

# ETiT – Praktikum

## Durchsprache der elektrotechnischen Grundlagen

Prof. Dr.-Ing. habil. Dr. h.c. Andreas Binder

Tel. : 06151 / 16-2167

[abinder@ew.tu-darmstadt.de](mailto:abinder@ew.tu-darmstadt.de)

# ETiT1 – Praktikum

## Versuch 5 Schwingkreise und Wellenausbreitung

Versuchsbetreuer:  
Dipl.-Ing. Mehran Mirzaei  
Raum S3|10/442  
Tel. : 06151 / 16-4294  
E-Mail : [mmirzaei@ew.tu-darmstadt.de](mailto:mmirzaei@ew.tu-darmstadt.de)

# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Inhalt

- Serienschwingkreis
- Parallelschwingkreis
- Wellenleiter
- Einfache Dipolantennen

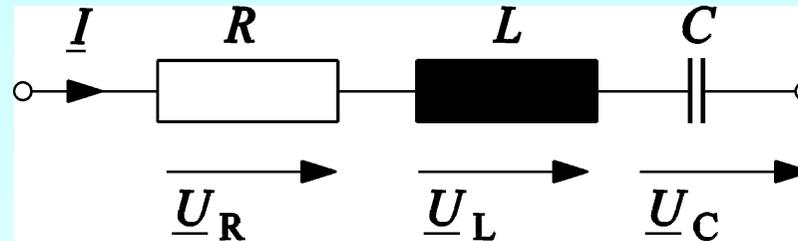
# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Schwingungsfähige Systeme

- **Schwingungsfähiges System:** – zwei Energiespeicher: Kapazität (elektrisches Feld) und Induktivität (magnetisches Feld)
- **Eigenschwingung:** Strom und Spannung schwingen mit der Eigenfrequenz nach einer vorübergehenden Anregung.
- Die **Dämpfung** der Schwingung erfolgt durch Verluste (im Widerstand)
- Bei zu großer Dämpfung: Keine Schwingung, sondern **aperiodischer Ausgleichsvorgang**
- **Erzwungene Schwingung:** Periodische Anregung von außen mit beliebiger Anregungsfrequenz – System schwingt mit dieser Anregungsfrequenz
- **Resonanz:** Anregungsfrequenz = Eigenfrequenz: Maximale Schwingamplitude (ohne Dämpfung: unendlich groß)

# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## 5.1 Serienschwingkreis



- a) **Einschwingvorgang:** Erfolgt nach dem Einschalten mit Eigenfrequenz, Lösen der **HOMOGENEN** und **PARTIKULÄREN** Differentialgleichung

$$R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i \cdot dt = 0 \qquad R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i \cdot dt = u$$

- b) Sinusförmig **eingeschwungener Zustand** (z. B. erzwungene Schwingung): Lösen der **PARTIKULÄREN** Schwingungsdifferentialgleichung; kann auch mit komplexer Rechnung bestimmt werden

$$R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i \cdot dt = u \qquad R \cdot \underline{I} + j\omega L \cdot \underline{I} + \frac{1}{j\omega C} \cdot \underline{I} = \underline{U}$$

# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Serienschwingkreis - Einschwingvorgang

$$R \cdot i + L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i \cdot dt = 0 \quad \longrightarrow \quad L \cdot \frac{d^2i}{dt^2} + R \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot i = 0$$

- Lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten:
- **Homogene Lösung**  $i_h$ : Summe aus Exponentialfunktionen ("**Eigenfunktionen**")
- Anzahl der Funktionen = Ordnung der Differentialgleichung:

$$i_h(t) = \underline{C}_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + \underline{C}_2 \cdot e^{\lambda_2 t}$$

- Konstante  $\underline{C}_1$ ,  $\underline{C}_2$  werden aus der **Anfangsbedingung**  $i(t=0)$  ermittelt.
- "**Eigenwerte**"  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  durch Einsetzen der Lösung in die DGL errechnen

$$\lambda^2 + \frac{R}{L} \cdot \lambda + \frac{1}{LC} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Serienschwingkreis – Eigenwerte $\underline{\lambda}_1, \underline{\lambda}_2$

a) **Starke Dämpfung:** Aperiodischer Ausgleichsvorgang mit zwei Zeitkonstanten:

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 > \frac{1}{LC} \quad T_1 = -\frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}} \quad T_2 = -\frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}}$$

b) **Aperiodischer Grenzfall:** Ausgleichsvorgang mit EINER Zeitkonstante:

$$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad T = -\frac{1}{\lambda_1} = -\frac{1}{\lambda_2} = 2L / R$$

c) **Schwache Dämpfung:** Gedämpfter Einschwingvorgang mit Eigenfrequenz, eine Zeitkonstante

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC} \quad \underline{\lambda}_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = -\frac{1}{T} \pm j \cdot \omega_d$$

# Schwingkreise und Wellenausbreitung

**Beispiel: Einschalten einer Gleichspannung  $u(t) = U$**

$$L \cdot \frac{d^2 i}{dt^2} + R \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot i = \frac{du(t)}{dt} = \frac{dU}{dt} = 0$$

$$i_h(t) = D_1 \cdot e^{-t/T} \cos \omega_d t + D_2 \cdot e^{-t/T} \sin \omega_d t \quad i_p(t) = 0$$

$$i = i_h + i_p$$

**Anfangsbedingung:** VOR dem Einschalten:  $t = 0^-$ :  $i(0^-) = 0$ ,  $u(0^-) = 0$

Unmittelbar NACH dem Einschalten:  $t = 0^+$ :

$$W_C = C \cdot u_C^2 / 2 = 0 \Rightarrow u_C(0^+) = 0 \quad W_L = L \cdot i^2 / 2 = 0 \Rightarrow i(0^+) = 0$$

$$u_C(0^+) + u_R(0^+) + u_L(0^+) = 0 + 0 + u_L(0^+) = U$$

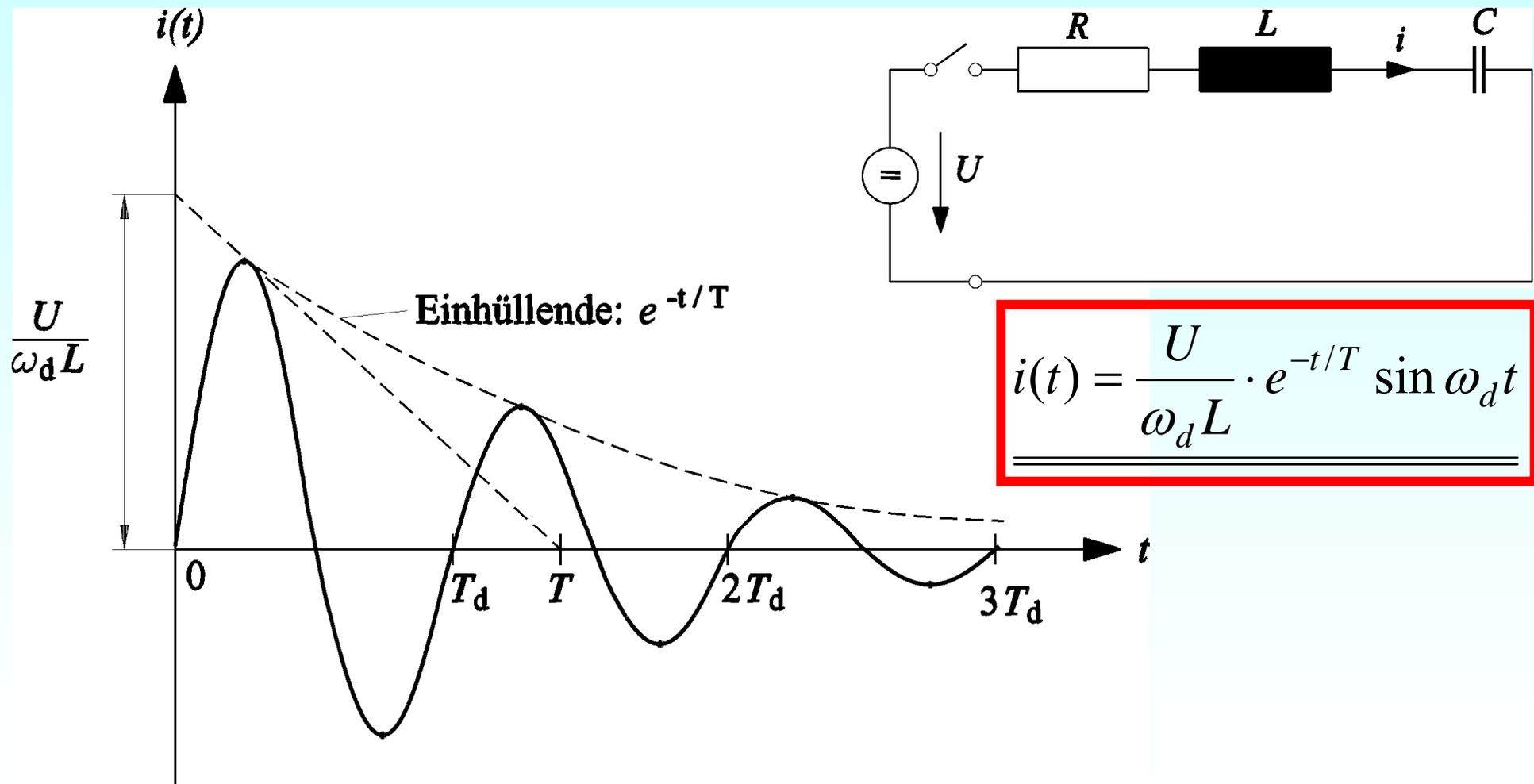
Konstante  $D_1$ ,  $D_2$  werden aus Anfangsbedingung bestimmt:

$$i(0^+) = D_1 \cdot e^{-0/T} \cos 0 + D_2 \cdot e^{-0/T} \sin 0 = 0 \Rightarrow D_1 = 0$$

$$di/dt(0^+) = U/L \Rightarrow D_2 = \frac{U}{\omega_d L}$$

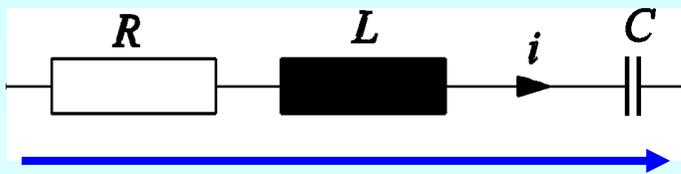
# Schwingkreise und Wellenausbreitung

Beispiel: Einschalten einer Gleichspannung  $u(t) = U$



# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Erzwungene Stromschwingung durch Anlegen einer Sinus-Wechselspannung



$$L \cdot \frac{d^2 i}{dt^2} + R \cdot \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \cdot i = \frac{du(t)}{dt} = -\omega \hat{U} \cdot \sin \omega t$$

$$u(t) = \hat{U} \cdot \cos \omega t \quad - \text{Partikuläre Lösung: } i = i_p(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

Bestimmung der Konstanten  $A$ ,  $B$  durch Einsetzen von  $i_p$  in die DGL und Vergleich mit der rechten Seite („Koeffizientenvergleich“):

$$\left(-\omega^2 LA + \omega RB + \frac{A}{C}\right) \cos \omega t + \left(-\omega^2 LB - \omega RA + \frac{B}{C}\right) \sin \omega t = -\omega \hat{U} \sin \omega t$$

$$A = \frac{\omega^2 RC^2}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2} \cdot \hat{U}$$

$$B = -\frac{1 - \omega^2 LC}{\omega RC} \cdot A$$

$$i(t) = \frac{U}{\sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}} \cdot \cos(\omega t - \varphi(\omega))$$

# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Erzwungene Stromschwingung

$$u(t) = \hat{U} \cdot \cos \omega t$$

$$i(t) = \frac{U}{\sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}} \cdot \cos(\omega t - \varphi(\omega))$$

- **Phasenverschiebung** zw. Strom und Spannung je nach  $R$ ,  $L$ ,  $C$  positiv / negativ:

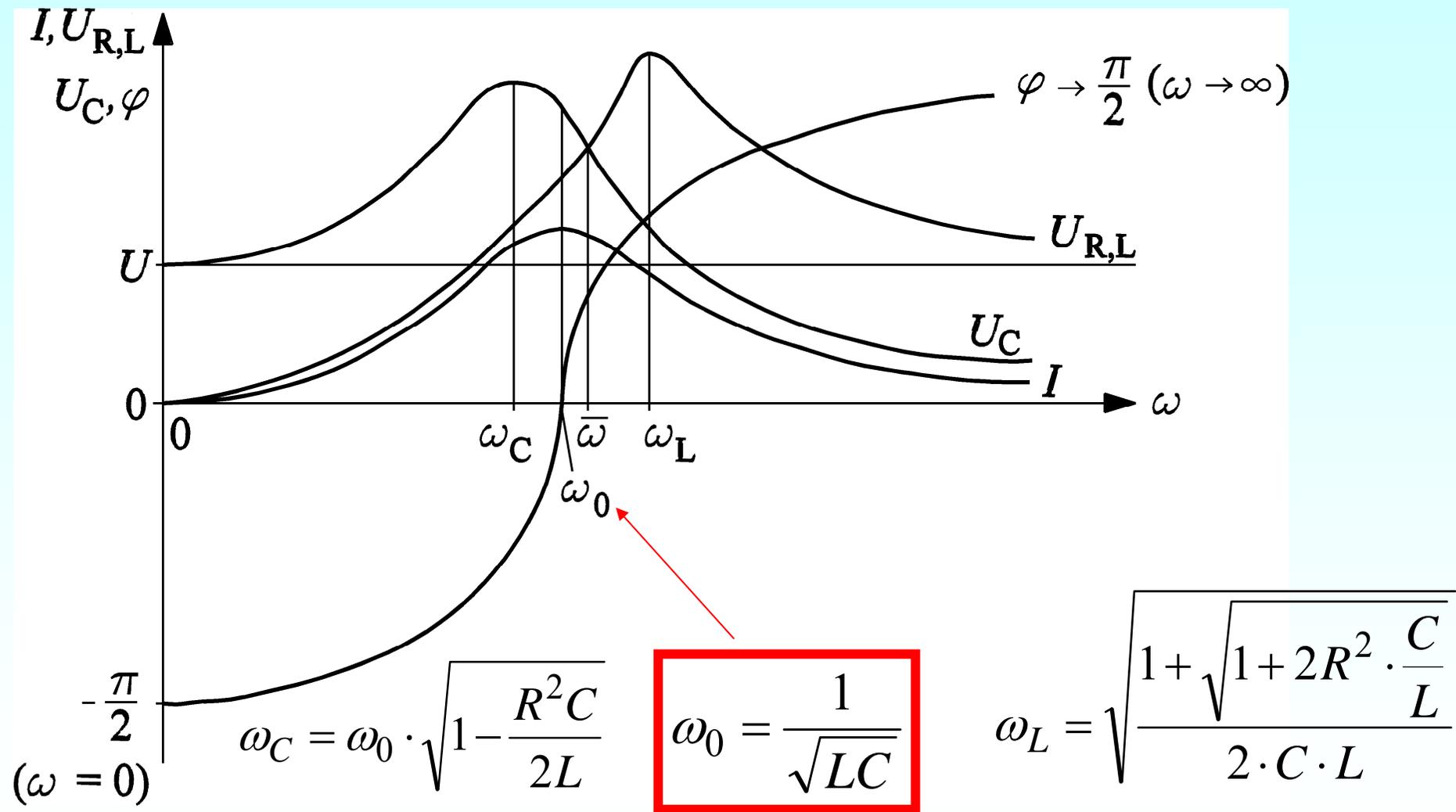
$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega RC}\right)$$

- **Stromamplitude maximal** bei der Anregefrequenz:  $\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

- Wenn Anregefrequenz  $f =$  **Resonanzfrequenz**  $f_d = f_0$ : Die Teilspannungen an Kondensator und Spule sind in Gegenphase und heben sich auf. Der Schwingkreis wirkt rein *ohm*'sch: Strom und Spannung sind in Phase:  $I = U/R$ ,  $\varphi = 0$ .

