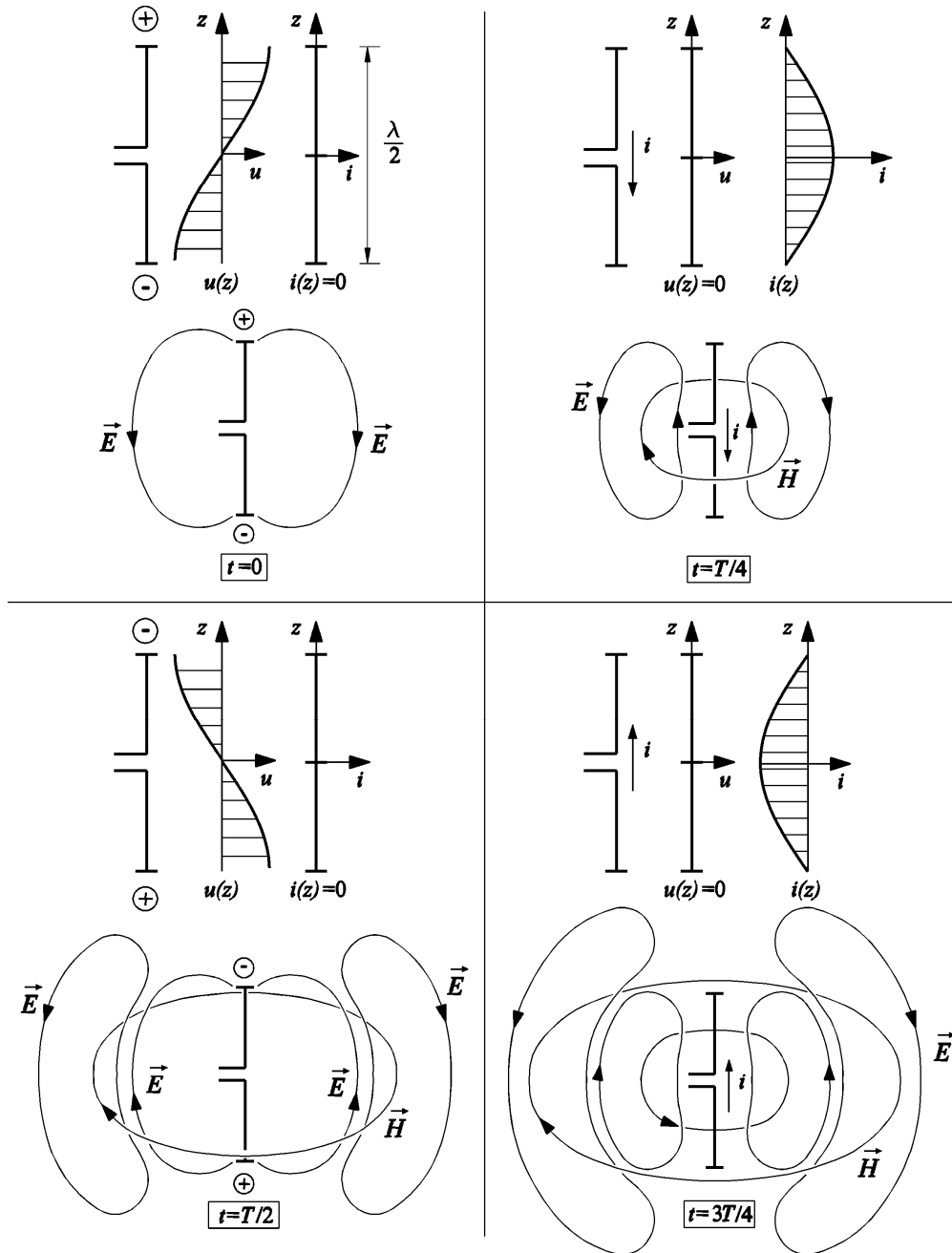


Bild 5.4.3-1: Feldabstrahlung (schematisch) beim $\lambda/2$ -Dipol für die vier Zeitpunkte $t = 0, T/4, T/2$ und $3T/4$

Das sich dabei ändernde (vergrößernde) H -Feld induziert nach dem *Faraday'schen* Induktionsgesetz ein elektrisches Feld (induziertes Feld), das sich mit geschlossenen Feldlinien um das H -Feld ausbildet. Nach $T/2$ ist der Dipol umgepolt, der Stromfluss wird Null und das E -Feld mit umgekehrter Polarität maximal. Die geschlossenen Feldlinien von E - und H -Feld des Zeitabschnitts $0 \leq t \leq T/2$ sind aber nicht erloschen, sondern nach außen gedrängt worden und werden als Welle **abgestrahlt**.

Im Zeitabschnitt $T/2 \leq t \leq T$ wiederholt sich der Vorgang mit umgekehrter Polarität. Dadurch entsteht eine **elektromagnetische Feldwelle** (Verkopplung von E - und H -Feld im Raum), deren räumliche Wellenlänge doppelt so groß wie die Länge des $\lambda/2$ -Dipols ist. Die E -Vektoren schwingen mit der Frequenz f , wobei die Vektoren in Meridianebenen mit dem Dipol als Achse (**Polarisationsebenen**) liegen. Die H -Vektoren schwingen in Ebenen, die senkrecht zur Dipolachse liegen.

c) Der $\lambda/2$ -Dipol als Sende- und Empfangsantenne

Nach Bild 5.4.3-2 stellen wir einen $\lambda/2$ -Dipol (**Stabantenne**) mit eingebautem Glühlämpchen als "Empfänger" in größerer Entfernung vom UHF-Schwingkreis (UHF-Spannungsquelle, "Sender" mit der Frequenz f) auf. Wir betreiben den Sender **ohne** angeschlossenen Dipol. Am Empfangsdipol bleibt das Glühlämpchen dunkel, da keine Wellenabstrahlung erfolgt. Wir versehen den Sender nun mit einem abgestimmten $\lambda/2$ -Dipol. "Abgestimmt" heißt, dass wir gemäß (5.3.1-19) die Länge des Dipols auf

$$l = \lambda / 2 = c_0 / (2f) \quad (c_0: \text{Vakuump-Lichtgeschwindigkeit}) \quad (5.4.3-1)$$

festlegen. Nun leuchtet die Lampe im Empfangsdipol hell auf, da Wellenabstrahlung erfolgt. Eine empfindlichere Anzeige ergibt sich, wenn wir statt des Glühlämpchens im Empfangsdipol einen Gleichrichter (z. B. Germaniumdiode) mit angeschlossenem *Ampere*-meter (*Galvanometer*) nach Bild 5.4.3-2d verwenden. Der im Dipol auftretende Wechselstrom fließt dann in der Pfeilrichtung durch den Gleichrichter, in der anderen Richtung durch das Galvanometer, das somit von einem pulsierenden Gleichstrom durchflossen wird.

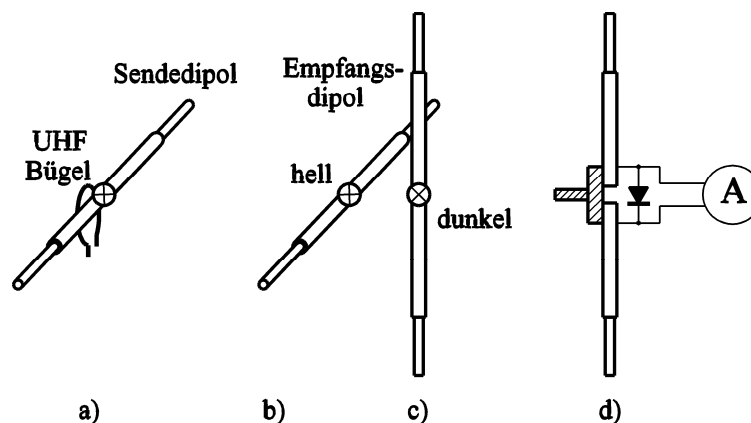


Bild 5.4.3-2: Sende- und Empfangsdipol: a) UHF-Schwingkreis als Sender koppelt auf Stabdipol (Sendeantenne) ein, b) und c) Empfangsdipol mit eingebauter Glühlampe, d) Empfangsdipol mit Gleichrichter und Amperemeter

Fazit:

Ein geschlossener UHF-Schwingkreis besitzt keine Fernwirkung. Ein offener Schwingkreis (Dipol) besitzt Fernwirkung; er strahlt elektrische Energie in den Raum und wird daher auch als Sendedipol oder Sendeantenne bezeichnet. Der UHF-Generator mit angekoppeltem Sendedipol stellt einen Sender elektromagnetischer Energie dar.

Ein gemäß (5.4.3-1) auf die Sendefrequenz f abgestimmter zweiter Dipol kann die abgestrahlte Energie teilweise aus dem Raum aufnehmen und wird daher als **Empfangsdipol** oder **Empfangsantenne** bezeichnet.

Entstehen des hochfrequenten Wechselstromes im Empfangsdipol:

(i) Der Empfangsstrom ist einerseits ein Induktionsstrom infolge des zeitlich veränderlichen Magnetfelds H . Da ein Induktionsstrom nur entsteht, wenn der Leiter mit magnetischen Feldlinien verkettet ist, müssen die Feldlinien dieses Magnetfeldes **normal zur Richtung** des Empfangsdipols verlaufen und aus Symmetriegründen daher den Sendedipol in konzentrischen Kreisen umschlingen – ähnlich wie beim Sendedipol.