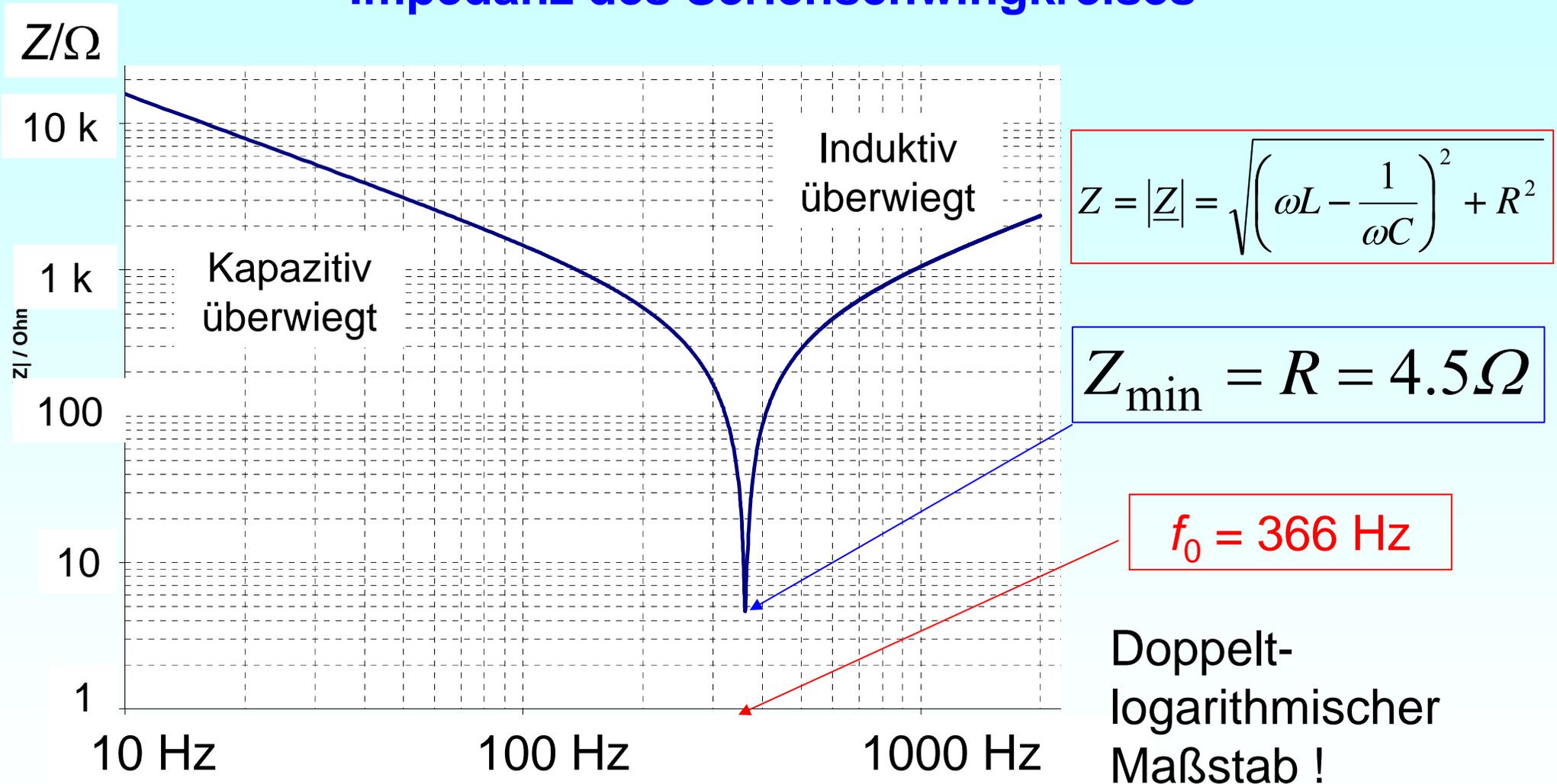
# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Stromresonanz



# Schwingkreise und Wellenausbreitung

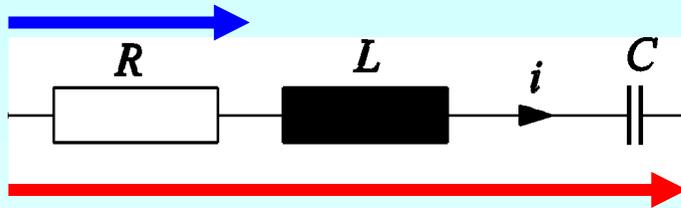
## Impedanz des Serienschwingkreises



# Schwingkreise und Wellenausbreitung

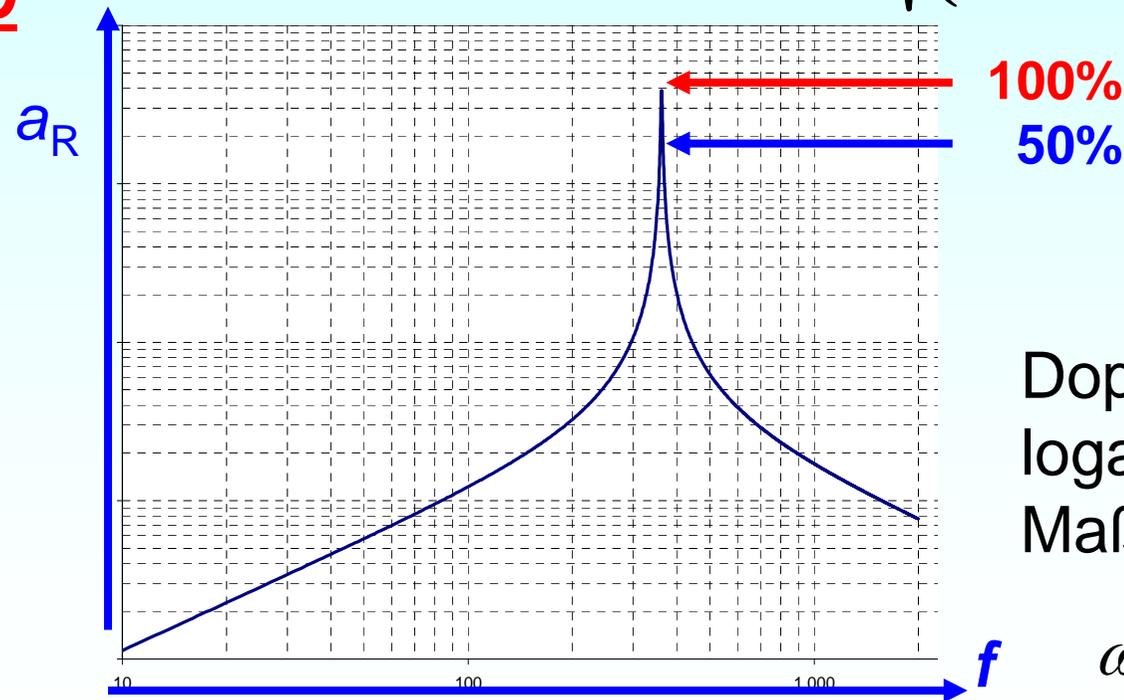
## Serienschwingkreis als Bandpass-Filter

Ausgang  $\underline{U}_R$



Eingang  $\underline{U}$

$$a_R = \frac{U_R}{U} = \frac{R \cdot I(\omega)}{U} = \frac{R}{\sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}}$$



Doppelt-  
logarithmischer  
Maßstab !

$$\omega = 2\pi \cdot f$$

# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Bandpass-Filter – Halbwertsbandbreite $\Delta\omega$

$$a_R = 0.5 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{R}{\sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}} \Rightarrow \omega_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{CL} + \frac{3R^2}{4L^2}} \pm \frac{\sqrt{3}R}{2L}$$

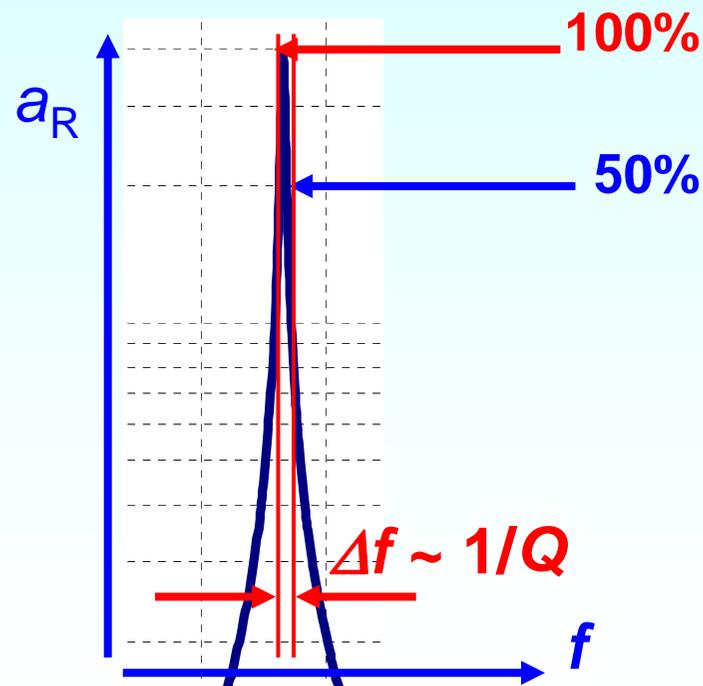
$$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = \frac{\sqrt{3}R}{L}$$

$$\omega_0 / \Delta\omega = \frac{1}{\sqrt{3}R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Q: Güte des Schwingkreises:

$$Q = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\Delta\omega \sim 1/Q$$



Doppelt-logarithmischer Maßstab !

$$\omega = 2\pi \cdot f$$

# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Bandpass-Filter – Schwingkreisgüte $Q$

- Die Güte  $Q$  ist umso größer, je geringer die Dämpfung  $R$  ist.
- Der verlustlose Schwingkreis hat unendlich hohe Güte.
- Ein Schwingkreis mit der Güte  $Q = 10$  schwächt Spannungen, deren Frequenz um weniger als

$$\pm \frac{\Delta\omega}{2} = \pm \frac{\sqrt{3}R}{2} \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot \omega_0 \cong \pm R \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot \omega_0 = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{\omega_0}{10}$$

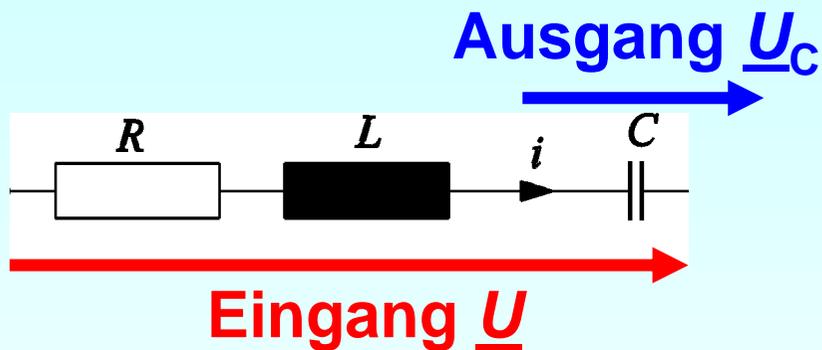
von der Resonanzfrequenz abweichen, weniger als 50% ab.

- Das Filter wirkt als "**Bandpass**" mit der Bandbreite  $\Delta\omega \cong 2\omega_0 / Q$
- Es lässt Spannungen mit Frequenzen  $\omega_0 \pm \omega_0 / Q$  um weniger als 50% abgeschwächt passieren.

# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Serienschwingkreis als Tiefpass-Filter

- Spannung an dem Kondensator als Nutzsignal: Abdämpfungsfunktion  $a_C$



$$a_C = \frac{U_C(\omega)}{U} = \frac{I(\omega)}{U \cdot \omega C} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$
$$a_C = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 C^2 R^2}}$$

a) **Tiefe Frequenz:**  $\omega \ll \omega_0$ :  $\omega \cong 0$ :  $a_C \cong 1$ : Spannungen unabgedämpft übertragen (**Tiefpass**)

b) **Hohe Frequenz:**  $\omega \gg \omega_0$ : Spannungen stark abgedämpft:  $a_C \sim 1/(\omega/\omega_0)^2$

c) Dazwischen Resonanzüberhöhung bei  $\omega_C = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{2L}} \approx \omega_0$

# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## BODE-Diagramm des Tiefpass-Filters

**Bode-Diagramm:** doppeltlogarithmische Darstellung von  $U_C/U$  als Pegel  $L$  :

$$L = 20 \cdot \lg \left| \frac{U_C(\omega)}{U} \right| = 20 \cdot \lg(a_C(\omega))$$

$$\omega / \omega_0 \ll 1: \quad L = 20 \cdot \lg|a_C| = 20 \cdot \lg|1| = 0$$

$$\omega / \omega_0 \gg 1: \quad L = 20 \cdot \lg|a_C| \cong 20 \cdot \lg \left| \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right| = -40 \cdot \lg \left| \frac{\omega}{\omega_0} \right|$$

**Beispiel:** Frequenz-Verzehnfachung („1 Dekade“): Pegel sinkt um 40 dB !

$$L \approx -40 \cdot \lg \left| \frac{\omega}{\omega_0} \right| = -40 \cdot \lg|10| = -40 \text{ dB}$$

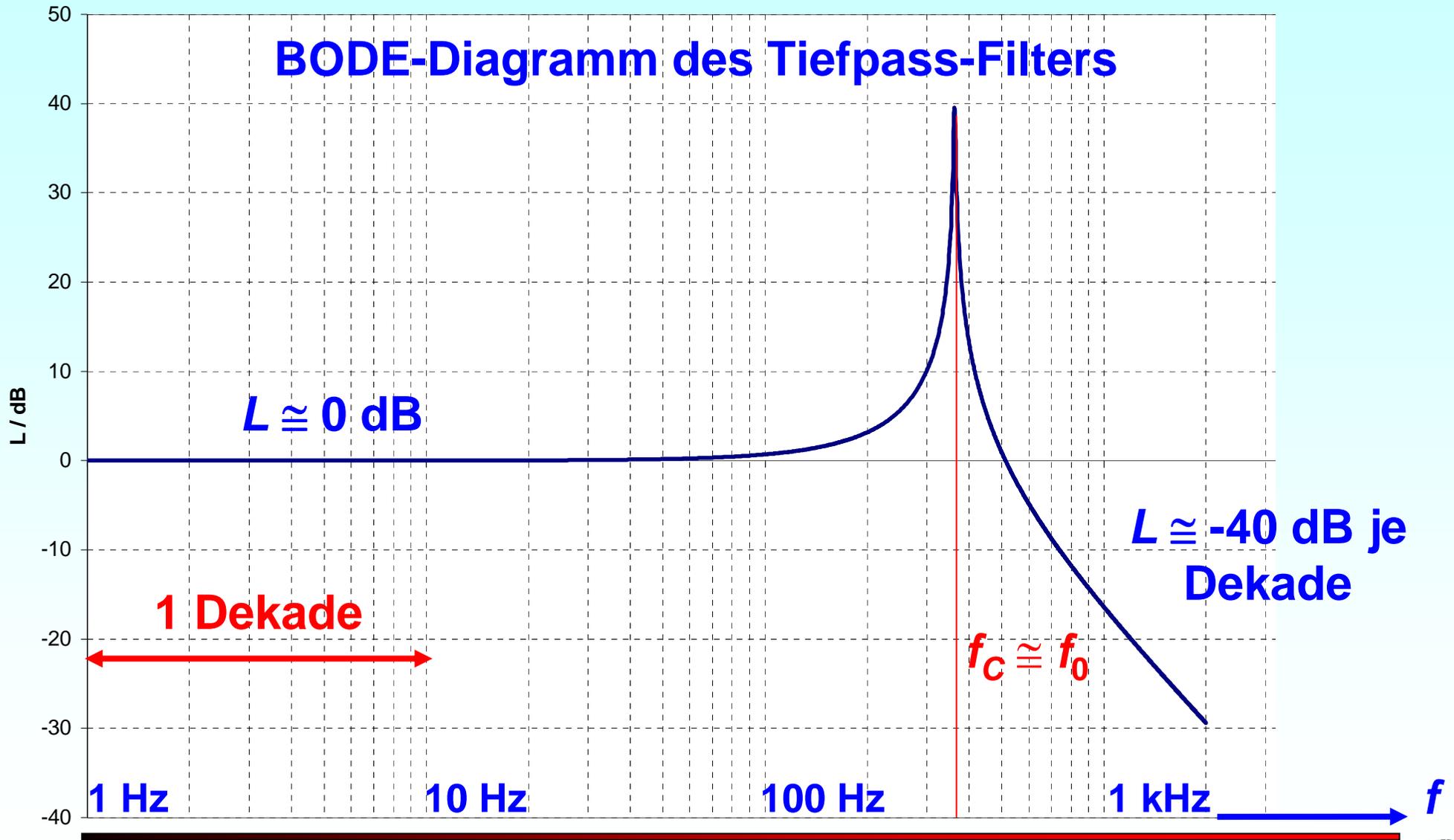
**Fazit:**

Bei hohen Frequenzen wird die Spannung am Kondensator **stark abgeschwächt**.