(ii) Weiter kommt der Empfangsstrom aber auch durch das **in der Richtung** des Empfangsdipols verlaufende elektrische Wechselfeld E zustande, das auf die im Dipol enthaltenen Elektronen einwirkt und so die elektrische Schwingung anregt.

d) Ausmessen des elektrischen Feldvektor E in der Umgebung des $\lambda/2$ -Dipols

Der Wechselstrom im Empfangsdipol wird auch durch das im Raum bestehende elektrische Wechselfeld E verursacht. Die Feldstärke E an irgendeinem Punkt des Raumes muss sich also genau so periodisch ändern wie der Strom im Empfänger. Weist der Empfangsdipol **in die Schwingungsrichtung** der elektrischen Feldstärke E , so erhalten wir maximalen Strom im Empfangsdipol; liegt er zu ihr **normal**, so wird sich kein Strom im Dipol ergeben, da dann die elektrische Feldstärke keine Komponente in Richtung des Dipols hat (Bild 5.4.3-2 b, c). Wir bringen dazu den Empfangsdipol nach verschiedenen Punkten in einer durch den Sendedipol gelegten horizontalen Ebene, erteilen ihm dort jeweils verschiedene Orientierungen und halten jene Orientierung fest, in der sich maximaler Strom einstellt. Dies ist die **Schwingungsrichtung** des elektrischen Feldvektors E . Die jeweils erzielte maximale Stromstärke ist ein Maß für die **Amplitude** des elektrischen Feldvektors E . Die Amplitude der Feldstärke E ist am größten in der durch die Mitte des Sendedipols gelegten, zu diesem normalen Ebene; in der zur Sendeantenne **normalen Richtung** ist die Energiestrahlung am größten. **In Richtung** des Sendedipols verschwindet die elektrische Feldstärke, in dieser Richtung wird keine elektrische Energie abgestrahlt ("**Abstrahlcharakteristik**"). Das elektrische Feld ist somit **rotationssymmetrisch** bezüglich des Dipols als Achse.

Fazit:

Eine Dipolantenne strahlt elektromagnetische Energie als linear polarisierte Wellen ab. Die Polarisierungsebenen des E -Vektors (Ebenen, in denen der Vektor schwingt) enthalten alle gemeinsam jene Achse, in der der Sendedipol liegt. In Richtung dieser Achse ist die abgestrahlte Energie Null, senkrecht dazu maximal und rotationssymmetrisch um diese Achse verteilt.

5.4.4 Reflektor und Direktor, Yagi-Antenne

Die *Yagi*-Antenne ist eine Richtantenne, bestehend aus einem $\lambda/2$ -Dipol und je einem vor und hinter dem Dipol parallel angeordnetem Dipolstab (Direktor und Reflektor, Bild 5.4.4-2), die z. B. im Empfangsmodus durch die einfallende Welle zum Mitschwingen angeregt werden. Bei geeigneter Längen- und Abstandswahl der mitschwingenden Dipole wird die einfallende Welle in ihrer Wirkung am Ort des Empfangsdipols verstärkt. Zum Verständnis der Wirkung dieses **Direktors** und **Reflektors** wird eine vereinfachte Überlegung angegeben. Der in Bild 5.4.2-1 dargestellte Stab als Dipol ist ein Schwingkreis ohne Einspeisequelle. Einfallende E - H -Wellen eines anderen Senders regen den Dipol elektromagnetisch zum Mitschwingen an. Er wird damit selbst zum Sender und sendet ebenfalls Wellen aus. Wird die Länge l_D dieses Dipols kleiner als $\lambda/2$ der einfallenden Welle gewählt, dann sinkt die Induktivität gegenüber der Induktivität L eines $\lambda/2$ -Dipols: $L_D < L$. Betrachten wir vereinfacht den Dipol als ungedämpften Schwingkreis mit den Parametern L_D und C , so ist seine Eigenfrequenz f_{dD} größer als jene des $\lambda/2$ -Dipols f_d .

$$f_{dD} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{L_D \cdot C}} > f_d = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad (5.4.4-1)$$

Ist die Länge des Dipols l_R größer als $\lambda/2$, dann ist seine Induktivität L_R größer als die Induktivität L des $\lambda/2$ -Dipols. Seine Eigenfrequenz f_{dR} ist kleiner als jene des $\lambda/2$ -Dipols f_d .

$$f_{dR} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{L_R \cdot C}} < f_d = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad (5.4.4-2)$$

Trifft eine einfallende E - H -Welle (Wellenlänge λ , Frequenz $f = \omega/(2\pi) > f_{dR}$) auf den Stabdipol, so wird die in dem Dipol auftretende Spannung \underline{U} als Linienintegral des E -Felds längs des Dipolstabs die Phasenlage des schwingenden E -Felds haben: $\underline{U} \sim \underline{E} \cdot e^{j\omega t}$. Der sich einstellende Strom \underline{I}_R im Stabdipol ist wegen (5.4.4-2) und damit $1 - \omega_{dR}^2 / \omega^2 > 0$ zur Spannung um 90° voreilend.

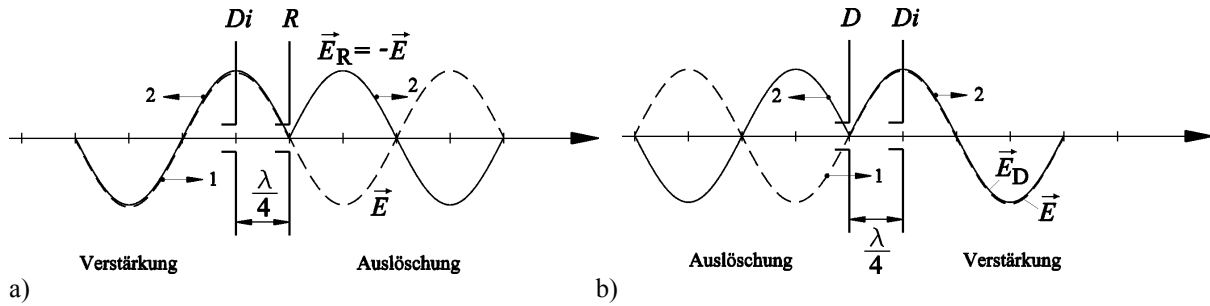
$$\underline{U} + j(\omega L_R - \frac{1}{\omega C}) \cdot \underline{I}_R = 0 \quad \underline{I}_R = \frac{-\underline{U}}{j(\omega L_R - \frac{1}{\omega C})} = j \cdot \frac{\underline{U}}{\omega L_R \cdot \left(1 - \frac{\omega_{dR}^2}{\omega^2}\right)} \sim j\underline{U} \quad (5.4.4-3)$$

Das abgestrahlte E_R -Feld ist die zeitliche Änderung des abgestrahlten H_R -Felds (*Faraday-Gesetz*), welches gemäß dem **Ampere**'schen Durchflutungssatz proportional zum erregenden Strom \underline{I}_R ist: $\underline{H}_R \sim \underline{I}_R$, $\underline{E}_R \sim j\omega \underline{H}_R \sim j\omega \underline{I}_R \sim -\underline{U} \sim -\underline{E}$. Folglich ist die abgestrahlte E_R -Feldwelle in Gegenphase zur einfallenden E -Feldwelle. Der Dipol mit der Länge l_R wirkt also als **Reflektor**; er reflektiert die einfallende elektromagnetische E - H -Feldwelle. Trifft die einfallende E - H -Welle auf den kürzeren Stabdipol $l_D < \lambda/2$, so ist die Wellenfrequenz $f = \omega/(2\pi) < f_{dD}$. Die auftretende Spannung $\underline{U} \sim \underline{E} \cdot e^{j\omega t}$ längs des Stabs bewirkt wegen (5.4.4-1), dass $1 - \omega_{dD}^2 / \omega^2 < 0$ ist, also einen gegenüber dem Strom \underline{I}_R (5.4.4-3) gegenphasigen Strom \underline{I}_D im Stab:

$$\underline{U} + j(\omega L_D - \frac{1}{\omega C}) \cdot \underline{I}_D = 0 \quad \underline{I}_D = \frac{-\underline{U}}{j(\omega L_D - \frac{1}{\omega C})} = j \cdot \frac{\underline{U}}{\omega L_D \cdot \left(1 - \frac{\omega_{dD}^2}{\omega^2}\right)} \sim -j\underline{U} \quad (5.4.4-4)$$

Das abgestrahlte E_D -Feld ist wegen $\underline{E}_D \sim j\omega \underline{H}_D \sim j\omega \underline{I}_D \sim \underline{U} \sim \underline{E}$ in Phase mit der einfallenden E -Feldwelle. Der Dipol mit der Länge l_D wirkt als **Direktor**, da er in gleicher Weise wie die einfallende elektromagnetische E - H -Feldwelle abstrahlt. Wird der Direktor im Abstand von $\lambda/4$ **vor** einem $\lambda/2$ -Empfänger-Dipol angeordnet und der Reflektor im Abstand $\lambda/4$ **hinter** ihm, so verstärken Reflektor und Direktor die E - H -Welle am Ort des $\lambda/2$ -Empfänger-Dipols (Bild 5.4.4-1). Diese Anordnung heißt nach ihrem Erfinder **Yagi-Antenne**. Die Überlegungen hatten zur Voraussetzung, dass der im Reflektor und Direktor fließende Strom und das von ihm erregte Feld genauso groß wie der Primärstrom der Sendeantenne und dessen Feld sind, und außerdem der Phasensprung exakt 180° bzw. 0° ist. Wegen der unvermeidlichen Verluste (Innenwiderstand) von Reflektor und Direktor ist beides in Wirklichkeit nicht der Fall. Eine günstige Lösung ist eine Verringerung des Abstands des Reflektors vom Empfangsdipol von 25% auf 15% der Wellenlänge und des Direktors von

25% auf 10% ist, wenn der Reflektor um 5% länger und der Direktor um 5% kürzer als der Empfangsdipol sind (Bild 5.4.4-2).



a) Bild 5.4.4-1: Überlagerung der elektromagnetischen Felder zweier um eine Viertelperiode phasenverschoben erregter Dipole bei einem Abstand von einer Viertelwellenlänge. a) Verstärkende Wirkung des idealen Reflektordipols R (Dipol R kurzgeschlossen) hinter dem Sende-/Empfangsdipol Di, b) Verstärkende Wirkung des idealen Direktordipols (Dipol D kurzgeschlossen) vor dem Dipol Di

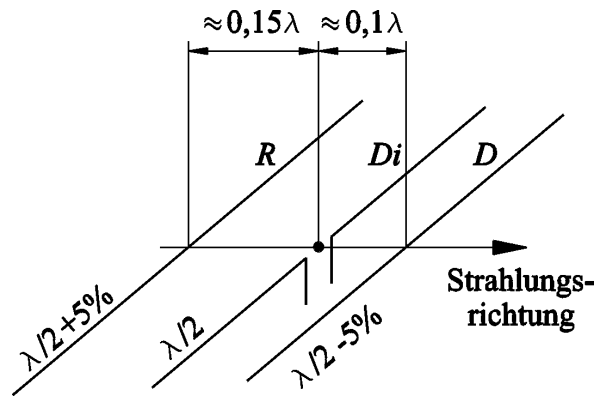


Bild 5.4.4-2: Die Yagi-Antenne als Dreileiteranordnung mit gespeistem Dipol Di, Reflektor R und Direktor D in einer realitätsnahen Anordnung

Versuchsdurchführung

5.5 RLC - Reihenschwingkreis

Verschalten Sie die folgenden Bauteile dem Schaltplan entsprechend auf dem Steckbrett:

- Kondensator ($C = 1 \mu\text{F}$)
- Induktivität (L_{Sp} ca. 193 mH; R_{Sp} ca. 4,6 Ω ; $N = 1200$, auf Kern gesteckt, Eisenjoch offen!; lineare Charakteristik)
- Mess-Shunt $R_{mess} = 20 \Omega$.