# Schwingkreise und Wellenausbreitung

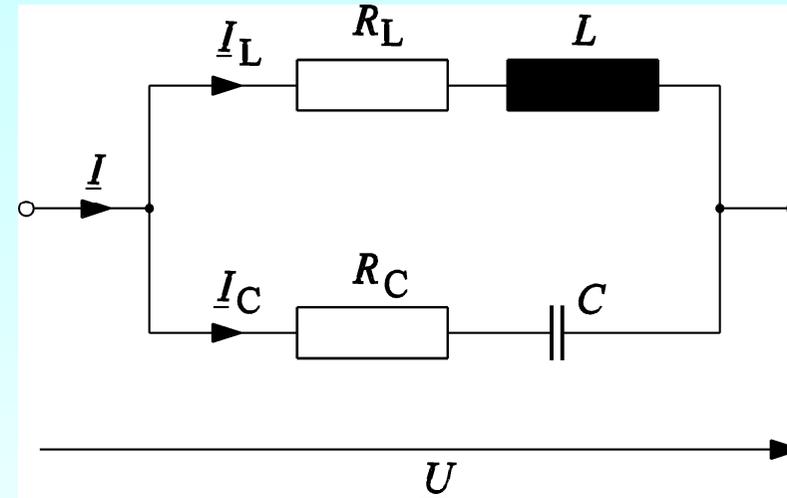
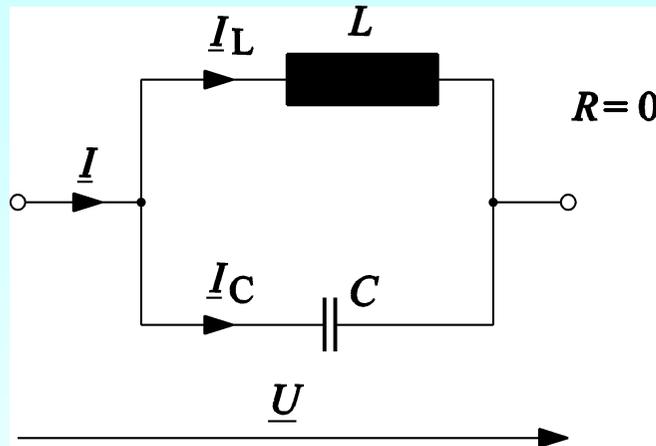
$L / \text{dB}$

## BODE-Diagramm des Tiefpass-Filters



# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## 5.2 Parallelschwingkreis



Verlustloser Parallelschwingkreis

Verlustbehafteter Parallelschwingkreis

**Parallelresonanz bei  $R > 0$ :** Zwei Arten:

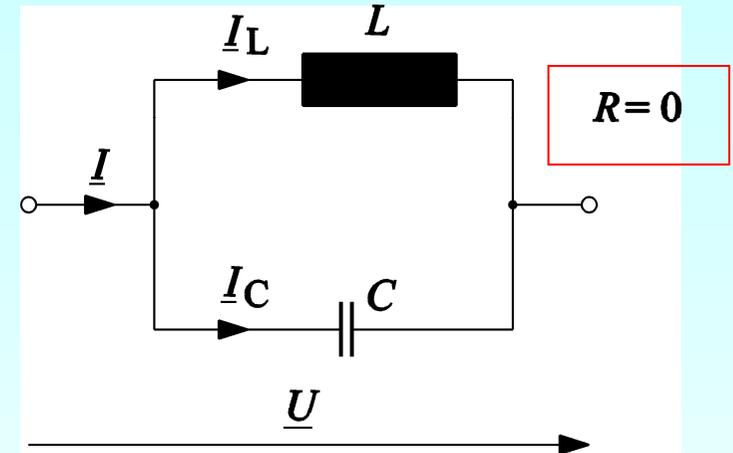
- 1) Kreis-Frequenz  $\omega_{01}$ : **Phasenverschiebungswinkel** zwischen Gesamtstrom  $I$  und Spannung  $U$  ist **Null** (wie bei Serienschwingkreis).
- 2) Kreis-Frequenz  $\omega_{02}$ : **Gesamtstrom**  $I$  wird **minimal** (entspricht Resonanz des verlustlosen Parallelschwingkreis: Minimalstrom Null !).

# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Verlustloser Parallelschwingkreis

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} = \frac{1}{\frac{1}{j\omega L} + j\omega C} = \frac{j}{\frac{1}{\omega L} - \omega C}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} : \underline{Z}(\omega_0) \rightarrow \infty$$



**Resonanz:** Summenstrom  $I = 0$ ! Teilströme  $I_C$  und  $I_L$  fließen gegenphasig!

$$\underline{I}_L = \frac{\underline{U}}{j\omega_0 L} = -j \frac{\underline{U}}{\sqrt{L/C}} = -\underline{I}_C$$

Verlustloser Schwingkreis:

Resonanzfrequenz:

$$f_0 = 1/\sqrt{LC}$$

Serienschwingkreis

Parallelschwingkreis

Impedanz:

Null

Unendlich (**Sperrkreis**).

# Schwingkreise und Wellenausbreitung

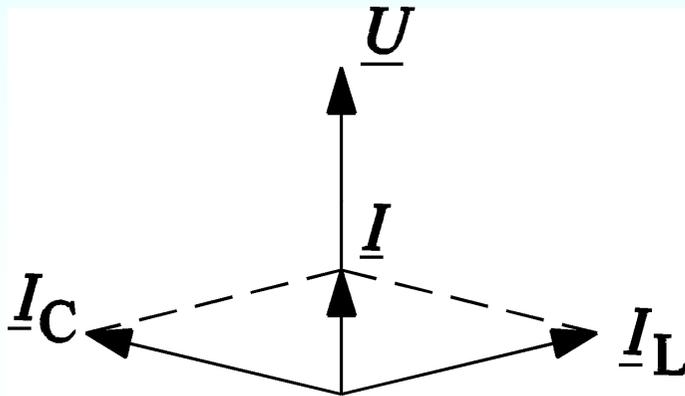
## Parallelresonanz

1) Kreis-Frequenz  $\omega_{01}$ :

$$R_L \neq R_C : \omega_{01} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{\frac{L - CR_L^2}{L - CR_C^2}}$$

$$R_L = R_C : \omega_{01} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$\varphi = 0^\circ, R_L = R_C$ :



2) Kreis-Frequenz  $\omega_{02}$ :

$$R_L = R_C : \omega_{02} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$R_C = 0, R_L = R : \omega_{02} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{\sqrt{1 + \frac{2R^2C}{L}} - \frac{R^2C}{L}}$$

# Schwingkreise und Wellenausbreitung

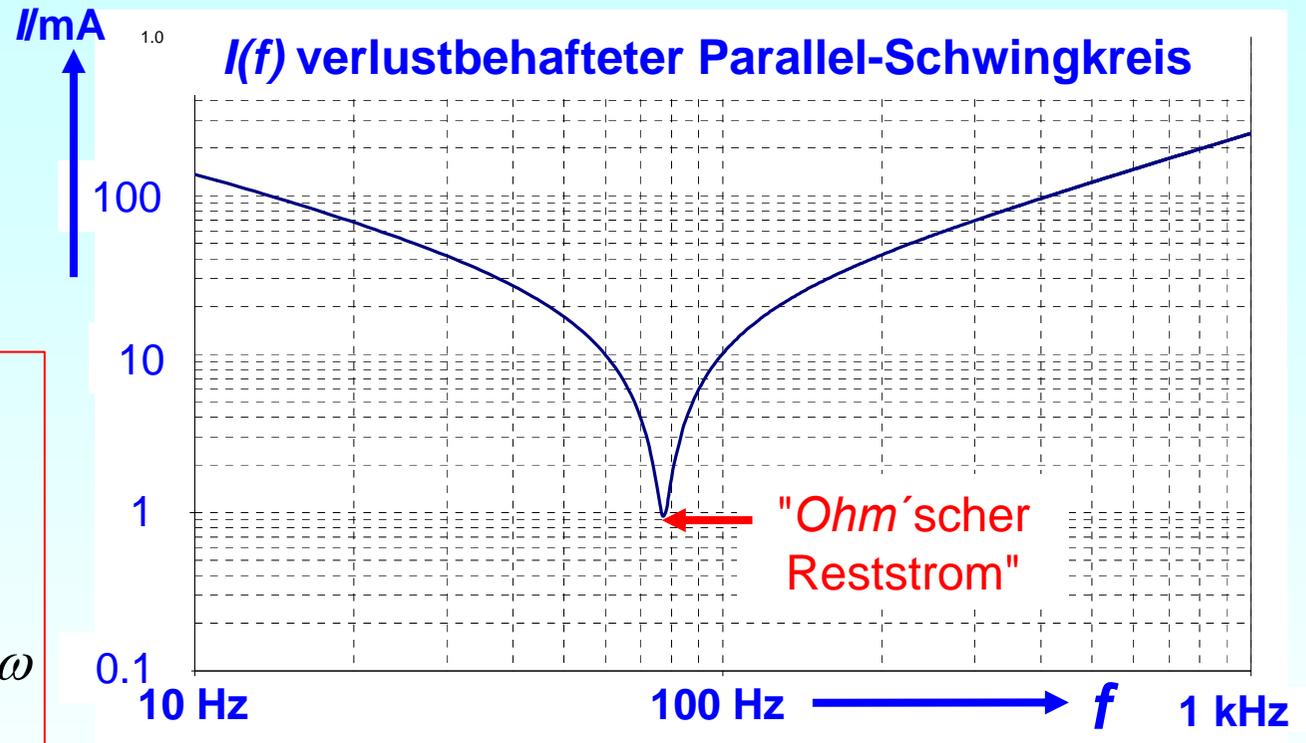
## Resonanzkurve $I(f)$ des Parallel-Schwingkreises

Bei  $R_L = R_C = 0$ :

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}}{\frac{1}{\frac{1}{j\omega L} - \omega C}}$$

$$\Rightarrow \omega \ll \omega_0 : \underline{I} \cong \frac{\underline{U}}{j\omega L} \sim \frac{1}{\omega}$$

$$\Rightarrow \omega \gg \omega_0 : \underline{I} \cong \frac{\underline{U}}{-j/(\omega C)} \sim \omega$$

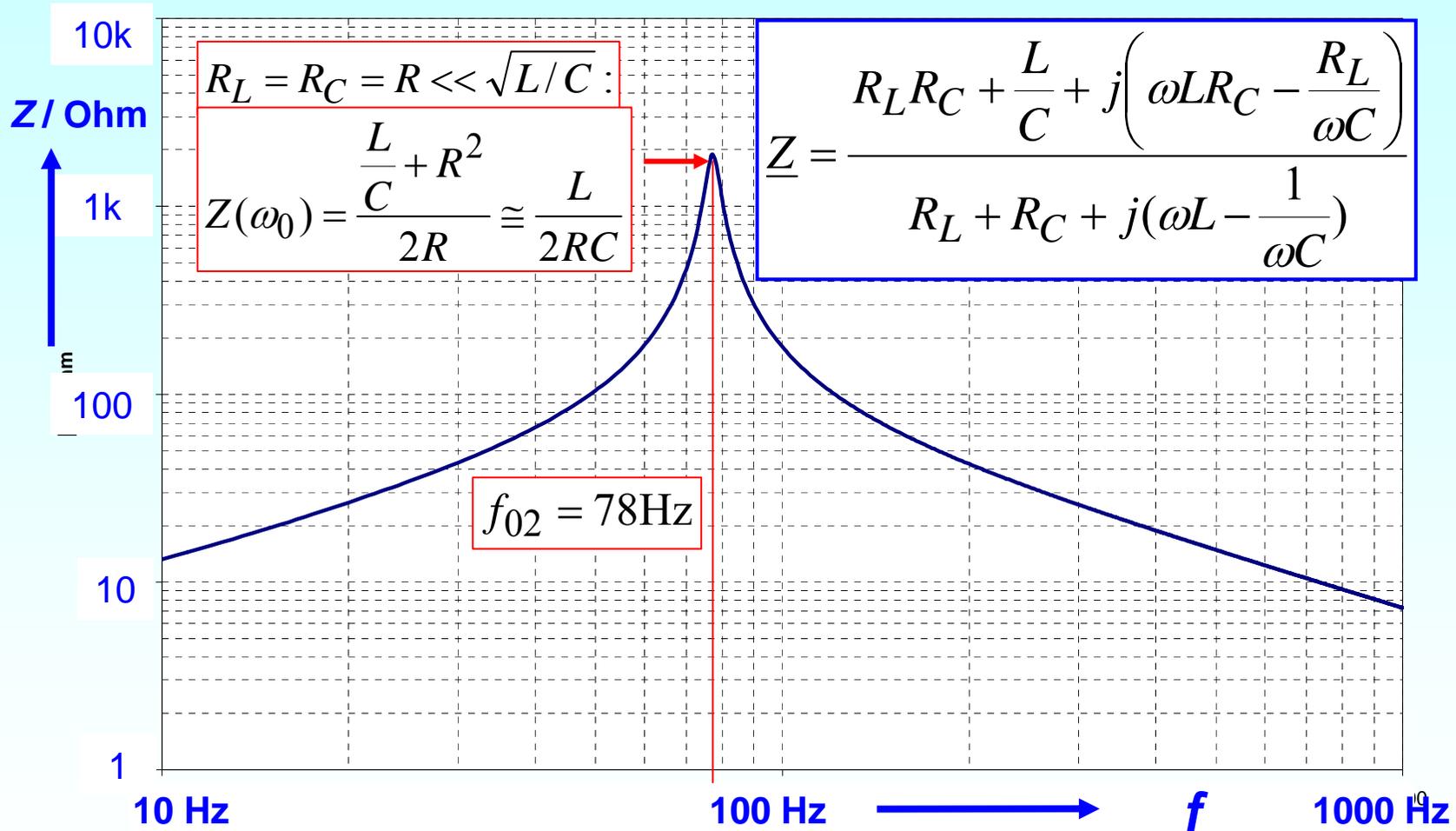


- Strom sinkt bei kleinen Frequenzen  $1/f$
- Strom steigt bei großen Frequenzen  $\sim f$
- Bei Resonanzfrequenz  $f_{01}$ : "Ohm'scher Reststrom"

Doppeltlogarithmischer Maßstab

# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Resonanzkurve $Z(f)$ des Parallel-Schwingkreises



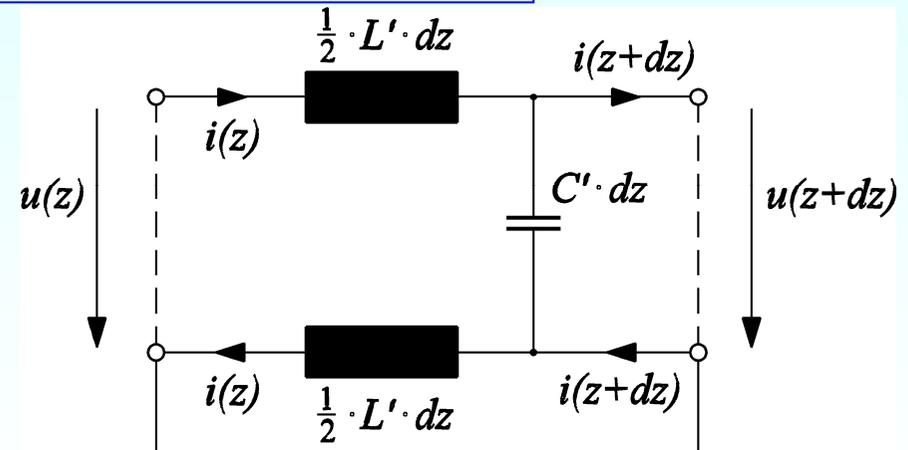
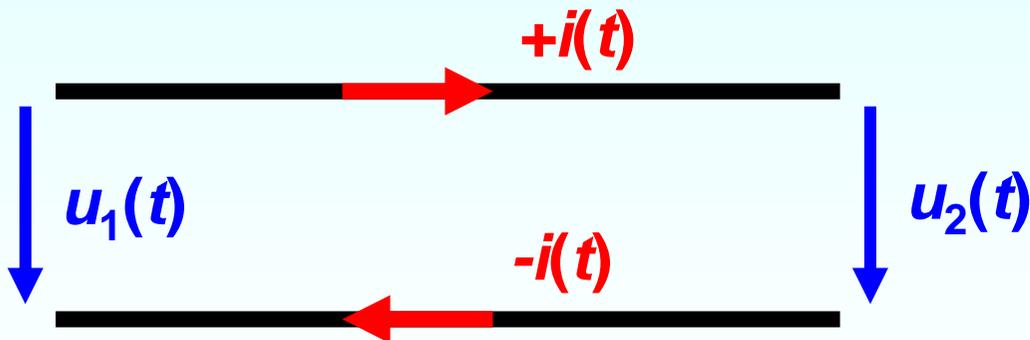
# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## 5.3 Wellenleiter

- Elektromagnetische Signale breiten sich als Wellen mit **Lichtgeschwindigkeit** aus.
- Längs eines Kabels werden diese Signale als **leitungsgebundene Wellen** geführt.
- Das Kabel fungiert als "Wellenleiter".