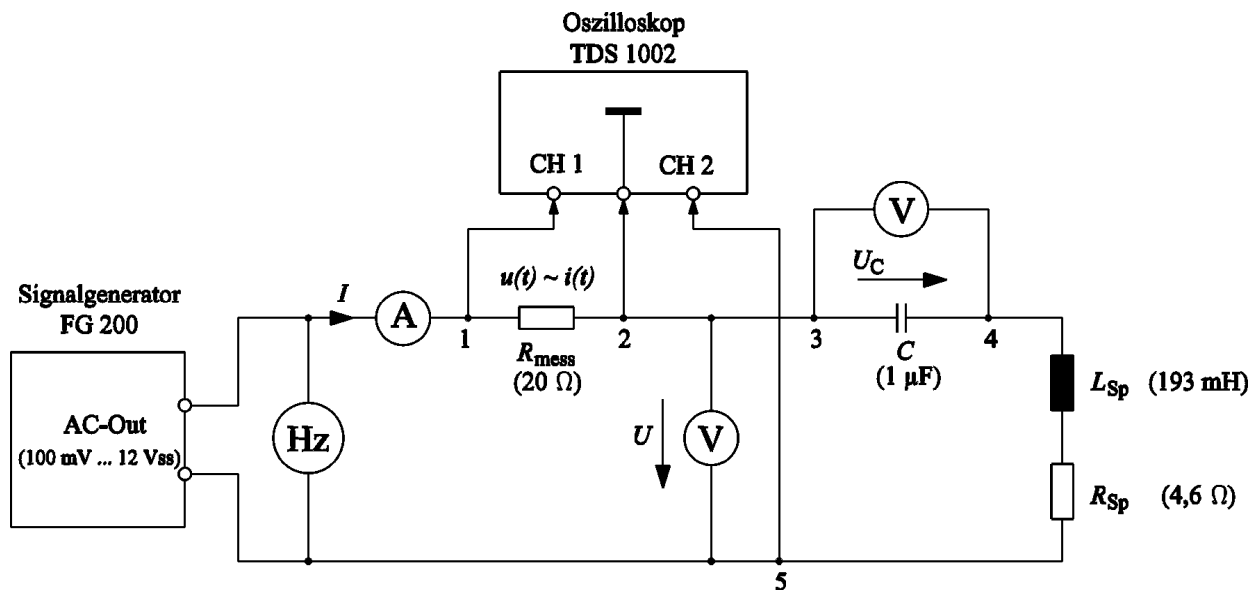


Bild 5.5-1: Schaltplan zur Messung des Reihenschwingkreises

Schließen Sie den Funktionsgenerator FG 200 mit dem AC-OUT-Ausgang 100 mV ... 12 Vss und das Oszilloskop TDS 1002 mit CH 1 an den Punkten 1 & 2 und CH 2 an den Punkten 2 & 5 an. Achten Sie darauf, dass die **beiden Massen der Oszilloskopanschlüsse** (BNC) den **gleichen Bezugspunkt**, im Schaltplan Punkt 2, haben (Masseanschluss der BNC-Kabel hat eine schwarze Buchse).

Verschalten Sie die digitalen Voltmeter-Einbaumessgeräte entsprechend dem Schaltplan und der Beschriftung für U und U_C (siehe Bild 5.5-2).

Mit Hilfe des Mess-Shunts R_{mess} wird der Strom oszillographiert und mit dem Amperemeter-Einbaumessgerät gemessen.

Beachten Sie weiterhin, dass bei der Spannungsmessung zwei Messbereiche (0 ... 2 V und 0 ... 20 V bzw. 0 ... 40 V) möglich sind. Beginnen Sie mit dem größeren Messbereich für die Messung der Spannung U_C und schalten Sie ggf. um. Die Anzeige der Spannung erfolgt im Bereich 0,000 ... 1,999 V. Beachten Sie den Umrechnungsfaktor des Messbereiches (Messbereich 0 ... 2 V \Rightarrow Faktor 1, Messbereich 0 ... 20 V \Rightarrow Faktor 10, Messbereich 0 ... 40 V \Rightarrow Faktor 20).

In der folgenden Abbildung sind die Einbauinstrumente für die Spannungs- & Strommessung dargestellt.

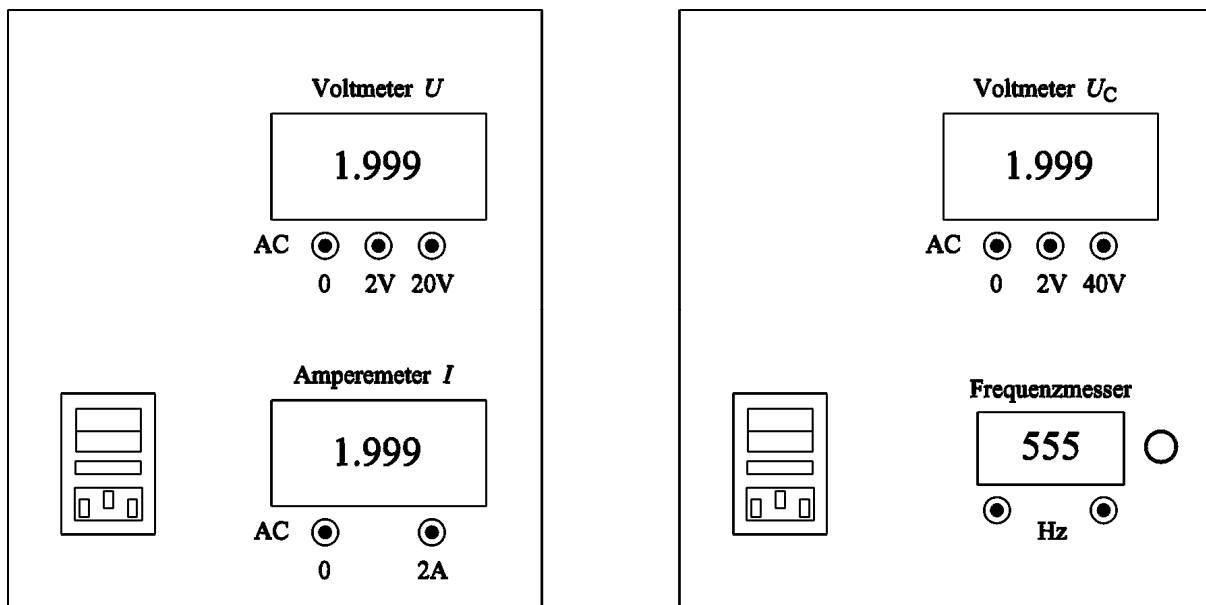


Bild 5.5-2: Frontansicht der Einbau-Messgeräte

Schalten Sie den Frequenzmesser *Hengstler Tico 734* parallel an den Signalgeneratorausgang.

Lassen Sie, bevor Sie einschalten, die **Schaltung durch den Betreuer prüfen**.

Quittieren Sie am Frequenzmesser durch zweimaliges Drücken auf den roten Knopf rechts neben der Anzeige, bis in dieser „0“ erscheint.

Gleichen Sie beide Signale am Oszilloskop nach Drücken auf Auto Setup auf der Nulllinie ab (Pfeile der Kanäle CH 1 & CH 2 links verwenden; siehe auch die Oszilloskopanleitung, Pos. 6). Invertieren Sie ein Signal. Stellen Sie die Kopplung auf „AC“ ein. Die Glättung des Stromes kann durch eine Mittelwertmessung unter „Erfassung“ eingestellt werden (Mittelwertglättung von 4 bis 128). Stellen Sie am Oszilloskop die Tastköpfe auf ein (Menü CH1 bzw. CH2).

Stellen Sie den Funktionsgenerator auf ein Sinussignal und eine Spannung von ca. 1,5 V ein. Achten Sie darauf, dass die Spannung während des ganzen Messvorganges **konstant** bleibt, indem Sie die Spannung **nachregeln**.

Führen Sie nun die in den Kapiteln 5.5.1 – 5.5.4 beschriebenen Messungen für $U_C(\omega)$, $I(\omega)$ und $\varphi(\omega)$ **gleichzeitig** durch. Verändern Sie dazu den Frequenzbereich am Frequenzgenerator von 50 Hz bis auf 2000 Hz gemäß den Werten in der Tabelle 5.5-1. Beachten Sie bei der Ermittlung von Δt für die Berechnung der Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom, welches Signal voreilend ist (nacheilender Strom entspricht „+“, also positivem Zeitversatz Δt , voreilender Strom entspricht „-“, also negativem Zeitversatz Δt).

Suchen Sie die Resonanzfrequenz in der Nähe von 350 Hz und messen Sie diese mit 2 zusätzlichen Messpunkten in deren Umgebung aus. Nutzen Sie hierbei das Oszilloskop, indem Sie auf die fehlende Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung bei der Resonanzfrequenz achten.