### Zweidraht-Leitung

Magnetfeld  $H$  umgibt Strom  $i$  im Leiter = **Induktivität**



Elektrisches Feld  $E$  zwischen den Leitern durch Spannung  $u$  = **Kapazität**

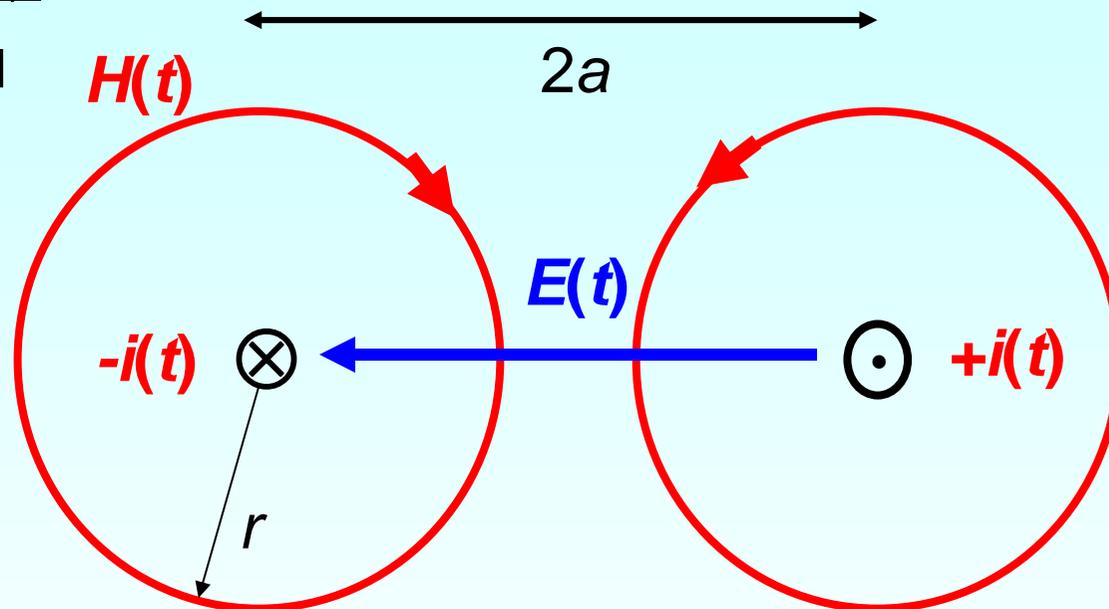
# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Zweidrahtleitung

Feldbilder (schematisch):

Magnetfeld = Wirbelfeld

Ele. Feld = Quellenfeld



$$H\text{-Feld eines Leiters alleine: } \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = H \cdot 2\pi \cdot r = \Theta = i \Rightarrow H = \frac{i}{2\pi \cdot r}$$

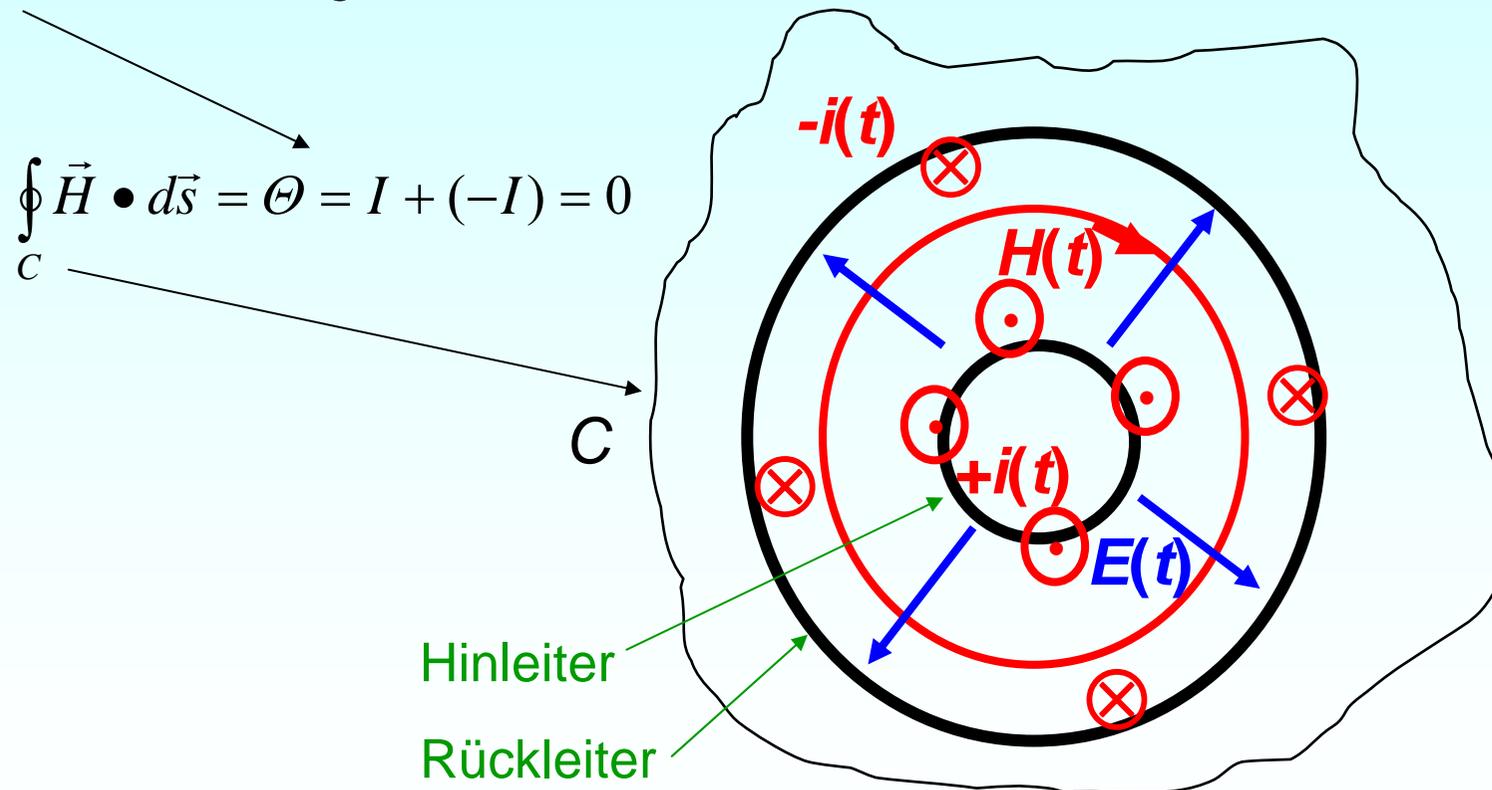
$E$ -Feld zwischen zwei Leitern:

$$\int_{d=2a} \vec{E} \cdot d\vec{s} = u$$

# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Koaxialleitung

- Hin- und Rückleiter sind zwei **ineinander** angeordnete koaxiale Metall-Hohlzylinder
- **Vorteile:** Außen **kein** Magnetfeld und **kein** elektrisches Feld



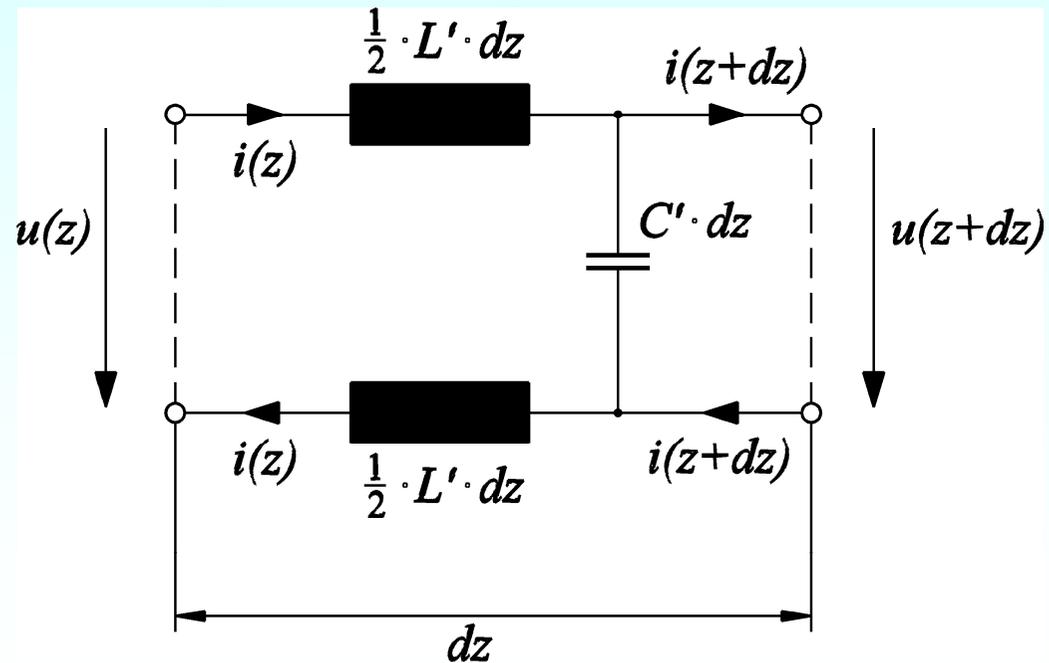
# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## „Elementarzelle“ einer verlustlosen Leitung

- "Induktivitätsbelag"  $L' = L/\ell$ : Induktivität  $L$  *pro Längeneinheit*
- "Kapazitätsbelag"  $C' = C/\ell$ : Kapazität pro Längeneinheit
- Idealisiert: **verlustlose Leitung**
- **homogene** Leitung: Induktivitäts- und Kapazitätsbelag konstant

- Leitungsersatzschaltbild:  
Kette von  $L$ - $C$ -Elementen  
 $dL = L' \cdot dz$  in Reihe  
 $dC = C' \cdot dz$  parallel

- **Längenelement**  $dz$   
 $z$ : Längskoordinate der Leitung



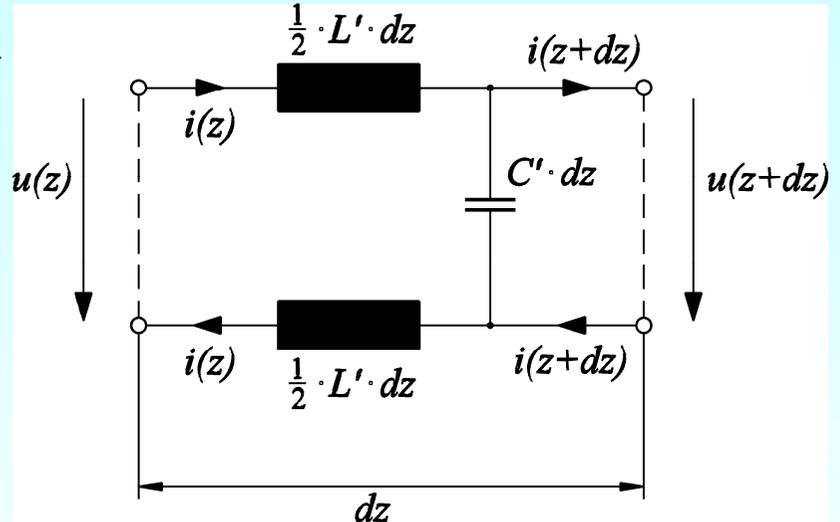
# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Die Leitung – ein verteilter Schwingkreis – „Kettenleiter“

- Kirchhoff'sche Maschen- und Knotengleichungen für eine "Elementarzelle" :

$$u(z, t) = L' dz \frac{di(z, t)}{dt} - \frac{1}{C' dz} \int_0^t [i(z + dz, t) - i(z, t)] \cdot dt$$

$$u(z + dz, t) - u(z, t) = -L' dz \frac{di(z, t)}{dt}$$



$u, i$  : hängen von ZWEI Variablen  $(z, t)$  ab: „**partiellen Ableitungen**“:  
**partielle Differentialgleichungen**

---


$$\frac{du(z, t)}{dt} = L' dz \frac{d^2 i(z, t)}{dt^2} - \frac{1}{C'} \cdot \frac{i(z + dz, t) - i(z, t)}{dz}$$

$$\frac{u(z + dz, t) - u(z, t)}{dz} = -L' \cdot \frac{di(z, t)}{dt}$$

$$\frac{du(z, t)}{dt} = -\frac{1}{C'} \cdot \frac{di(z, t)}{dz}$$

$$\frac{\partial u(z, t)}{\partial t} = -\frac{1}{C'} \cdot \frac{\partial i(z, t)}{\partial z}$$

$$\frac{du(z, t)}{dz} = -L' \cdot \frac{di(z, t)}{dt}$$

$$\frac{\partial u(z, t)}{\partial z} = -L' \cdot \frac{\partial i(z, t)}{\partial t}$$

# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Wanderwellen als Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2} &= -\frac{1}{C'} \cdot \frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial z \cdot \partial t} \\ \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} &= -L' \cdot \frac{\partial^2 i(z,t)}{\partial t \cdot \partial z} \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} = L'C' \cdot \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2}$$

**Wellengleichung**

-Allgemeine Lösungsfunktion der Spannung:  $u(z,t) = A \cdot f(z - v \cdot t) + B \cdot g(z + v \cdot t)$   
Überlagerung von zwei **Wanderwellen**  $f$  und  $g$ , ( $A, B, v$ : Konstante)

- Beweis:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = f''(z - v \cdot t), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 f''(z - v \cdot t), \quad \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = g''(z + v \cdot t), \quad \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = v^2 g''(z + v \cdot t)$$

$$A \cdot f'' + B \cdot g'' = L'C'v^2 \cdot (A \cdot f'' + B \cdot g'')$$

Daraus folgt: **Geschwindigkeit  $v$  der Wanderwellen:**

$$v = \frac{1}{\sqrt{L'C'}}$$

# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Vor- und zurücklaufende Wanderwellen

Allgemeine Lösung der Wellengleichung

$$u(z, t) = A \cdot f(z - v \cdot t) + B \cdot g(z + v \cdot t)$$

$$u_A(z, t) = A \cdot f(z - v \cdot t)$$

$$\alpha = z - v \cdot t = \text{konst.}$$

$$d\alpha / dt = 0 = dz / dt - v$$

$$v = dz / dt > 0$$

**Positive** Geschwindigkeit

Welle wandert nach **rechts**



$$u_B(z, t) = B \cdot g(z + v \cdot t)$$

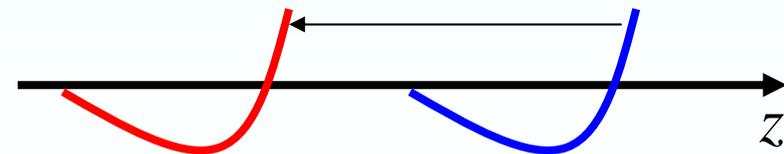
$$\alpha = z + v \cdot t = \text{konst.}$$

$$d\alpha / dt = 0 = dz / dt + v$$

$$v = -dz / dt < 0$$

**Negative** Geschwindigkeit

Welle wandert nach **links**



# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Wanderwellen - Geschwindigkeit

Beispiel: Zweidraht-Leitung: Leitermittenabstand  $2a$ , Leiterradius  $R \ll 2a$   
Isolationsmaterial zwischen den Leitern: Dielektrikum:  $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$

$$C' \cong \frac{\pi \cdot \varepsilon}{\ln\left(\frac{2a}{R}\right)} \quad L' \cong \frac{\mu_0}{\pi} \cdot \ln\left(\frac{2a}{R}\right)$$

a) Isolationsmaterial Luft:  $\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ Vs}/(\text{Am})$

Lichtgeschwindigkeit im Vakuum:

$$v = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 2.99793 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 300000 \text{ km/s} = c_0$$

a) Isolationsmaterial PVC:  $\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ Vs}/(\text{Am})$ ,  $\varepsilon_r = 4$

Lichtgeschwindigkeit im Dielektrikum:

$$v = \frac{1}{\sqrt{L'C'}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_0}} = 0.5 \cdot c_0 = 150000 \text{ km/s}$$

# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Wanderwellen

$f(\alpha)$ : Beliebige Funktion: Jeder Funktionswert  $f(\alpha)$  bleibt UNVERÄNDERT, wenn:

$$\alpha = z - v \cdot t = \textit{konst.}$$

Beispiel:

$$f(z - vt) = \cos(z - vt)$$

a) Bei  $t = 0$ , b) Bei  $t = t_1$ :

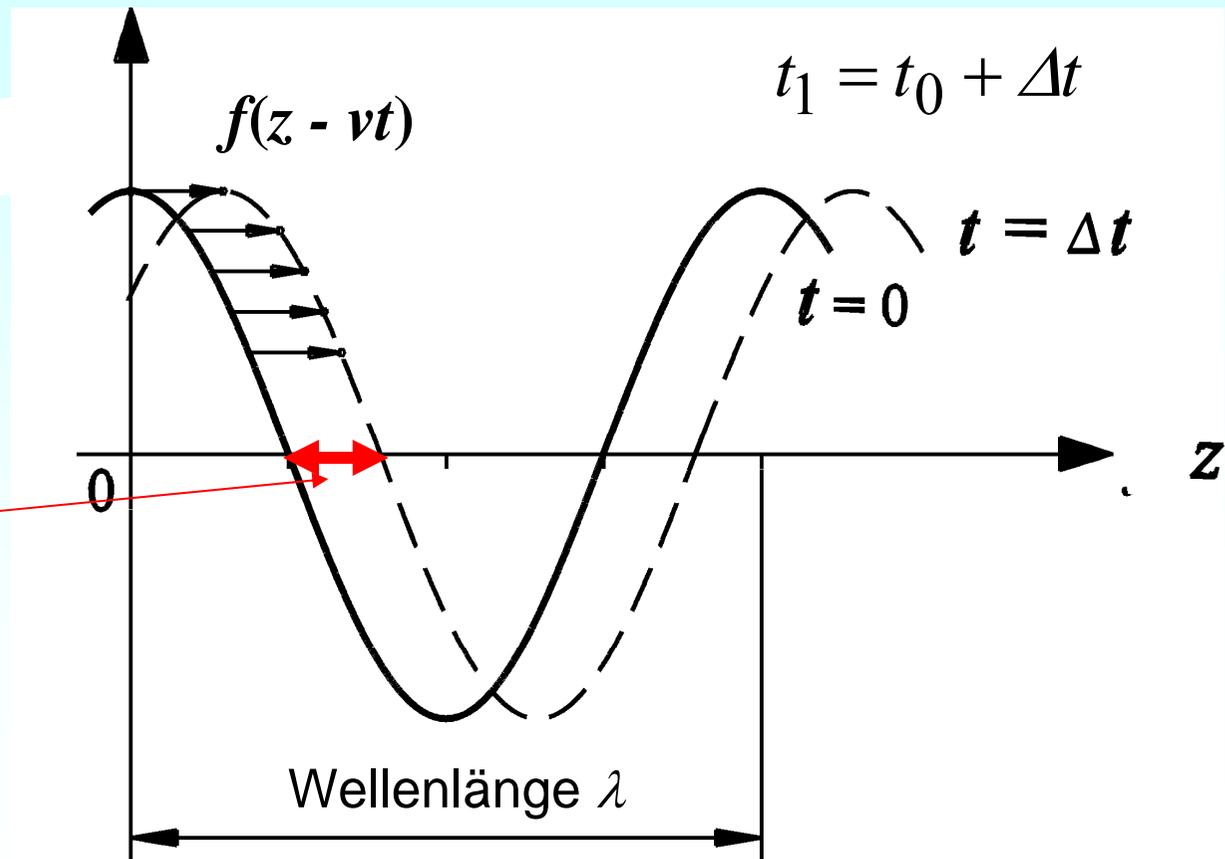
$f$  als Funktion des Ortes  $z$

Zurückgelegter Weg:

$$\Delta z = v \cdot \Delta t$$

**Wellenlänge:**

$$\lambda = v / f$$



# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Wellenwiderstand

- **Wellenwiderstand:** Proportionalitätsfaktor zwischen der Amplitude von Strom- und Spannungswelle
- Bei homogener Leitung: UNABHÄNGIG vom Ort  $z$  auf der Leitung
- Spannungswelle:  $u(z, t) = \hat{U} \cdot \cos(z - vt)$

$$\begin{aligned} \frac{du(z, t)}{dz} &= -L' \cdot \frac{di(z, t)}{dt} \Rightarrow -\hat{U} \cdot \sin(z - vt) = -L' \cdot \frac{di(z, t)}{dt} \Rightarrow i(z, t) = \frac{\hat{U}}{L'} \int \sin(z - vt) dt = \\ &= \frac{\hat{U}}{L' \cdot v} \cdot \cos(z - vt) = \hat{I} \cdot \cos(z - vt) \end{aligned}$$

$$Z_0 = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = L' \cdot v = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

Beispiel: Zwei-Drahtleitung: Leiterradius  $R = 3.5$  mm, Leitermittenabstand  $2a = 26$  mm

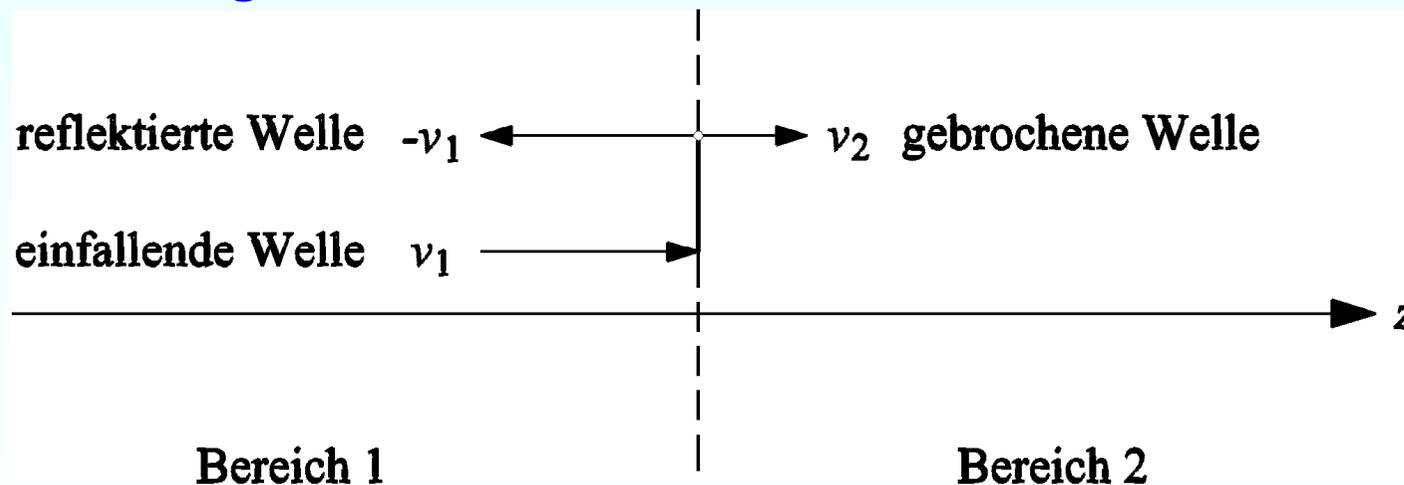
$$C' \cong \frac{\pi \cdot \epsilon_0}{\ln\left(\frac{2a}{R}\right)} \quad L' \cong \frac{\mu_0}{\pi} \cdot \ln\left(\frac{2a}{R}\right)$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cdot \frac{\ln\left(\frac{2a}{R}\right)}{\pi} = 240\Omega$$

# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Reflexion und Brechung

- **Leitungsinhomogenität** = Änderung von  $L'$  und/oder  $C'$  an der Stelle  $z = l$ :  
**Änderung** des Wellenwiderstands von  $Z_{0,1}$  auf  $Z_{0,2}$
- Es erfolgt dort eine **Reflexion und Brechung der Welle**.
- Reflektierter Wellenanteil  $u_r$  läuft mit  $-v_1$  in dem Bereich 1 zurück. Ihre Amplitude durch **Reflexionsfaktor**  $r$  bestimmt
- Gebrochener Wellenanteil  $u_b$  läuft mit neuer Geschwindigkeit  $v_2$  in den Bereich 2. Größe durch **Brechungsfaktor**  $b$  bestimmt.



# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Reflexionsfaktor

$$r = \frac{Z_{0,2} - Z_{0,1}}{Z_{0,2} + Z_{0,1}} = b - 1$$

Bereich 1:



$$u_1(z, t) = u(z - v_1 t) + u_r(z + v_1 t)$$

$$i_1(z, t) = u_1(z, t) / Z_{0,1}$$

$$Z_{0,1} = \sqrt{\frac{L_1'}{C_1'}} \quad v_1 = \frac{1}{\sqrt{L_1' C_1'}}$$

$$u_r(l + v_1 t) = r \cdot u(l - v_1 t)$$

## Brechungsfaktor

$$b = \frac{2Z_{0,2}}{Z_{0,2} + Z_{0,1}}$$

Bereich 2:

$$u_2(z, t) = u_b(z - v_2 t)$$

$$i_2(z, t) = u_2(z, t) / Z_{0,2}$$

$$Z_{0,2} = \sqrt{\frac{L_2'}{C_2'}} \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{L_2' C_2'}}$$

$$u_b(l - v_2 t) = b \cdot u(l - v_1 t)$$

Herleitung  
im Skript!

# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Sonderfälle von Reflexion und Brechung

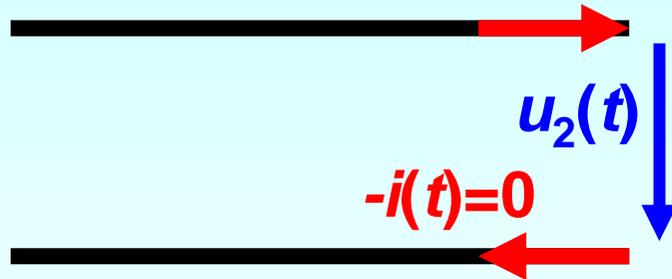
### Leitungsende

offen

$$+i(t)=0$$

$$-i(t)=0$$

$$u_2(t)$$



Bereich

1

2

$$Z_{0,2} = \infty$$

$$r = \frac{\infty - Z_{0,1}}{\infty + Z_{0,1}} = 1, \quad b = 2$$

$$u_r(l + v \cdot t) = u(l - v \cdot t)$$

$$i_2(l, t) = u_2(l, t) / Z_{0,2} = 0 = i$$

kurzgeschlossen

$$+i(t)$$

$$-i(t)$$

$$u_2(t)=0$$



Bereich

1

2

$$Z_{0,2} = 0$$

$$r = \frac{0 - Z_{0,1}}{0 + Z_{0,1}} = -1, \quad b = 0$$

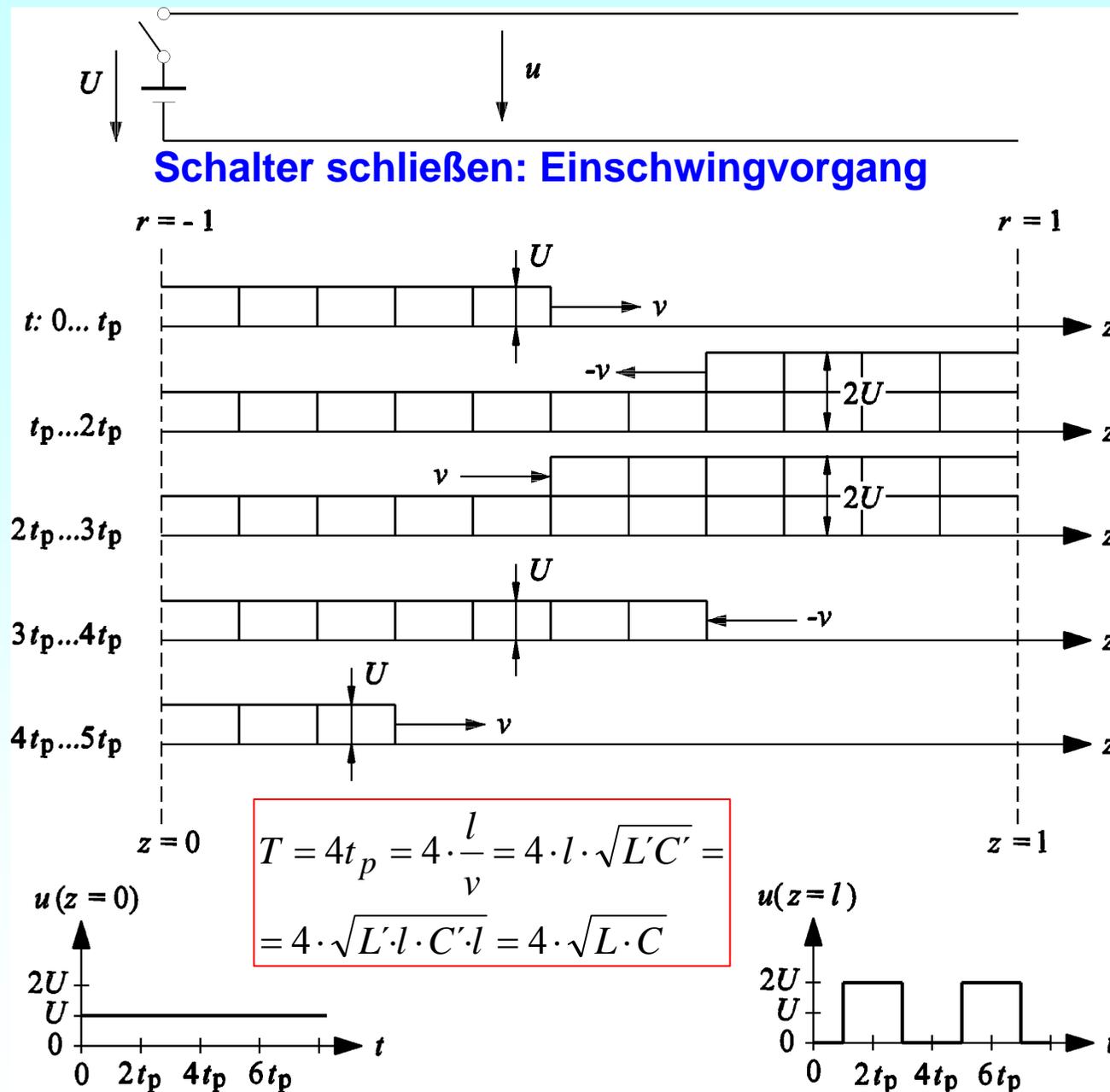
$$u_r(l + v \cdot t) = -u(l - v \cdot t)$$

$$u = 0$$



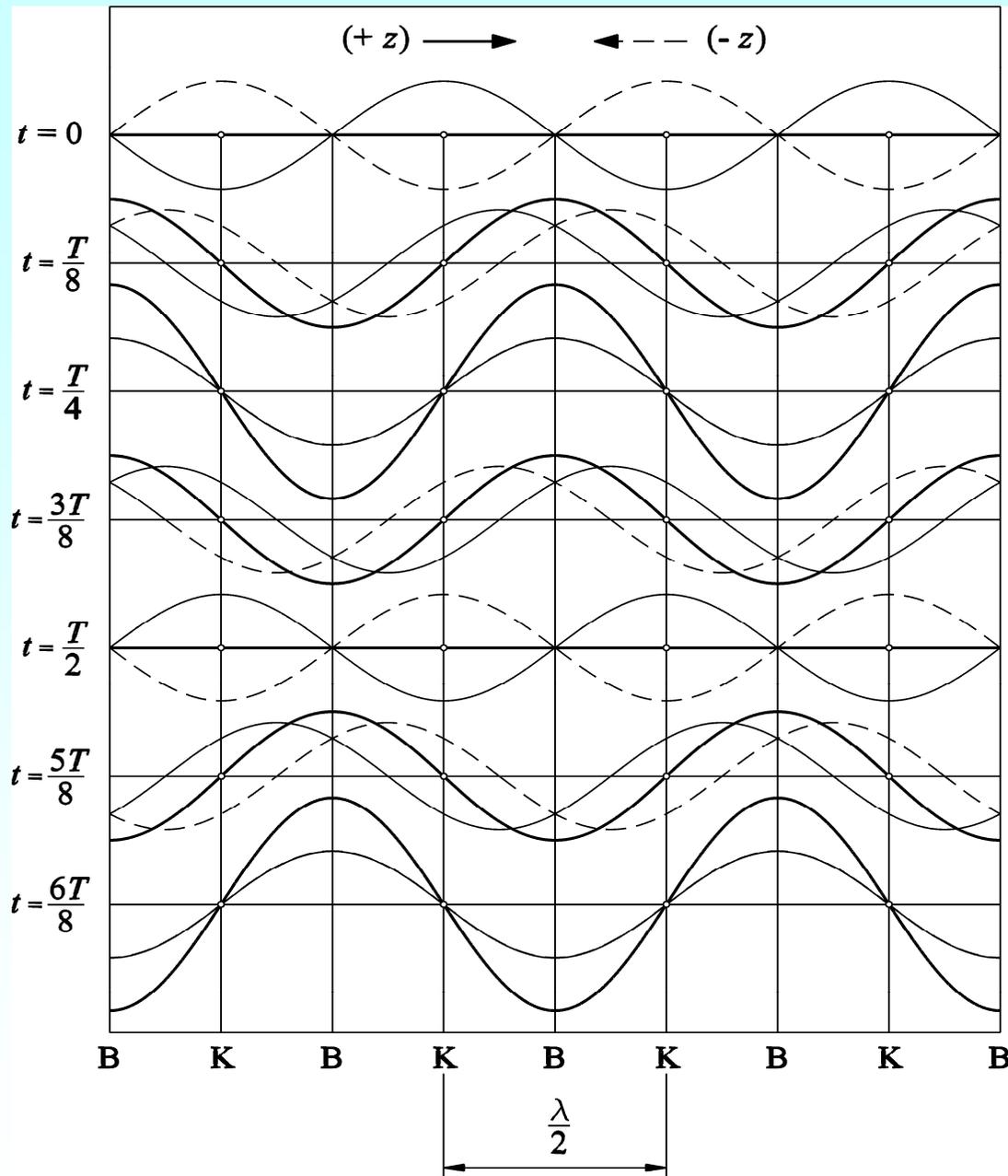
# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Einschwingvorgang auf der offenen Leitung



-Im Vergleich zum verlustlosen  $L$ - $C$ -Serienschwingkreis ist die Eigenschwingung der Leitung ( $L$ - $C$ -Kettenleiter) nicht sinusförmig, sondern rechteckförmig.