Drucken Sie den Strom- & Spannungsverlauf bei der Resonanzfrequenz aus und heften das Blatt dem Protokoll als Anlage bei. Notieren und kennzeichnen Sie die ausgedruckten Verläufe, sowie die Messbereiche für **Strom** & Spannung.

Tabelle 5.5-1: Mess- & Rechenwerte des Reihenschwingkreises (SkW bedeutet Skalenwert bzw. Anzeigewert des Messgerätes)

f_{soll} (Hz)	f_{ist} (Hz)	U (SkW)	U (V)	U_C (SkW)	U_C (V)	I (SkW)	I (mA)	Δt (ms)	φ_{Rech} (°)	I_{Rech} (mA)	$ Z_{Rech} $ (Ω)	L_{Rech} (dB)
50												
100												
150												
200												
250												
300												
400												
450												
500												
600												
700												
800												
1000												
1200												
1500												
2000												

Die Berechnungsformeln für die berechneten Tabellenwerte sind anzugeben!

5.5.1 Bestimmung des Spannungspegels am Kondensator

Messen Sie die Spannung am Kondensator und notieren Sie sich die Messwerte in der Tabelle 5.5-1.

Es gilt allgemein für den Spannungspegel L :

$$L = 20 \cdot \log \left| \frac{U_C}{U} \right| = 20 \cdot \log \left| \frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \right|$$

Berechnen Sie den Spannungspegel L anhand der gemessenen Spannungen und tragen Sie die Werte in die Tabelle 5.5-1 und in ein Diagramm über der Frequenz auf halblogarithmischem Millimeterpapier ab (BODE-Diagramm). Vergleichen Sie diese berechneten Werte mit den zusätzlich zu berechnenden Werten anhand der Bauteilgrößen. Geben Sie diese Werte in tabellarischer Form an und tragen Sie diese als 2. Kurve in das Diagramm auf halblogarithmischem Millimeterpapier (f als logarithmische Achse) ein. Diskutieren Sie die Unterschiede.

Ein weiterer theoretischer Verlauf des Spannungspegels kann dem Bild 5.1.3-2 im Theorieteil entnommen werden.

5.5.2 Bestimmung von $I(f)$ im Reihenschwingkreis und Zeichnen des Diagramms

An den Klemmen 1 und 2 liegt der Eingang CH 1 des Oszilloskops. Dabei dient R_{mess} zur Stromdarstellung mit dem Oszilloskop. Die Bestimmung des Stroms $I(f)$ erfolgt mit Hilfe des Amperemeters. Notieren Sie sich die abgelesenen Werte als Skalenwert SkW in der Tabelle.

Ein theoretischer Verlauf der Strom-Kennlinie ist im Theorieteil, Bild 5.1.3-1 zu sehen.

Berechnen Sie mit den gegebenen Werten des Serienschwingkreises die theoretischen Ströme entsprechend den Frequenzen in Tabelle 5.5-1 und tragen Sie diese Werte ein.

Zeichnen Sie nun den gemessenen und berechneten Verlauf von $I(f)$ in ein Diagramm auf doppeltlogarithmisches Millimeterpapier und vergleichen Sie Ihre beiden Ergebnisse.

5.5.3 Bestimmung von $|Z(f)|$ im Reihenschwingkreis

Bestimmen Sie nun $|Z|$ in Abhängigkeit von f mit Hilfe der aufgenommenen Werte und tragen Sie diese Werte in die Tabelle und in ein Diagramm auf doppeltlogarithmisches Millimeterpapier ein. Bestimmen Sie die Resonanzfrequenz f_0 aus dem Diagramm und die Resonanzkreisfrequenz ω_0 rechnerisch.

Was bedeutet f_0 in physikalischem Sinn?

Vergleichen Sie nun Ihre Ergebnisse, basierend auf den gemessenen Werten mit den theoretisch berechneten Werten anhand der gegebenen Bauteile. Geben Sie die theoretisch berechneten Werte in einer Tabelle an und zeichnen Sie diese in das Diagramm mit den gemessenen Werten ein.

Ein anderer theoretischer Verlauf ist in Bild 5.1.2-2 zu finden.

Vergleichen Sie Ihre Strom- und Impedanzkennlinie. Was lässt sich daraus für I , Z und f_0 schließen?

5.5.4 Phasenverschiebung $\varphi(f)$ im Reihenschwingkreis

Die Anschlussklemmen des CH 2-Eingangs des Oszilloskops liegen an den Punkten 2 und 5, die für den CH 1-Eingang an den Klemmen 1 und 2. Stellen Sie nun die Strom- und die Spannungsverläufe des RLC -Kreises am Oszilloskop dar.

Die Phasenverschiebung zwischen Strom- und Spannung kann auf zweierlei Arten ermittelt werden:

1. Bestimmen Sie die Zeitdifferenz zwischen zwei gleichsinnigen Nulldurchgängen bzw. Maxima. Beachten Sie, ein Signal zu invertieren (Ursache: potentialgleicher Massebezugspunkt).
2. Schalten Sie das Oszilloskop in den X-Y-Betrieb um. Es wird nun eine Ellipse dargestellt, die auch als *Lissajous*-Figur bezeichnet wird. Die maximale Y-Auslenkung sei b . Die Y-

Auslenkung für $X = 0$ ist $b \cdot \sin \varphi$. Es gilt nun $|\sin \varphi| = \left| \frac{Y(X=0)}{Y_{\max}} \right|$.

Probieren Sie beide Fälle aus. Für die Messung verwenden Sie jedoch Fall 1.

Berechnen Sie die Phasenverschiebung anhand der Messwerte. Tragen Sie die Werte in die Tabelle 5.5-1 und in ein Diagramm auf halblogarithmisches Papier (f als logarithmische Abszisse) ein und vergleichen Sie diese mit den theoretisch berechneten Werten, basierend auf den gegebenen Größen der Bauteile. Geben Sie die theoretisch berechneten Werte in einer Tabelle an, und zeichnen Sie diese in das Diagramm mit den aus den gemessenen Größen berechneten Werten ein.

Was kann man über das Verhalten des Phasenwinkels allgemein sagen?

5.6 RLC - Parallelschwingkreis

Verschalten Sie die folgenden Bauteile dem Schaltplan in Bild 5.6-1 entsprechend auf dem Steckbrett:

- Kondensator ($C = 22 \mu\text{F}$)
- Induktivität (L_{Sp} ca. 193 mH; R_{Sp} ca. 4,6 Ω ; $N = 1200$, auf Kern gesteckt, Eisenjoch offen!; lineare Charakteristik)
- Mess-Shunt $R_{mess} = 50 \Omega$.

Nutzen Sie hierbei die bisher aufgebaute Schaltung, soweit es geht.

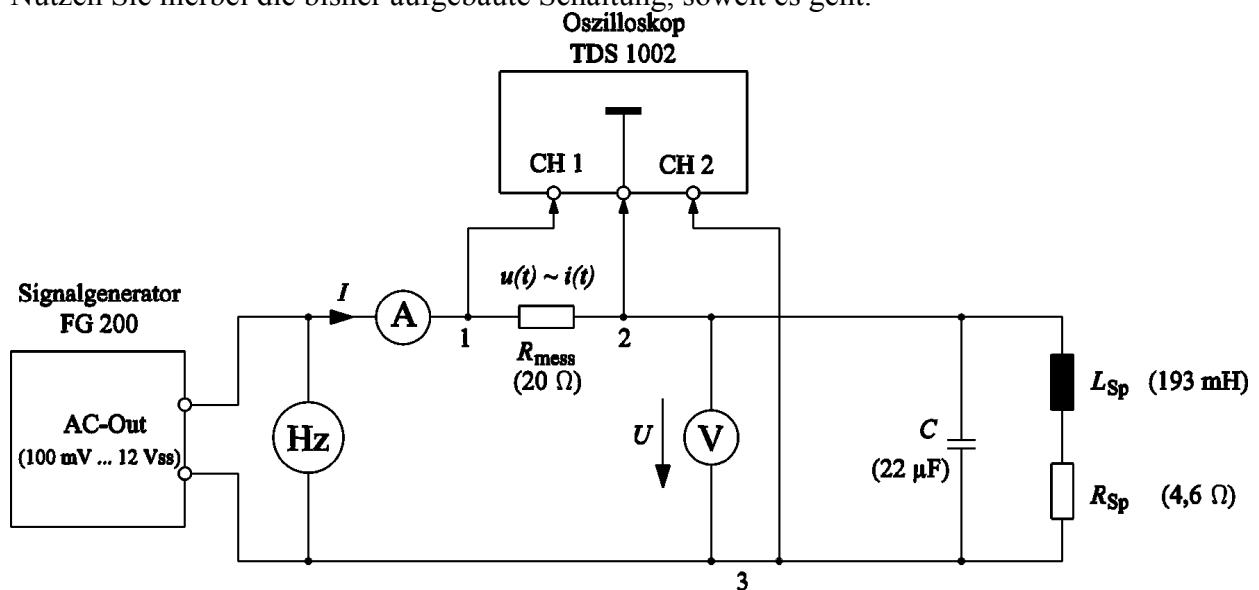


Bild 5.6-1: Schaltplan zur Messung des Parallelschwingkreises

Beachten Sie alle Hinweise unter 5.5 zum Aufbau und zum Einstellen der Messgeräte und zur Messung.

Der Eingang CH 2 des Oszilloskops TDS 1002 wird an den Punkten 2 & 3 angeschlossen. Verwenden Sie den Messbereich des digitalen Voltmeter-Einbaumessgerätes von 0 bis 2 V.

Lassen Sie, bevor Sie Einschalten, die **Schaltung durch den Betreuer prüfen**.

Stellen Sie den Funktionsgenerator auf ein Sinussignal und eine Spannung von ca. 1,5 V ein. Achten Sie darauf, dass die Spannung während des ganzen Messvorganges **konstant** bleibt, indem Sie die Spannung **nachregeln**.

Führen Sie nun die in den Kapiteln 5.6.1 – 5.6.3 beschriebenen Messungen für $U_C(f)$, $I(f)$ und $\varphi(f)$ **gleichzeitig** durch.

Verändern Sie dazu den Frequenzbereich am Frequenzgenerator von 30 Hz bis auf 280 Hz. Suchen Sie die Resonanzstelle bei ca. 75 Hz und messen Sie zwei benachbarte Frequenzpunkte in der Umgebung der Resonanz aus.

Drucken Sie den Strom- & Spannungsverlauf bei der Resonanzfrequenz aus und heften das Blatt dem Protokoll als Anlage bei. Notieren und kennzeichnen Sie die ausgedruckten Verläufe, sowie die Messbereiche für **Strom & Spannung**.

Tabelle 5.6-1: Mess- & Rechenwerte des Parallelschwingkreises

f_{soll} (Hz)	f_{ist} (Hz)	U (SkW)	$U_{Messber}$ (V)	U (V)	I (SkW)	I (mA)	Δt (ms)	I_{Rech} (mA)	φ_{Rech} (°)	$ Z_{Rech} $ (Ω)
30			0 ... 2							
40			0 ... 2							
50			0 ... 2							
60			0 ... 2							
70			0 ... 2							
			0 ... 2							
			0 ... 2							
			0 ... 2							
80			0 ... 2							
90			0 ... 2							
100			0 ... 2							
150			0 ... 2							
200			0 ... 2							
250			0 ... 2							
280			0 ... 2							
			0 ... 2							
			0 ... 2							
			0 ... 2							

Die Berechnungsformeln für die berechneten Tabellenwerte sind anzugeben!

5.6.1 Bestimmung von $I(f)$ im Parallelschwingkreis

An den Klemmen 1 und 2 liegt der CH 1-Eingang des Oszilloskops, auf dem mit Hilfe von R_{mess} der Strom dargestellt wird.

Bestimmen Sie den Strom in Abhängigkeit von f mit Hilfe des Amperemeters und tragen Sie die gemessenen Werte in eine Tabelle ein.

Tragen Sie die gemessenen Werte in einem Diagramm über der Frequenz auf doppeltlogarithmisches Millimeterpapier ab und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem theoretische berechneten Werten, indem Sie die Rechenwerte in das Diagramm mit den gemessenen Werten und die Tabelle 5.6-1 eintragen und die Unterschiede diskutieren.

Ein weiterer theoretischer Verlauf des Stroms kann dem Bild 5.2.2-4 im Theorieteil entnommen werden.

5.6.2 Bestimmung der Impedanz $|Z(f)|$ im Parallelschwingkreis

Berechnen Sie $|Z|$ in Abhängigkeit von f , sowie f_0 und f_I anhand der gemessenen Werte. Tragen Sie die Werte von $|Z|$ in die Tabelle 5.5-1 und in ein Diagramm auf doppeltlogarithmisches Millimeterpapier ein und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der theoretisch berechneten Werten anhand der gegebenen Bauteile. Geben Sie die theoretisch berechneten Werte in einer Tabelle an und zeichnen Sie diese in das Diagramm mit den gemessenen Werten ein.

Ein weiterer theoretischer Verlauf ist in Bild 5.2.2-2 zu finden.

Allgemein gilt für die Impedanz Z :

$$Z = \frac{U}{I} ,$$

sowie für die Kreisfrequenzen für $R_C = 0$, $R = R_L$

$$\omega_{01} = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \cdot \sqrt{1 - \frac{C}{L} \cdot R^2} \quad \text{für } \varphi = 0 \quad \dots \text{ Formel (5.2.2-3)}$$

$$\omega_{02} = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \cdot \sqrt{\sqrt{2 \cdot \frac{C}{L} \cdot R^2 + 1} - \frac{C}{L} \cdot R^2} \quad \text{für } Z = \text{maximal} \quad \dots \text{ Formel (5.2.2-2)}$$

Was bedeuten hier diese Kreisfrequenzen? Welche Kreisfrequenz kann man hier ablesen? In der Aufgabe zu Reihenschwingkreisen war nur nach einer Kreisfrequenz gefragt, warum? Vergleichen Sie die Stromkennlinie mit der Impedanzkennlinie. Was können Sie über die Kreisfrequenz in Bezug auf die Impedanz und den Strom sagen?

5.6.3 Bestimmung der Phasenverschiebung $\varphi(f)$ im Parallelschwingkreis

Die Anschlussklemmen des CH 2-Einganges (Spannung) liegen an den Punkten 2 und 3, die für den CH 1-Eingang (Strom) an den Klemmen 1 und 2.

Die Phasenverschiebung zwischen Strom- und Spannung wird wie beschrieben gemessen.

Überlegen Sie sich zuvor, wie der Phasenverlauf im Gegensatz zum Reihenschwingkreis verlaufen soll.

Berechnen Sie nun die Phasenverschiebung für das oben genannte Frequenzintervall mit den Messwerten und tragen Sie die Werte in einem Diagramm über der Frequenz auf halblogarithmisches Millimeterpapier ab (f als logarithmische Abszisse).

Vergleichen Sie die anhand der Messung berechneten Werte mit den theoretisch berechneten Werten, basierend auf den gegebenen Größen der Bauteile. Geben Sie die theoretisch berechneten Werte in einer Tabelle an und zeichnen Sie diese in das Diagramm mit den aus den gemessenen Größen berechneten Werten zum Vergleich ein.

Was können Sie jetzt über den Phasenwinkel sagen?

Wo lässt sich die Resonanz am Graphen ablesen? Bestimmen Sie diese. Handelt es sich um f_{01} oder f_{02} ?

5.7 Lecher-Leitung

5.7.1 Versuchsziele

- Nachweis der Ausbreitung von elektromagnetischen Strom- und Spannungswellen auf der *Lecher*-Leitung für folgende Fälle:
 - offenes Ende
 - kurzgeschlossenes Ende
 - verlängertes kurzgeschlossenes Ende
 - Abschluss mit Wellenwiderstand
- Bestimmung der Strom- und Spannungsmaxima

5.7.2 Aufbau

Der Versuchsaufbau ist in Bild 5.7.2-1 dargestellt.

- die schon zusammensteckte offene *Lecher*-Leitung, auf zwei Sockeln stehend, mit beiden 4-mm-Steckern in den Antennenausgang des Dezimeterwellensenders stecken
- falls notwendig, Dezimeterwellensender und *Lecher*-Leitung in der Höhe so ausrichten, dass die *Lecher*-Leitung waagrecht verläuft
- falls notwendig, Induktionsschleife in der Höhe so ausrichten, dass eine Führung des gebogenen Endes knapp über der *Lecher*-Leitung erfolgt
- Betriebsart CW am Dezimeterwellensender wählen

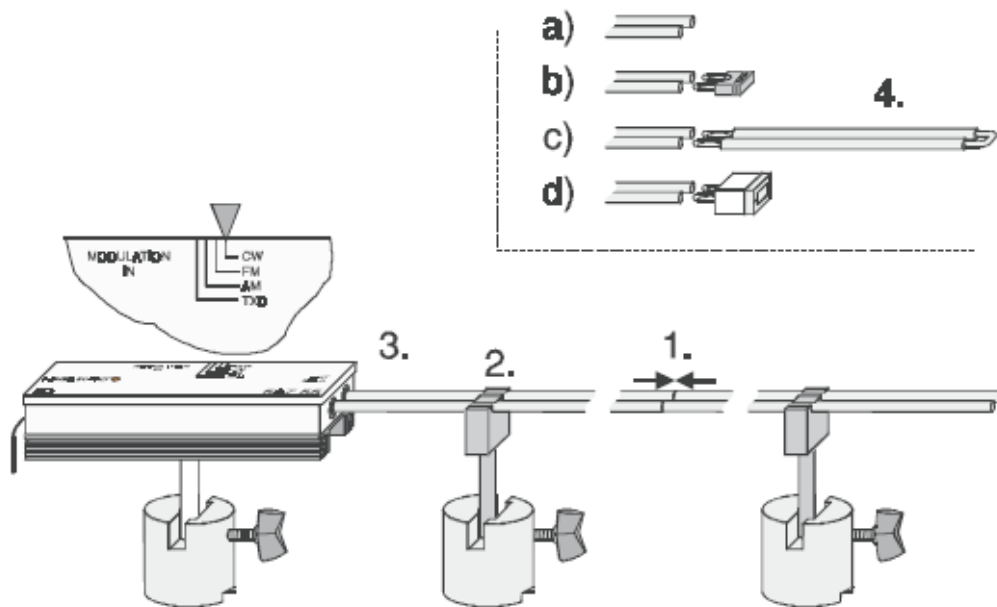


Bild 5.7.2-1: Versuchsaufbau zur Messung von Spannungs- & Strommaxima

- a) offenes Ende
- b) kurzgeschlossenes Ende
- c) verlängertes kurzgeschlossenes Ende
- d) Abschluss mit Wellenwiderstand

5.7.3 Durchführung

Beachten Sie folgendes:

- **Niemals den Dezimeterwellensender mit offenem Ausgang betreiben!**
- bei Spannungsmessung den **Kunststoff-Adapter** bzw. **Schleifsockel nicht berühren** (Verfälschung der Messergebnisse durch Ableitung über den Körper!)
- bei Messung mit dem Wellenwiderstand sind **maximal 5 min Einschaltdauer zulässig!**

a) Strommaxima:

Stellen Sie nacheinander die 4 Abschlussarten der *Lecher*-Leitung wie in Bild 5.7.2-1 gezeigt, her. Messen Sie die Abstände der Strombäuche und –knoten und tragen Sie die Werte der Strombäuche in die Tabelle 5.7.4-1 ein.

Gehen Sie folgendermaßen vor:

- Dezimeterwellensender am Schalter des Schaltpultes einschalten (weiße Lampe leuchtet!)
- Induktionsschleife mit Schraubfassung E10 inkl. Glühlampe und Zeiger längs der *Lecher*-Leitung verschieben und eine durch Probieren „**ausgemittelte**“ Stelle suchen, an der die Glühlampe am hellsten aufleuchtet
- zur Optimierung der Helligkeit die Induktionsschleife senkrecht zur *Lecher*-Leitung verschieben und ggf. vorsichtig den Abstand zur *Lecher*-Leitung reduzieren, ohne dass die *Lecher*-Leitung berührt wird (siehe Bild 5.7.3-1).
- Bäuche mit der jeweiligen Entfernung in der Tabelle 5.7.4-1 eintragen; Knoten liegen mittig dazwischen.