- Die Eigenfrequenz ist nicht  $f_d = 1/(2\pi\sqrt{LC})$ , sondern  $f_d = 1/(4\sqrt{LC})$ .



## Schwingkreise und Wellenausbreitung

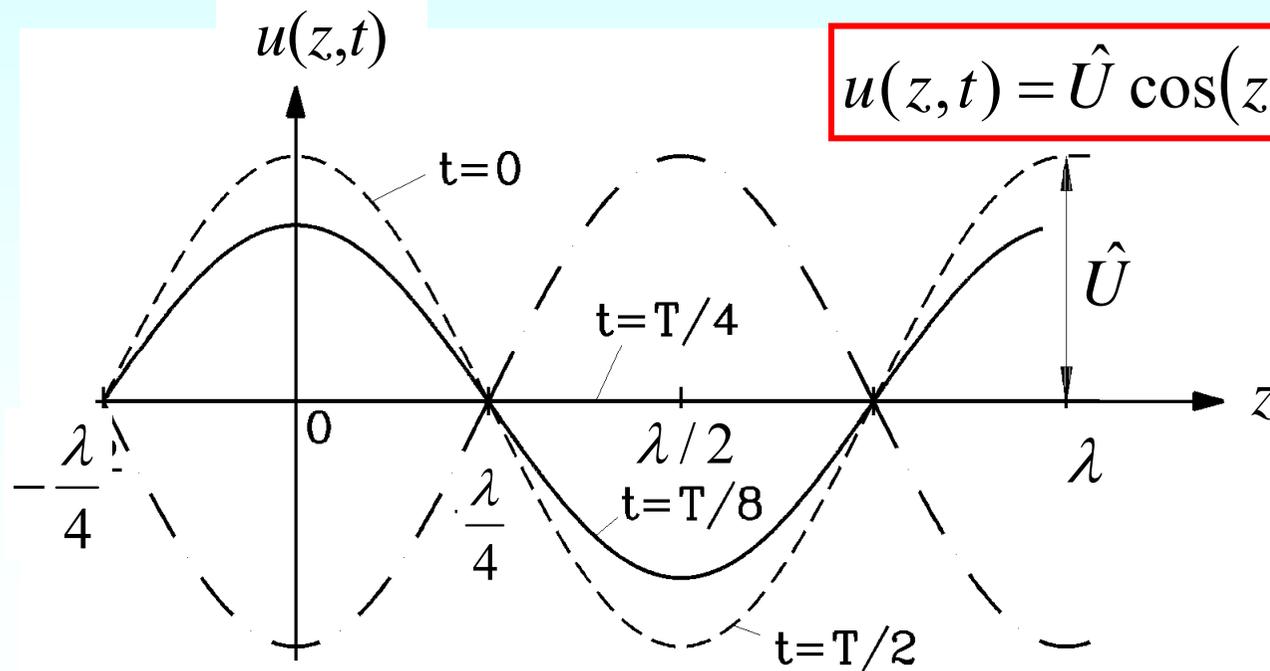
### Entstehung stehender Wellen

- Überlagerung zweier gegenlaufender Sinuswanderwellen
- Abstand der Knoten und Bäuche  $K$  und  $B$  im Abstand  $\lambda/2$
- Beispiel:
  - a) Stromwanderwellen
  - b) Stromquellen (Innenwiderstand unendlich) an beiden Enden
  - c) Leitung am Anfang/Ende offen
  - d) Reflexion 1 an den offenen Enden erzeugt gegenlaufende Wellen

# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Stehende Wellen auf der Leitung

- **Stehende Welle:** Entsteht durch Überlagern zwei in entgegengesetzter Richtung laufender, sonst gleichartiger Wellen.
- **Stehende Strom- und Spannungswellen:** Pulsieren mit Frequenz  $f$
- Räumliche Lage der **Wellenknoten** und **Wellenbäuche** KONSTANT.

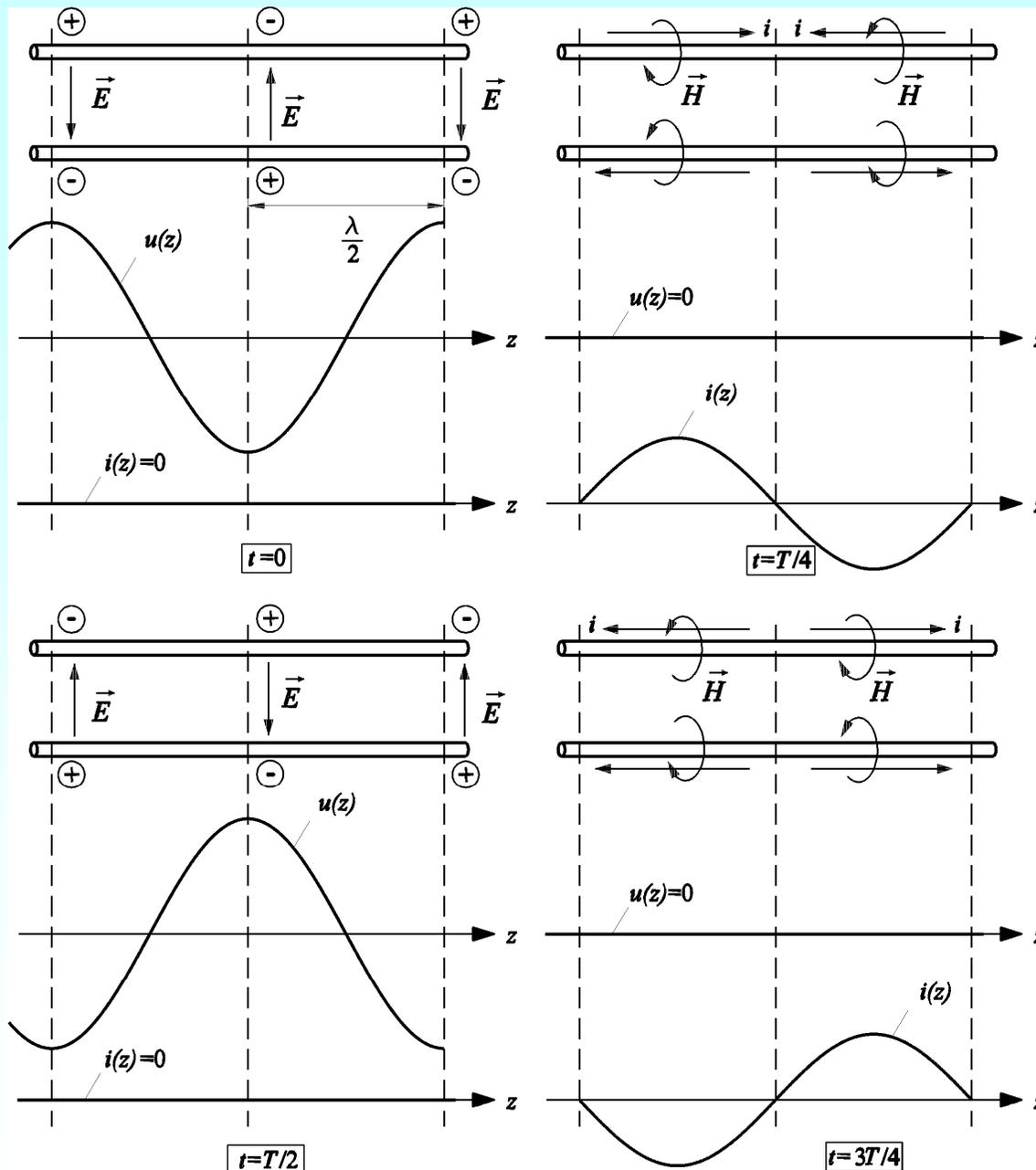


$$u(z,t) = \hat{U} \cos(z \cdot 2\pi / \lambda) \cdot \cos(2\pi f \cdot t)$$

# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## H- und E-Feld bei stehenden Wellen bei Frequenz $f$

- Spannungsbäuche =  $E$ -Feld-Bäuche, ebenso Knoten
- Strombäuche =  $H$ -Feld-Bäuche, ebenso Knoten
- Wegen Leitungsinduktivität  $L$ :  
Strom  $i$  zeitlich um  $90^\circ$  ( $= T/4$ )  
Spannung  $u$  nachfolgend =  
Wenn  $i$  maximal, dann  $u$  Null  
und umgekehrt.



# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Beispiel: Stehende Wellen auf der Leitung

a) Im Praktikum: Zwei-Draht-Leitung  $l = 88$  cm lang. Mit welcher Frequenz muss gespeist werden, damit sich an der am Ende offenen Leitung eine stehende Welle mit der Wellenlänge  $\lambda = 4/5 \cdot l$  ausbildet?

$$f = c_0 / \lambda = \frac{c_0}{\frac{4}{5}l} = \frac{2.9979 \cdot 10^8}{\frac{4}{5} \cdot 0.88} = 425.88 \cdot 10^6 \text{ Hz} = 425.88 \text{ MHz}$$

b) Wie lang muss die Zwei-Draht-Leitung sein, damit sich bei **Netzfrequenz 50 Hz** eine stehende Spannungswelle mit der Wellenlänge ausbilden kann?

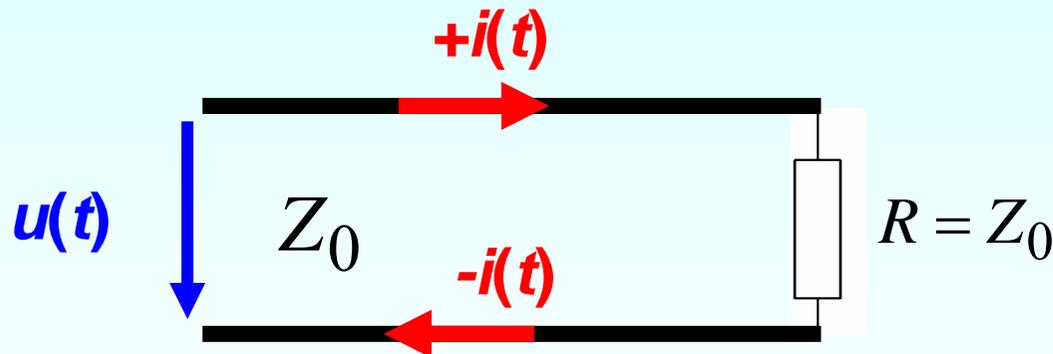
$$l = \lambda \Rightarrow l = c_0 / f = \frac{2.9979 \cdot 10^8}{50} = 5996 \cdot 10^3 \text{ m} \cong 6000 \text{ km}$$

**Die Wellennatur der Ausbreitung elektromagnetischer Signale ist erst bei hohen Frequenzen bzw. sehr großen Distanzen bemerkbar.**

# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Abschluss der Leitung mit dem Wellenwiderstand

- Leitungsende: Abschlusswiderstand = Wellenwiderstand:  $Z = R = Z_0$   
**Keine** Inhomogenität = **keine** Reflexion:  $r = 0$ .
- Keine zurücklaufende Welle: **kein** Einschwingvorgang, **keine** stehenden Wellen.



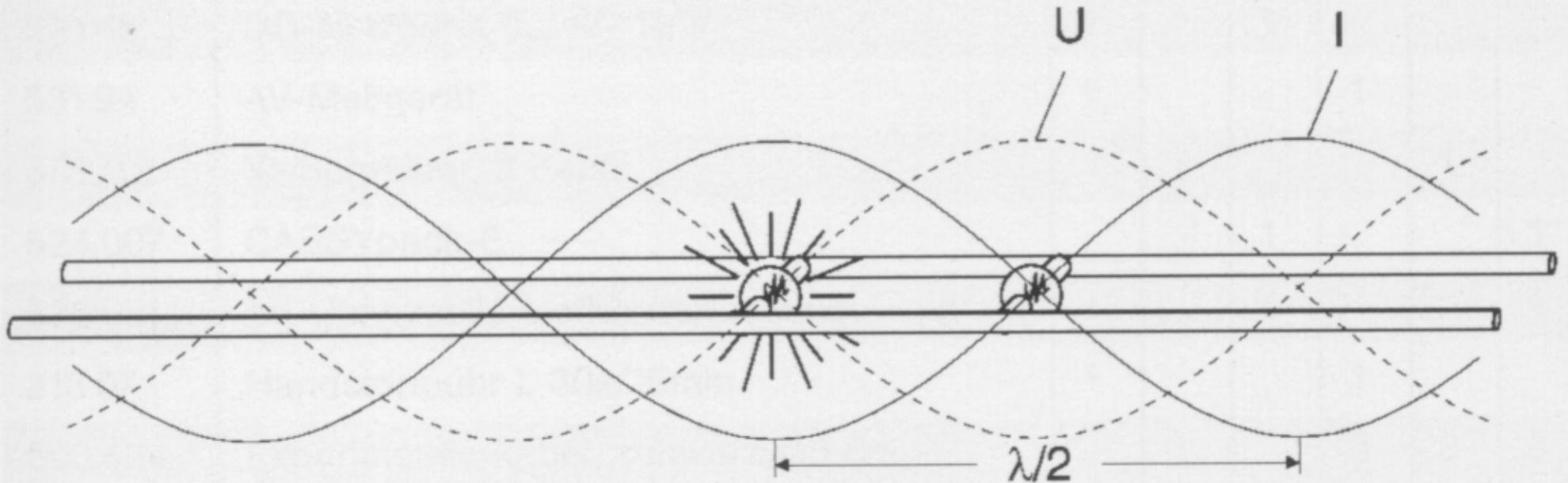
$$r = \frac{Z_0 - Z_0}{Z_0 + Z_0} = 0$$
$$b = 1$$

- Nur hinlaufende Welle 

# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Lecher-Leitung

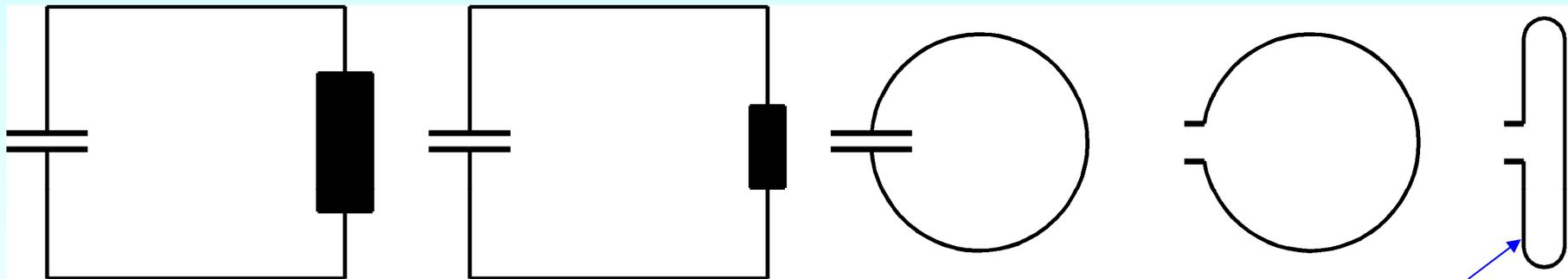
- *Lecher-Leitung*: Zwei-Draht-Leitung, Luft ist Isolator
- Wellengeschwindigkeit: Vakuum-Lichtgeschwindigkeit
- Glühlampe zur Strom- und Spannungsmessung



# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## 5.4 Einfache Dipolantennen

- Entstehung eines **UHF-Schwingkreises** (Ultrahochfrequenz: MHz ... GHz) aus einem *L-C*-SerienSchwingkreises



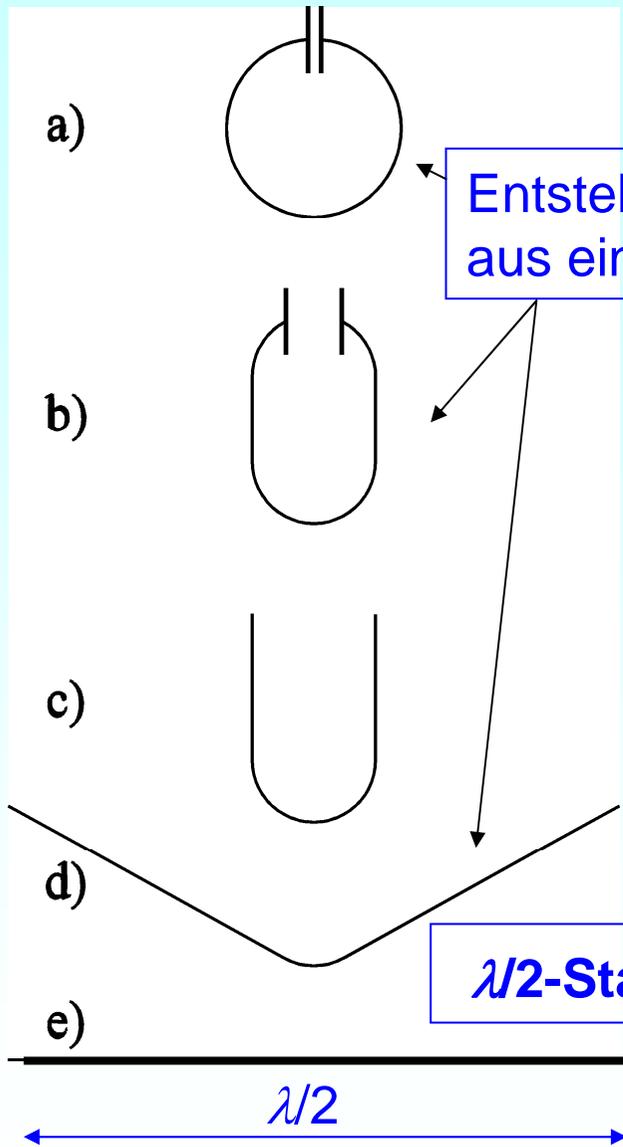
**Faltdipol  
(Schleifendipol)**

- Induktivität *L*: eine Windung: sehr kleine Induktivität
- Kapazität *C*: Elektroden sind die Schleifenenden: sehr kleine Kapazität
- Sehr kleines *L* und *C*: Sehr hohe Eigenfrequenz

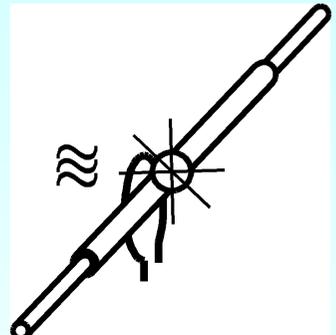
$$f_d = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Der $\lambda/2$ -Stab-Dipol



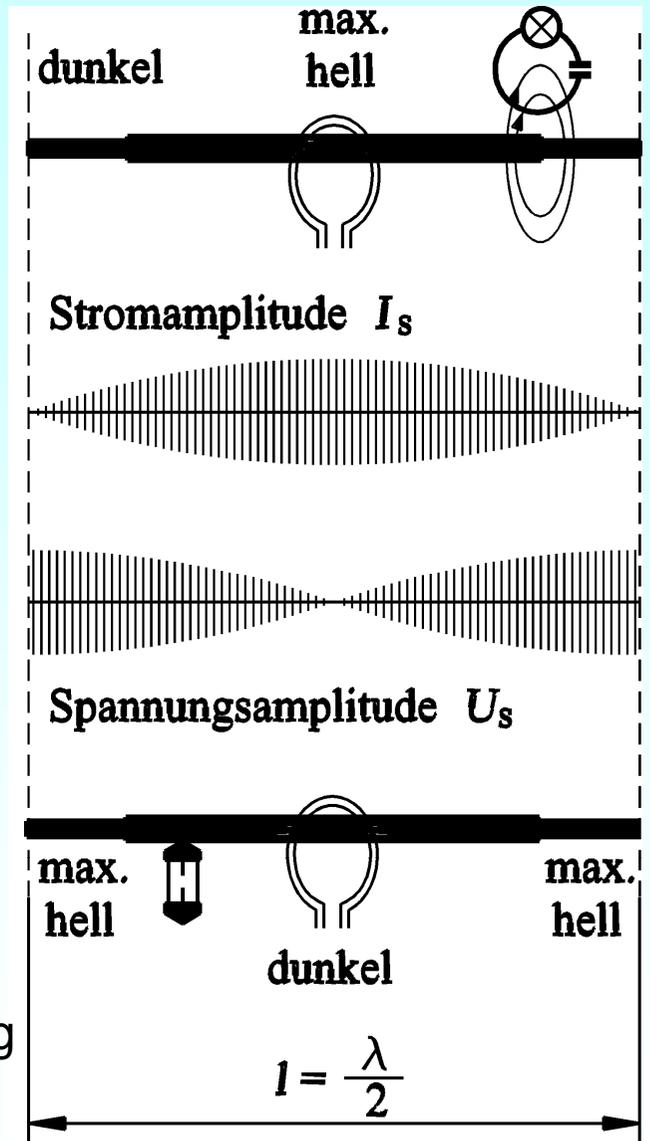
Entstehung eines  $\lambda/2$ -Dipols aus einem UHF-Schwingkreis



Messung des Dipolstroms über eingebautes Glühlämpchen oder Induktionsschleife

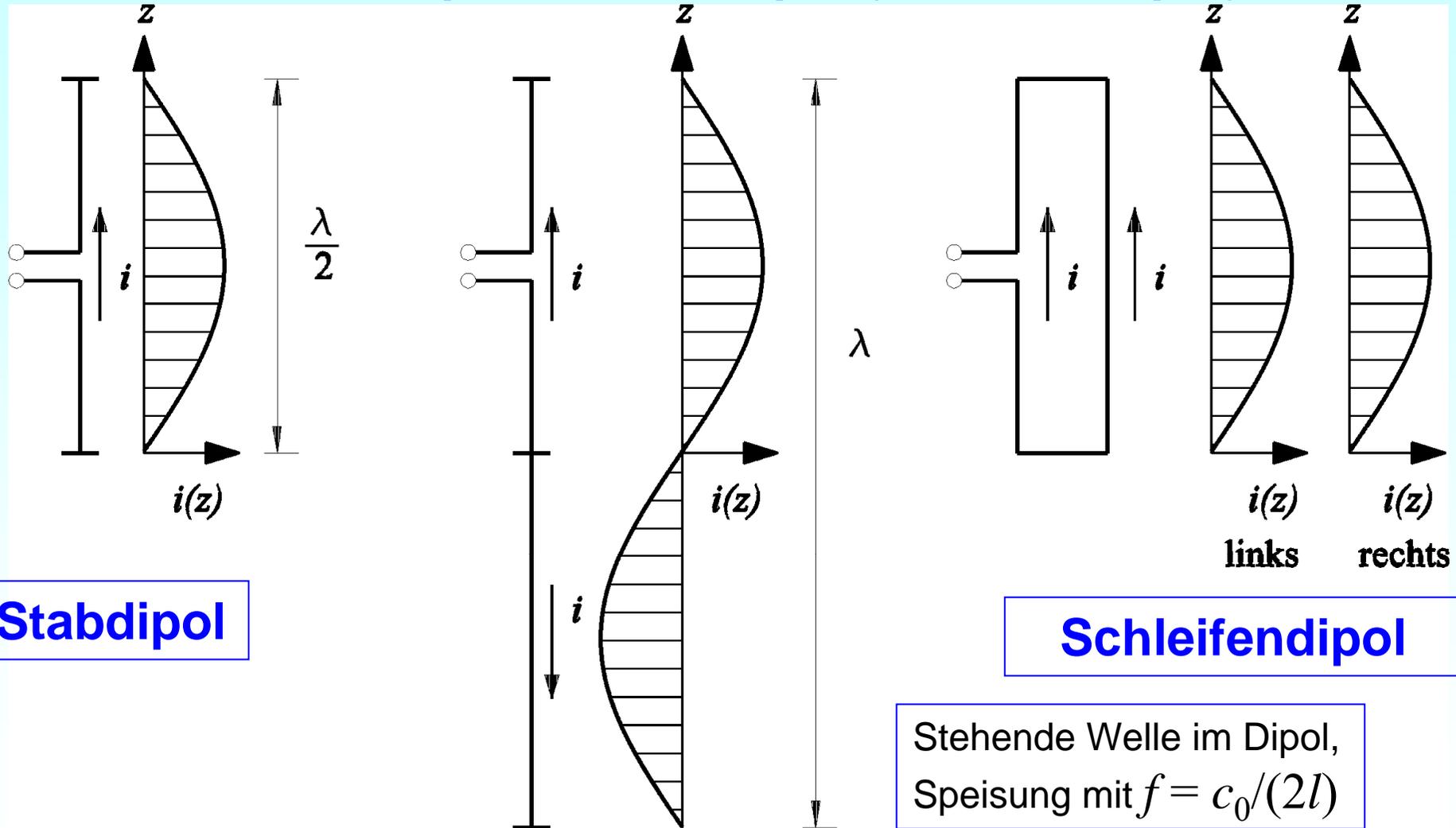
$\lambda/2$ -Stab-Dipol

Stehende Welle im Stabdipol, Speisung mit  $f = c_0/(2l)$



# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Stabdipol und Faltdipol (Schleifendipol)



**Stabdipol**

**Schleifendipol**

Stehende Welle im Dipol,  
Speisung mit  $f = c_0/(2l)$

# Schwingkreise und Wellenausbreitung

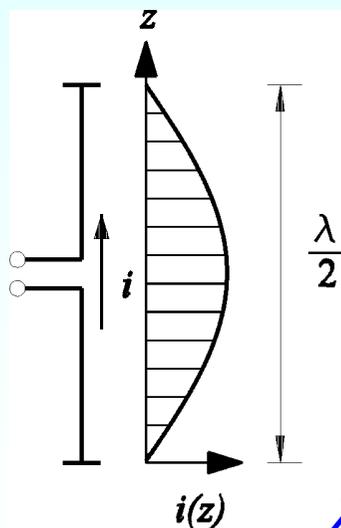
## Beispiel: Stabdipol und Schleifendipol

Frequenz  $f = 433.92$  MHz  $\Rightarrow$  Wellenlänge:  $\lambda = c_0/f = 69.1$  cm

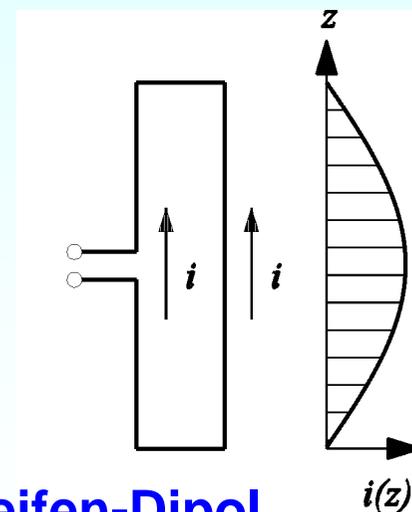
a)  $\lambda/2$ -Stab-Dipol: Länge  $l = \lambda/2 = 69.1/2 = 34.5$  cm

Wegen endlichem Draht-Durchmesser 7 mm:  $l = 32$  cm  $< \lambda/2$ .

b) Schleifendipol: Soll wie  $\lambda/2$ -Stab-Dipol wirken: Gleiches  $l$  !



$\lambda/2$ -Stab-Dipol



Schleifen-Dipol

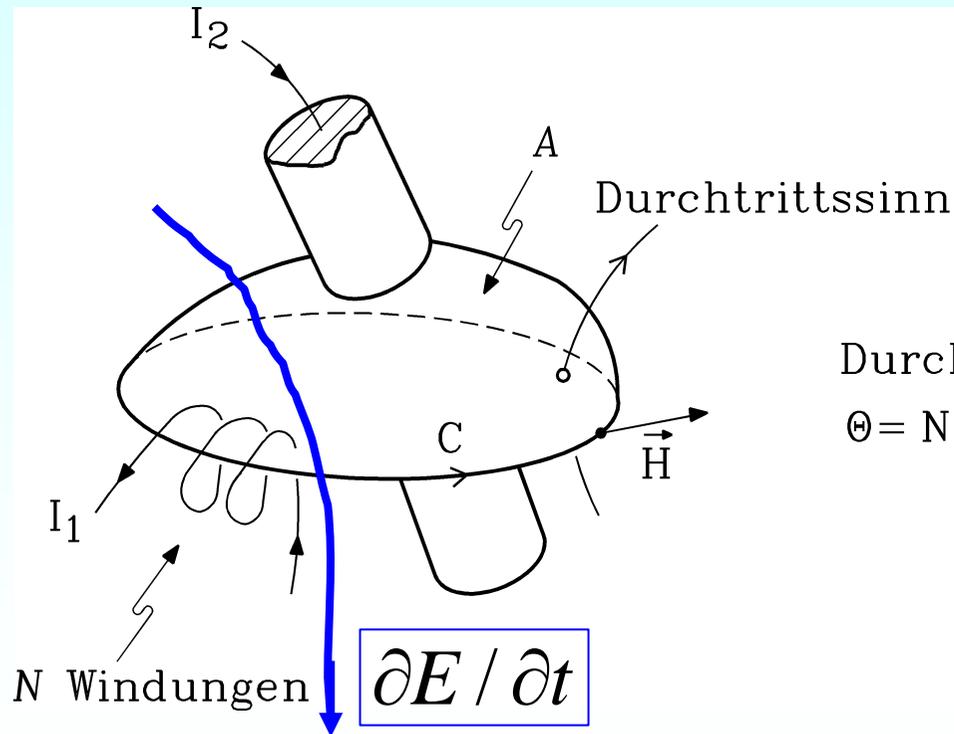


# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Maxwell'scher Verschiebungsstrom koppelt $E$ - und $H$ -Feld

- Erweiterter *Ampere'scher* Durchflutungssatz (*J. C. Maxwell*):

Sowohl ein elektrischer Strom (Durchflutung  $\Theta$ ) als auch eine Änderung der elektrischen Feldstärke  $E$  erregen ein Magnetfeld  $H$ .



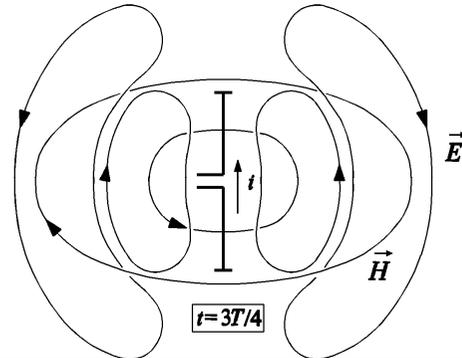
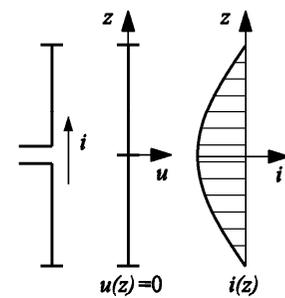
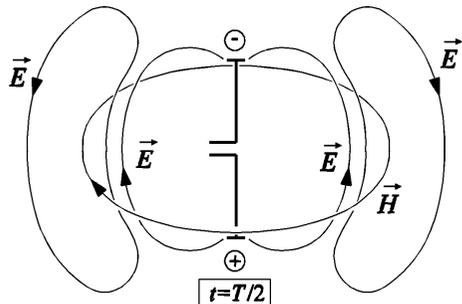
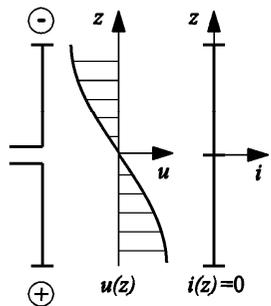
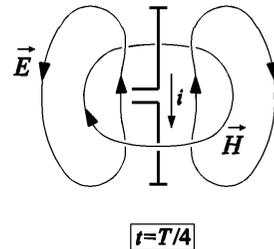
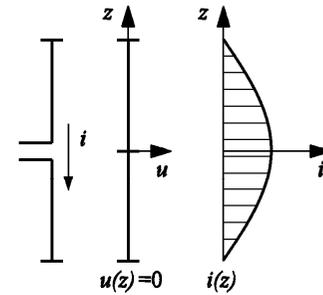
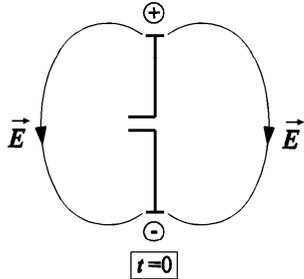
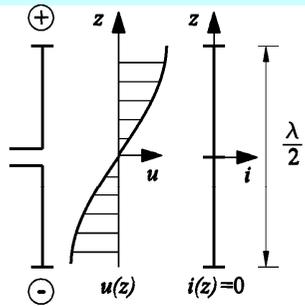
$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \Theta + \int_A \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{A}$$

- Wegen des i.a. sehr kleinen  $\varepsilon$  ist dieser zusätzliche Effekt meist nur bei sehr hohen Frequenzen merkbar.