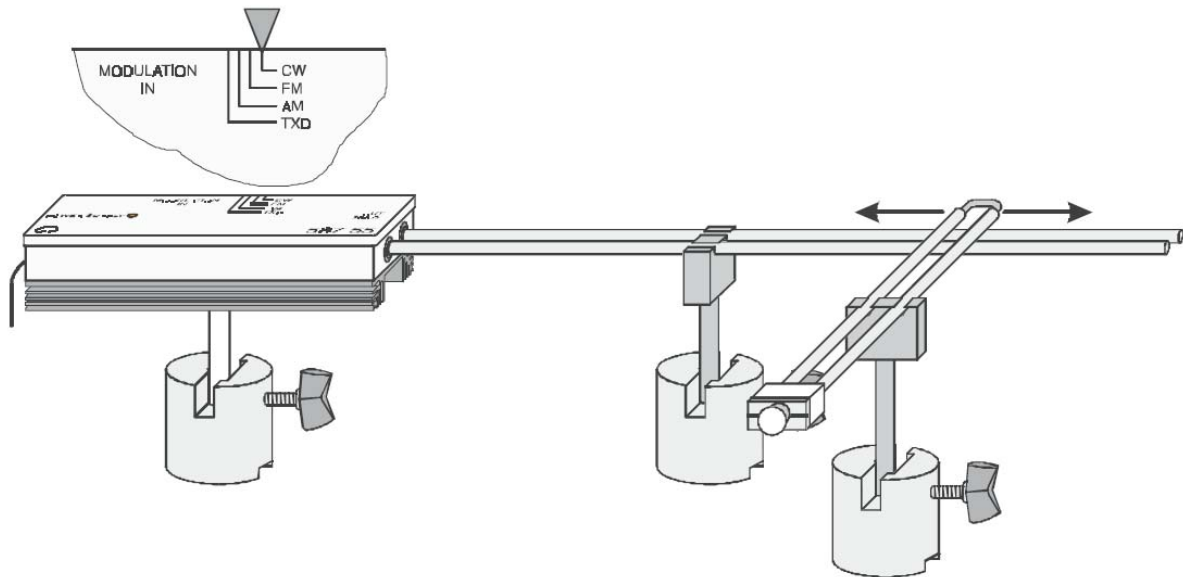


Bild 5.7.3-1: Versuchsaufbau zur Messung der Strommaxima

b) Spannungsmaxima:

Stellen Sie nacheinander die 4 Abschlussarten der *Lecher*-Leitung wie in Bild 5.7.2-1 gezeigt, her. Messen Sie die Abstände der Spannungsbäuche und –knoten und tragen Sie die Werte der Spannungsbäuche in die Tabelle 5.7.4-1 ein.

Gehen Sie folgendermaßen vor:

- Dezimeterwellensender am Schalter des Schaltpultes einschalten (weiße Lampe leuchtet!)
- Tastkopf, bestehend aus Schraubfassung E10 inkl. Glühlampe und Kunststoff-Adapter mit Zeiger, auf die *Lecher*-Leitung setzen (siehe Bild 5.7.3-2)
- Tastkopf längs der *Lecher*-Leitung verschieben und eine durch Probieren „ausgemittelte“ Stelle suchen, an der die Glühlampe am hellsten aufleuchtet
- Bäuche mit der jeweiligen Entfernung in der Tabelle 5.7.4-1 eintragen; Knoten liegen mittig dazwischen.

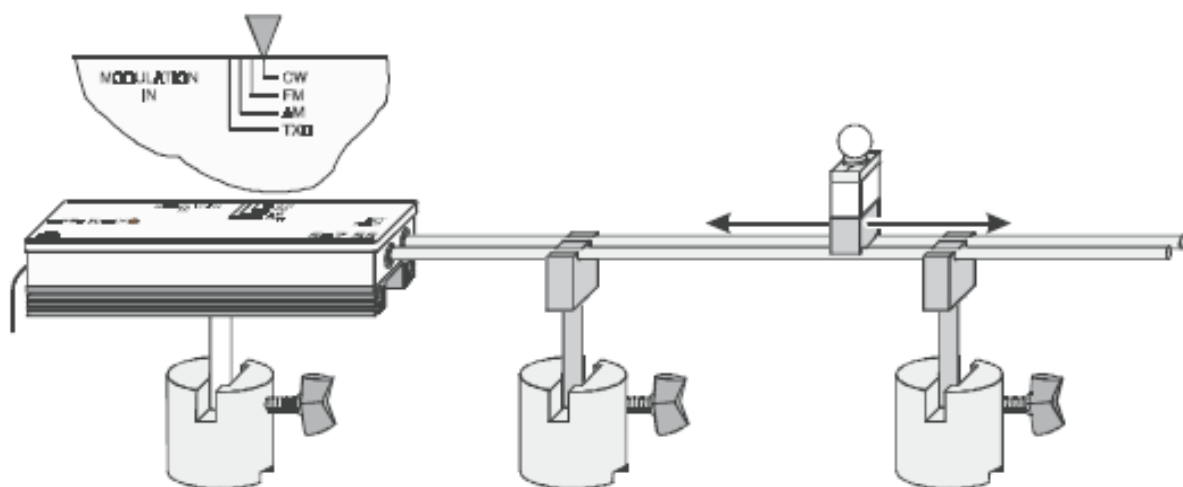


Bild 5.7.3-2: Messung des Spannungsmaximums

5.7.4 Auswertung

Tragen Sie die gemessenen Entfernungen anhand des Maßbandes für U - & I -Bäuche in die Tabelle 5.7.4-1 ein.

Tabelle 5.7.4-1: Messwerte der Spannungs- & Strombäuche

Abschlussart	Bauch mit Entfernung in cm nacheinander eintragen					
	a) offenes Ende	U				
	I					
b) kurzgeschlossenes Ende	U					
	I					
c) verlängertes kurzgeschlossenes Ende	U					
	I					
d) Abschluss mit Wellenwiderstand	U					
	I					

1. Zeichnen Sie auf Millimeterpapier die Verläufe der stehenden Wellen von U & I mit den gemessenen Werten aus der Tabelle 5.7.4-1 für alle Abschlussarten! Orientieren Sie sich an der Prinzipzeichnung 5.7.4-1 für die Abschlussart a)!

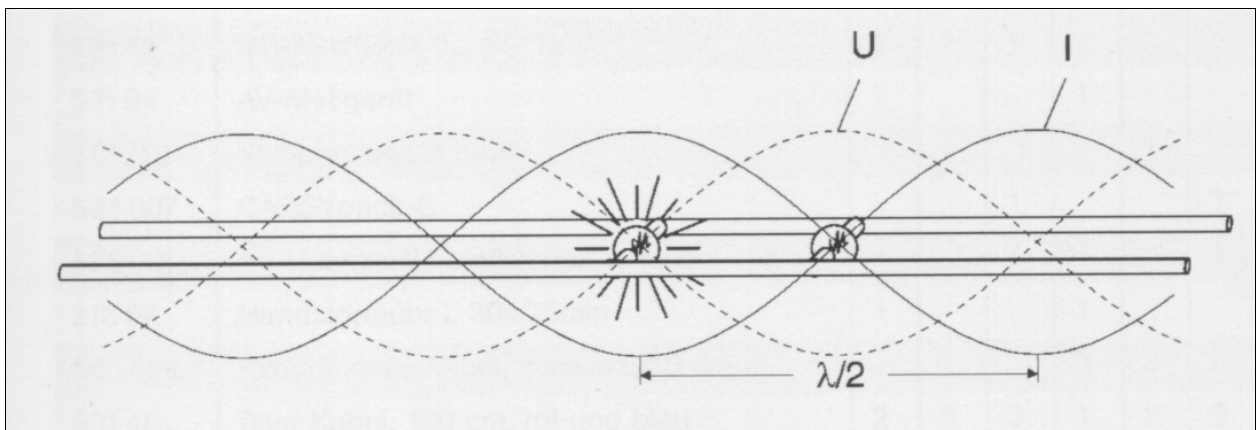


Bild 5.7.4-1: Prinzipzeichnung der stehenden U - & I -Wellen für die Abschlussart a)

2. Wie ist die Lage der Knoten von U im Verhältnis zur Lage der Bäuche von I ?
3. Wie ist die Lage der Bäuche von U im Verhältnis zur Lage der Bäuche von I ?
4. Ermitteln Sie die Wellenlänge λ anhand der gemessenen Werte!
5. Wie wechselt die Lage der Bäuche und Knoten von U & I , wenn die *Lecher*-Leitung von Leerlauf (Abschlussart a) in Kurzschluss (Abschlussart b)) geschaltet wird?
6. Wie verschieben sich die Knoten bzw. Bäuche von U & I bei der Abschlussart c) gegenüber b)? Erklären Sie die Ursache?
Um wie viel ist die *Lecher*-Leitung verlängert worden (ausgedrückt in λ)?
Wie groß muss die Spannung am Kurzschlussende sein?
7. Treten ausgeprägte Bäuche und Knoten bei Abschlussart d) auf? Ja oder Nein?
Warum?

5.8 Dipolantenne

5.8.1 Versuchsziele

- Untersuchung der Abstrahlcharakteristik einer Dipolantenne.
- Untersuchung der Polarisisation und Bestimmung der Polarisationsrichtung der abgestrahlten Dezimeterwellen.
- Untersuchung der Wirkung eines Antennenstabes als Reflektor oder Direktor.

5.8.2 Aufbau

Hinweis:

Die Abstrahlcharakteristik des Dezimeterwellensenders wird durch die Umgebung, besonders durch Metallgegenstände und durch die Position des Experimentators beeinflusst. Auch die Experimentierkabel zwischen Empfangsdipol und Voltmeter können je nach ihrer Ausrichtung die Messung beeinflussen.

Nehmen Sie alle nicht benötigten Versuchsteile vom Tisch, insbesondere die Lecher-Leitung (Hängen Sie diese in die beiden Haken am Rack!).

Treten Sie zum Ablesen der Messwerte bitte einen Schritt zurück.

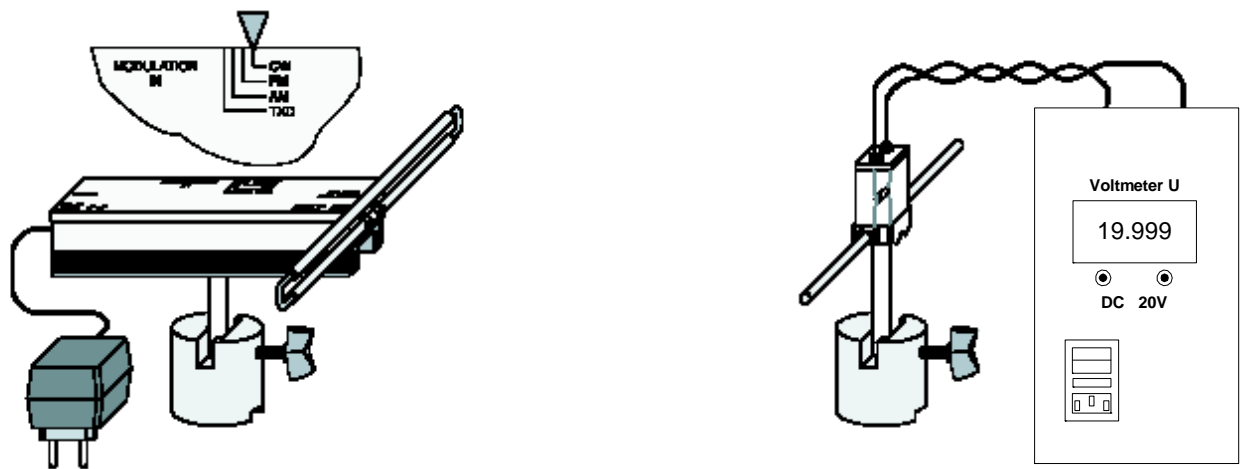


Bild 5.8.2-1: Versuchsaufbau der Dipolantenne

Der Versuchsaufbau ist für die quantitative Messung in Bild 5.8.2-1 dargestellt.

- Schleifendipol auf den Antennenausgang des Dezimeterwellensenders stecken
- Empfangsdipol mit Diode mittels der verdrehten Leitung an den Spannungsmesser für quantitative Experimente schalten bzw. den Empfangsdipol mit Glühbirne bei qualitativen Untersuchungen verwenden (hier verdrehte Leitung **entfernen!**)
- Betriebsart CW wählen!

5.8.3 Durchführung

a) Quantitative Untersuchungen der Abstrahlcharakteristik mit dem Empfangsdipol und der Diode

1. Den Empfangsdipol parallel zum Schleifendipol, geführt auf der Holzschiene, verschieben und die Spannungswerte bei den vorgegebenen Entfernungen in der Tabelle messen.
2. Bei einer Entfernung von ca. 20 cm messen Sie die Spannung für unterschiedliche Verdrehwinkel. Ein Verdrehwinkel von 0° liegt vor, wenn der Empfangsdipol **parallel** zum Sendedipol steht.

b) Qualitative Untersuchungen der Abstrahlcharakteristik mit dem Empfangsdipol und der Glühlampe

3. Bewegen Sie mit der Hand den Empfangsdipol mit der Glühlampe folgendermaßen um den Sendedipol:
 - aa) Empfangsdipol parallel zum Sendedipol auf einem Radius von 20 cm
 - bb) Drehen des Empfangsdipols in festen Punkten des Raumes bezogen auf den Sendedipol mit 0° bis 180° (siehe hierzu Bild 5.8.3-1, Positionen 2a & 2b für 90° oder 1a & 1b für 0°)
 - cc) Bewegen des Empfangsdipols im festen Abstand von 20 cm parallel zum Sendedipol nach oben (siehe hierzu Bild 5.8.3-1, in Abstand von Position 1a).

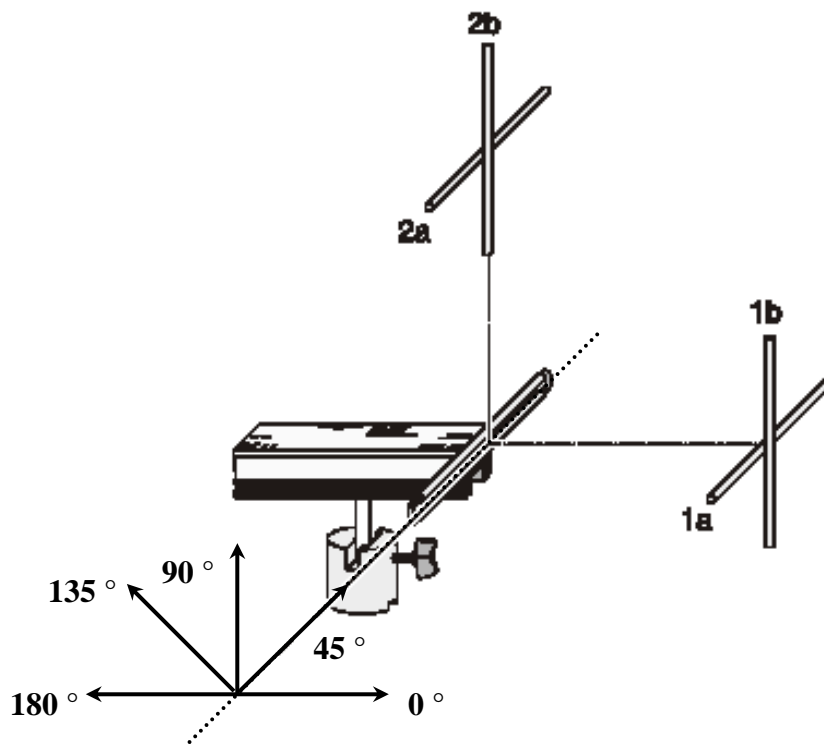


Bild 5.8.3-1: Messung der Abstrahlcharakteristik einer Dipolantenne

c) Untersuchung des Einflusses eines zusätzlichen Antennenstabes als Reflektor

- Empfangsdipol mit Diode etwa 40 cm vom Dezimeterwellensender und Sendedipol entfernt aufstellen und parallel zum Schleifendipol ausrichten.
Antennenstab auf Stativ als Reflektor von hinten (> 40 cm Sendedipol entfernt!) an den Empfangsdipol mit Diode heranführen und Maxima und Minima der angezeigten Spannungen suchen.

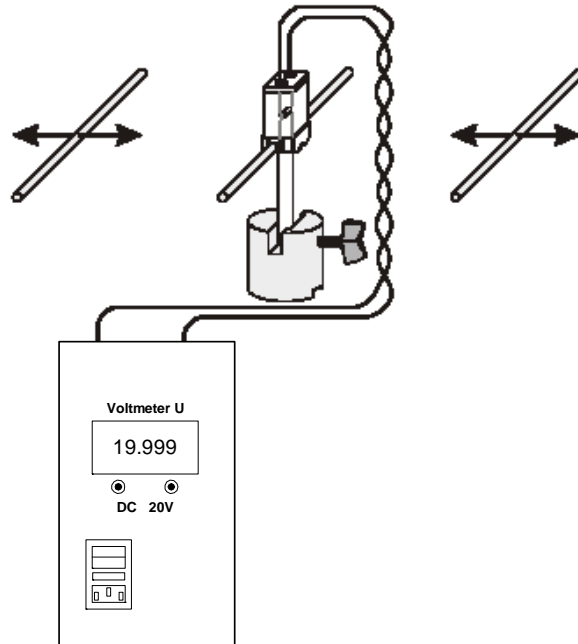


Bild 5.8.3-2: Messung der Wirkung einer Zusatzantenne

5.8.4 Auswertung

- Tragen Sie die gemessenen Werte in die Tabelle 5.8.4-1 ein.
Zeichnen Sie auf Millimeterpapier das Spannungs-Entfernungs-Diagramm $U = f(l)$! Was können Sie bzgl. des Spannungsverlaufes aussagen?

Tabelle 5.8.4-1: Messwerte der Spannung in Abhängigkeit des Weges

l in cm	5	10	15	20	25	30	40	50	60	80	100
U in V											

- Nehmen Sie die Messwerte in der Tabelle 5.8.4-2 auf.
Tragen Sie auf Millimeterpapier die Richtcharakteristik in Form von Spannungszeigern in der räumlichen Ebene (x -Achse entspricht 0° , y -Achse entspricht 90°) auf! Interpretieren Sie den Verlauf!

Tabelle 5.8.4-2: Messwerte der Spannung in Abhängigkeit des Winkels

α in $^\circ$	0	22,5	45	67,5	90	-67,5	-45	-22,5	-90
U in V									

3. Was können Sie bei aa), bb) und cc) feststellen?
Was verstehen Sie allgemein unter Richtcharakteristik?
4. Notieren Sie die maximalen bzw. minimalen Spannungen und die Position anhand des Maßbandes in der gegebenen Tabelle 5.8.4-3.

Tabelle 5.8.4-3: Messwerte der Spannung in Abhängigkeit des Weges und eines zusätzlichen Antennenstabes

l in cm	40										
U in V											

An welcher Stelle muss der Reflektor angebracht werden, um das ausgesendete Signal optimal zu verstärken?

Wo wirkt der zusätzliche Antennenstab als Reflektor, wo als Direktor?

5.9 Vorbereitungsaufgaben

SERIENSCHWINGKREIS

Gegeben ist ein Serienschwingkreis, bestehend aus einem Kondensator mit einer Kapazität von $1 \mu\text{F}$, einer Spule mit einer Induktivität von 193 mH und einem Spulenwiderstand von 4.6Ω .

1. Bestimmen Sie den Phasenverschiebungswinkel φ zwischen Strom und Spannung im Serienschwingkreis bei den Frequenzen: a) $f = 0$, b) bei der Resonanzfrequenz f_0 , und c) für $f \rightarrow \infty$! d) Skizzieren Sie das Diagramm $\varphi(\omega)$ qualitativ!
2. Berechnen Sie die Resonanzfrequenz f_0 und die zugehörige Kreisfrequenz ω_0 für den a) verlustlosen und b) verlustbehafteten Serienschwingkreis! c) Wie groß ist die Impedanz bei Resonanz im Fall a) und b)?
3. a) Welche Güte besitzt der verlustbehaftete Serienschwingkreis? b) Wie ist die Halbwerts-Bandbreite $\Delta\omega$ definiert? c) Geben Sie die Formel an. d) Wie groß ist $\Delta\omega/\omega_0$? e) Wie kann die Resonanzkurve $I(\omega)$ „schärfer“ ausgebildet werden, indem die Halbwerts-Bandbreite halbiert wird, ohne die Resonanzkreisfrequenz ω_0 zu verändern?
4. a) Wo liegt die Nutzspannung bei Anwendung des verlustbehafteten Serienschwingkreises als Tiefpass, an der Spule oder am Kondensator? b) Berechnen Sie dazu das Verhältnis der Ausgangs- zu der Eingangsspannung: (i) allgemein, (ii) bei der Resonanzfrequenz. c) Geben Sie den Zahlenwert zu (ii) an!
5. a) Berechnen Sie die Zeitkonstante T des verlustbehafteten Serienschwingkreises beim Einschwingvorgang im aperiodischen Grenzfall! b) Wie groß sind die Frequenz und die Kreisfrequenz, bei der die Spannungen an der Spule (inklusive Spulenwiderstand) und am Kondensator gleich groß sind? c) Um wie viel Prozent weicht diese Frequenz von der Resonanzfrequenz ab?
6. Geben Sie die Kreisfrequenzen des verlustbehafteten Serienschwingkreises a) ω_C (die Spannung am Kondensator ist dabei am größten) und b) ω_L (die Spannung an der Spule ist dabei am größten) an! c) Um wie viel Prozent weichen diese Kreisfrequenzen von der

Resonanzkreisfrequenz ω_0 ab? d) Skizzieren Sie dazu den qualitativen Verlauf von $U_{R,L}$, U_C in Abhängigkeit von ω !

PARALLELSCHWINGKREIS

Gegeben ist ein Parallelschwingkreis, bestehend aus einem verlustfreien Kondensator C mit einer Kapazität von $22 \mu\text{F}$, einer verlustbehafteten Spule mit einer Induktivität von 193 mH und einem Spulenwiderstand von $R_L = 4.6 \Omega$.

7. Berechnen Sie die Resonanzfrequenz f_{01} und die Resonanzkreisfrequenz ω_{01} , sowohl a) für den verlustlosen als auch b) für den verlustbehafteten Parallelschwingkreis bei Phasenresonanz, d.h. der Strom i ist in Phase mit u bei $\omega = \omega_{01}$!
c) Begründen Sie den Unterschied der Werte f_{01} bei a) und b)!
8. a) Wie groß ist die maximale Impedanz des verlustlosen Parallelschwingkreises? b) Wie groß ist die maximale Impedanz des verlustbehafteten Parallelschwingkreises mit $R_C = R_L = 4.6 \Omega$ bei der Annahme der Phasenresonanz (= Strom i und die Spannung u sind in Phase).
c) Berechnen Sie den Wert bei $R_C = R_L$ für den verlustarmer Schwingkreis. d) Überprüfen Sie, ob der Schwingkreis verlustarm ist, also $R_L = R_C = R < \frac{1}{10} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$! e) Berechnen Sie Z_{\max} mit der Näherungsformel für den verlustarmen Parallelschwingkreis! Wie groß ist der Fehler in Prozent zu b)?
9. a) Wie groß ist das Verhältnis des „Ohm’schen Reststroms“ zur Eingangsspannung beim verlustbehafteten Parallelschwingkreis (hier: $R_C = R_L = 4.6 \Omega$)? b) Wie groß ist der Ohm’sche Reststrom bei einer Spannung $U = 100 \text{ V}$ (Effektivwert)? c) Geben Sie den qualitativen Verlauf von I , I_C , I_L in Abhängigkeit von C als Skizze an!

LECHER-LEITUNG

10. Eine Zweidrahtleitung aus zwei parallelen hohlen Rundleitern hat einen Leiter-Mittenabstand von $2a = 26 \text{ mm}$. Der Leiterradius beträgt $R = 3,5 \text{ mm}$. Die Wandstärke der Hohlleiter kann gegenüber dem Radius vernachlässigt werden ($d \ll R$). Berechnen Sie a) den Kapazitäts- und b) den Induktivitätsbelag der Leitung. c) Wie hoch ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit v der Wanderwelle? d) Welcher Unterschied besteht zur maximal möglichen Ausbreitungsgeschwindigkeit?
11. a) Berechnen Sie die Wellenlänge λ der elektromagnetischen Wanderwelle auf einer Zweidrahtleitung. Die, die Leitung speisende Spannungsquelle („Sender“) arbeitet mit $f = 433.93 \text{ MHz}$! Die Welle wandert mit Vakuum-Lichtgeschwindigkeit $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$! b) Wie lang muss die Leitung sein, um zumindest eine Periode einer stehenden Welle ermöglichen zu können? c) Wie groß muss diese Leitungslänge sein, um zumindest eine Periode einer stehenden Welle ermöglichen zu können, falls die Sendefrequenz auf 50 Hz reduziert wird? d) Wie viele Knoten und Schwingungsbäuche der Spannung zwischen den Leitern sind dann entlang der Leitung festzustellen, wenn diese am Leitungsende offen ist?

12. a) Wie groß ist der Wellenwiderstand einer in Luft verlegten Zweidrahtleitung mit $L' = 744.3 \frac{\text{nH}}{\text{m}}$ und $C' = 14.95 \frac{\text{pF}}{\text{m}}$? b) Um wie viel Prozent verändert sich der Wellenwiderstand der Leitung gegenüber seinem Wert in Luft, falls nun $\epsilon_r = 4$ ist? c) Wie groß ist nun der Wellenwiderstand?
13. Eine verlustlose Zweidrahtleitung (Kapazitätsbelag $C' = 14.95 \frac{\text{pF}}{\text{m}}$, Induktivitätsbelag $L' = 744.3 \frac{\text{nH}}{\text{m}}$) wird mit einer Spannungsquelle gespeist, die mit der Frequenz $f = 433.93$ MHz arbeitet. a) Wie lang muss die Leitung minimal sein, damit eine stehende Welle mit der Viertelwellenlänge auftritt? b) Wie groß ist die Eigenfrequenz der Leitung bei dieser Länge? c) Wie groß wäre die Eigenfrequenz bei einer Leitungslänge von $l = 100$ cm? d) Berechnen Sie alternativ zu b) die Eigenfrequenz, wenn Sie die Leitung näherungsweise als verlustlosen Serienresonanzkreis mit $C = C' \cdot l$ und $L = L' \cdot l$ auffassen! e) Wie groß ist die Abweichung des Ergebnisses zu c) in Prozent?
14. Die *Lecher*-Leitung wird reflexionsfrei abgeschlossen. Ein Spannungsabgriff mit angeschlossener Glühlampe wird zur Erfassung des Signals verwendet. a) Wie leuchtet die Glühlampe entlang der Leitung? b) Warum?
15. Skizzieren Sie die stehenden Wellen der Strom- und Spannungsverteilung auf der Leitung mit einem a) offenen, und b) kurzgeschlossenen Leitungsende! Nehmen Sie an, dass $l = \frac{5}{4} \cdot \lambda$ gilt!
16. Erfasst a) ein Tastkopf, b) eine Induktionsschleife am besten einen Spannungs- oder ein Strombauch der stehenden Wellen auf einer Zweidraht-Leitung, wenn die Helligkeit des angeschlossenen Lämpchens als Erfassungskriterium verwendet wird? Warum?
17. Skizzieren Sie den Einschwingvorgang einer verlustlosen homogenen Leitung mit offenem Leitungsende während einer Einschwingperiode nach dem sprungförmigen Einschalten einer Gleichspannung U_0 in folgender Weise: a) Skizzieren Sie die Spannungsverteilung entlang der Leitung! b) Leiten Sie daraus die Spannungsverteilung am Ausgang ab (Skizze)! c) Skizzieren Sie die Spannung am Eingang! d) Wie groß ist der Reflexionsfaktor am Leitungsende? e) Wie groß ist die Schwingungsperiode am Ausgang bei $v = c_0$ und $l = 10$ m? f) Wie groß ist die Einschwingfrequenz der Spannung?
18. Eine Leitung wird mit einer Impedanz Z abgeschlossen, die 80% des Wellenwiderstandes ist. Wie groß sind a) der Reflexions- und b) der Brechungs faktor? Wie groß sind beide Werte bei c) $Z = 0$ und d) $Z \rightarrow \infty$?

DIPOLANTENNE

19. a) Erläutern Sie die Funktionsweise (Feldabstrahlung) des mit Wechselspannung gespeisten Dipols in einzelnen Schritten ähnlich wie im Skript. b) Wieso funktioniert die Abstrahlung bei Gleichstromspeisung nicht?
20. a) Wie lang muss eine Dipolantenne eines $(\lambda/2)$ -Dipols sein, wenn die Wellenlänge $\lambda = 60$ cm beträgt? b) Berechnen Sie die zugehörige Frequenz! c) Warum hat ein λ -Dipol etwa die vierfache Eingangsimpedanz eines $(\lambda/2)$ -Dipols?

21. Ein ($\lambda/2$)-Dipol mit eingebautem Glühlämpchen dient als „Empfänger“ in einer gewissen Entfernung von einem UHF-Schwingkreis ohne angeschlossenen Dipol. a) Wie leuchtet das Lämpchen am Empfänger? b) Warum? Der Dipol wird nun an die UHF-Quelle angeschlossen. c) In welche Richtung - bezüglich der Richtung der Achse dieses Sendedipols - ist die abgestrahlte elektromagnetische Energie Null, und in welche Richtung ist sie maximal? d) Wie liegen die Schwingungsrichtungen der E - und H -Felder, parallel oder senkrecht zu der Achse des Sendedipols?