# Schwingkreise & Wellenausbreitung

## Feldabstrahlung des $\lambda/2$ -Dipols

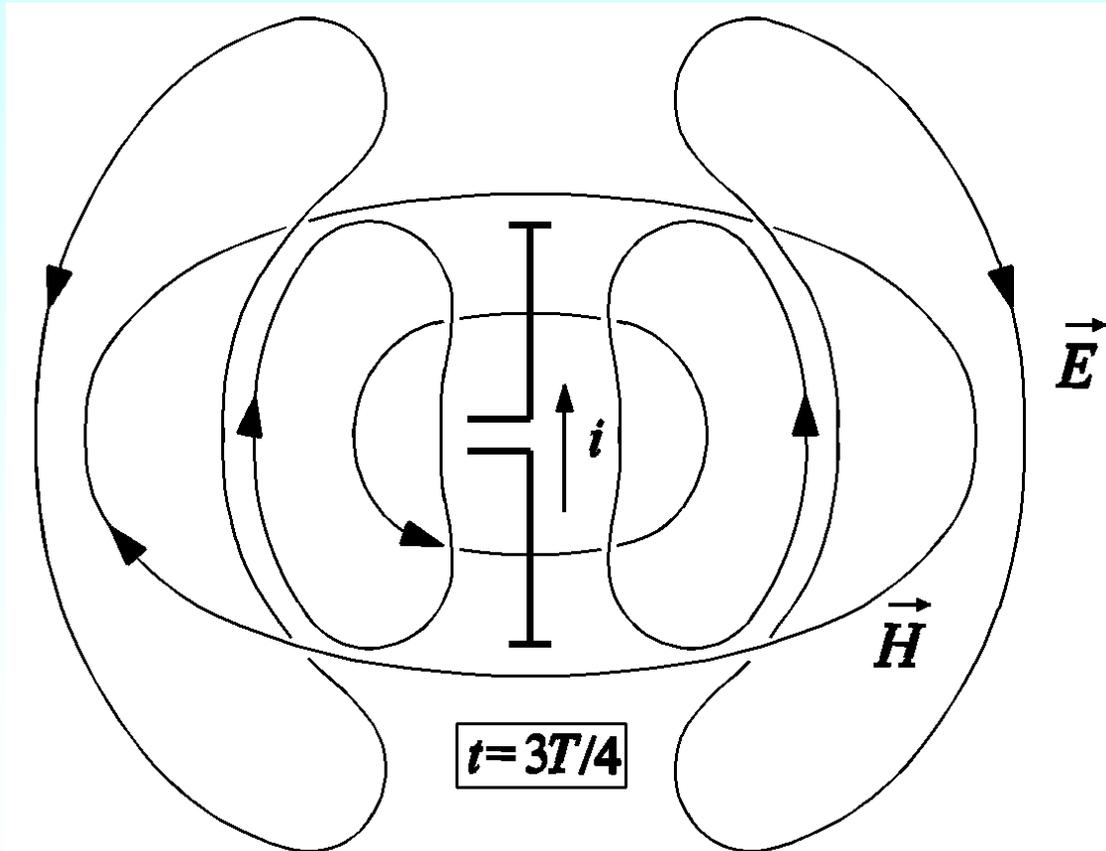
- Strom  $i$  ist Spannung  $u$  um  $T/4$  **nacheilend**
- Dipol wird mit  $f = c_0/(2l)$  gespeist.
- $t = 0$ : Dipolenden: geladen: Spannungsbauch:  $E$ -Feldlinien
- Nach  $T/2$ :  $E$ -Feld **umgepolt**. Seine Änderung ruft über **Verschiebungsstromdichte** Feld  $H$  hervor.
- Gleichzeitig:  $E$ -Umpolen: Ladungsfluss zur Mitte = **Leitungsstrom**. Verstärkt das  $H$ -Feld, dessen Änderung wieder ein **negatives  $E$ -Feld** induziert.
- $E$ - und  $H$ -Feld in den Raum abgedrängt = **abgestrahlt**.



# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Polarisiertes $E$ - und $H$ -Feld

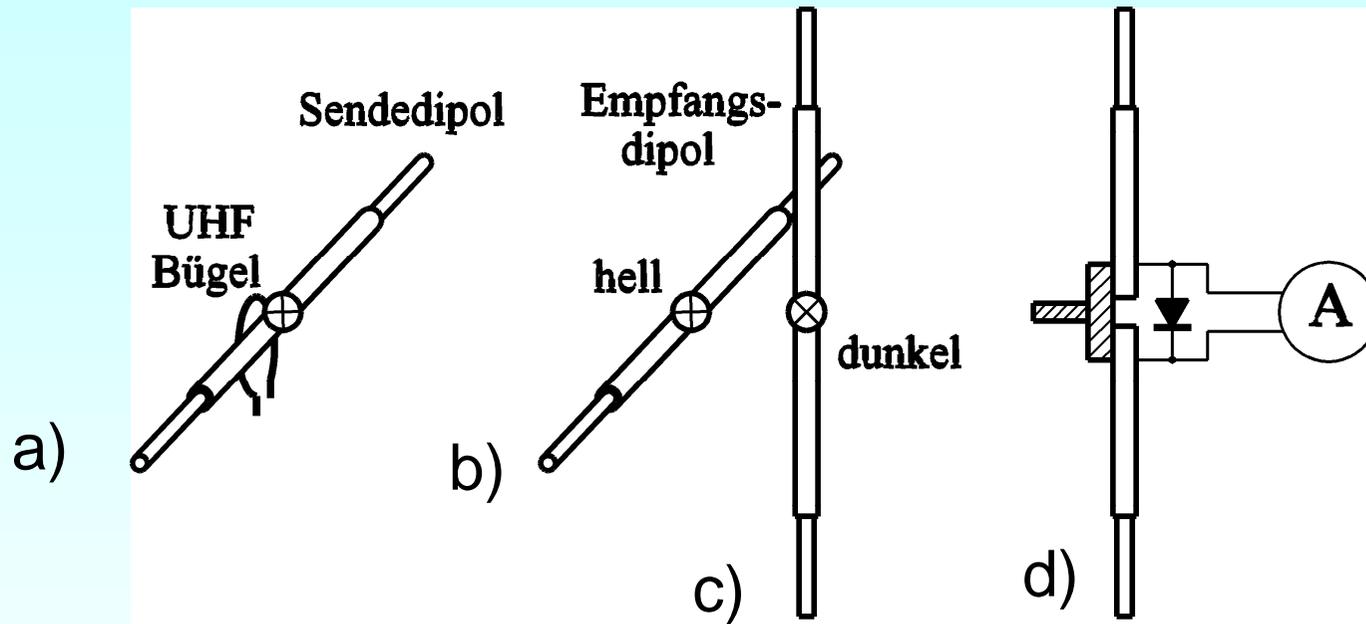
- a)  $E$ - und  $H$ -Vektoren schwingen mit der Frequenz  $f$ .
- b)  $E$ -Vektoren in Meridianebenen,  $H$ -Vektoren senkrecht zur Dipolachse.



$E$ -Vektoren und  $H$ -Vektoren senkrecht zueinander = **polarisiert.**

# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## $\lambda/2$ -Dipol als Sende- und Empfangsantenne

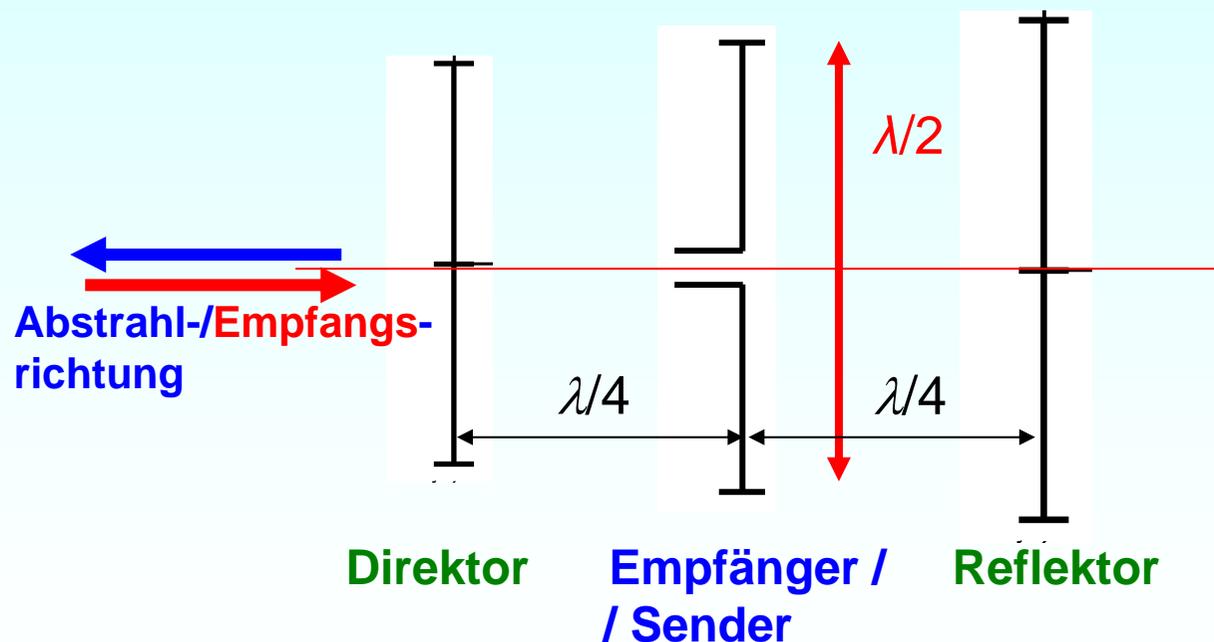


- a) UHF-Schwingkreis als Sender koppelt auf Stabdipol (Sendeantenne) ein,
- b) Empfangsdipol mit eingebauter Glühlampe in  $E$ -Vektorebene
- c)  $90^\circ$  zur  $E$ -Vektorebene: Es wird keine Spannung eingekoppelt.
- d) Empfangsdipol mit Gleichrichter und Amperemeter

# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## „Yagi“-Antenne

- Die Kombination aus  $\lambda/2$ -Sende-/Empfangsdipol  $D_i$ , Reflektor  $R$  und Direktor  $D$  heißt *Yagi*-Antenne. Die Antenne hat eine gerichtete Abstrahlung.
- Reflektor  $R$ , Direktor  $D$ : kurzgeschlossene Stabdipole
- Reflektor  $R$ : länger als  $D_i$ , Direktor  $D$ : kürzer als  $D_i$



# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Dipol-Direktor schwingt GLEICHPHASIG mit anregender Welle

- Direktor: Länge des Dipols **kleiner** als  $\lambda/2$ , daher Induktivität  $L_D$  kleiner als  $L$  von  $Di$ . Daher Eigenfrequenz  $f_{dD}$  größer als  $f_d$ .

$$f_{dD} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{L_D \cdot C}} > f_d = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

- Direktor wird mit  $f_d$  unterhalb seiner Resonanzfrequenz  $f_{dD}$  angeregt, daher schwingt er **gleichphasig** zur Anregung.

$$\underline{U} + j(\omega L_D - \frac{1}{\omega C}) \cdot \underline{I}_D = 0 \quad \underline{I}_D = \frac{-\underline{U}}{j(\omega L_D - \frac{1}{\omega C})} = j \cdot \frac{\underline{U}}{\omega L_D \cdot \left(1 - \frac{\omega_{dD}^2}{\omega^2}\right)} \sim -j\underline{U}$$

$$\underline{U} \sim \underline{E} \sim j\omega \underline{H} : \quad \underline{I}_D \sim \underline{H}$$

$$\underline{H}_D \sim \underline{I}_D \sim \underline{H}$$

- Direktor schwingt mit  $H_D$  **gleichphasig** mit der anregenden Feldwelle  $H$ .

# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Dipol-Reflektor schwingt GEGENPHASIG mit anregender Welle

- Reflektor: Länge des Dipols **größer** als  $\lambda/2$ , daher Induktivität  $L_R$  kleiner als  $L$  von  $Di$ . Daher Eigenfrequenz  $f_{dR}$  kleiner als  $f_d$ .

$$f_{dR} = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{L_R \cdot C}} < f_d = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

- Reflektor wird mit  $f_d$  oberhalb seiner Resonanzfrequenz  $f_{dR}$  angeregt, daher schwingt er **gegenphasig** zur Anregung.

$$\underline{U} + j\left(\omega L_R - \frac{1}{\omega C}\right) \cdot \underline{I}_R = 0 \quad \underline{I}_R = \frac{-\underline{U}}{j\left(\omega L_R - \frac{1}{\omega C}\right)} = j \cdot \frac{\underline{U}}{\omega L_R \cdot \left(1 - \frac{\omega_{dR}^2}{\omega^2}\right)} \sim j\underline{U}$$

$$\underline{U} \sim \underline{E} \sim j\omega \underline{H} : \quad \underline{I}_R \sim -\underline{H}$$

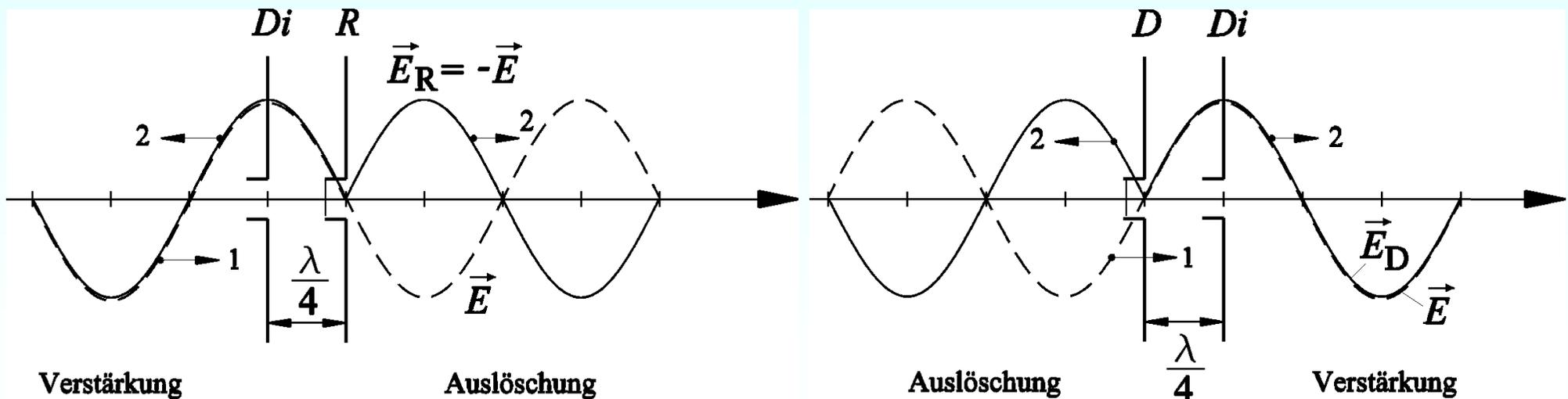
$$\underline{H}_R \sim \underline{I}_R \sim -\underline{H}$$

- Reflektor schwingt mit  $H_R$  **gegenphasig** zur anregenden Feldwelle  $H$ .

# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Reflektor- und Direktordipol

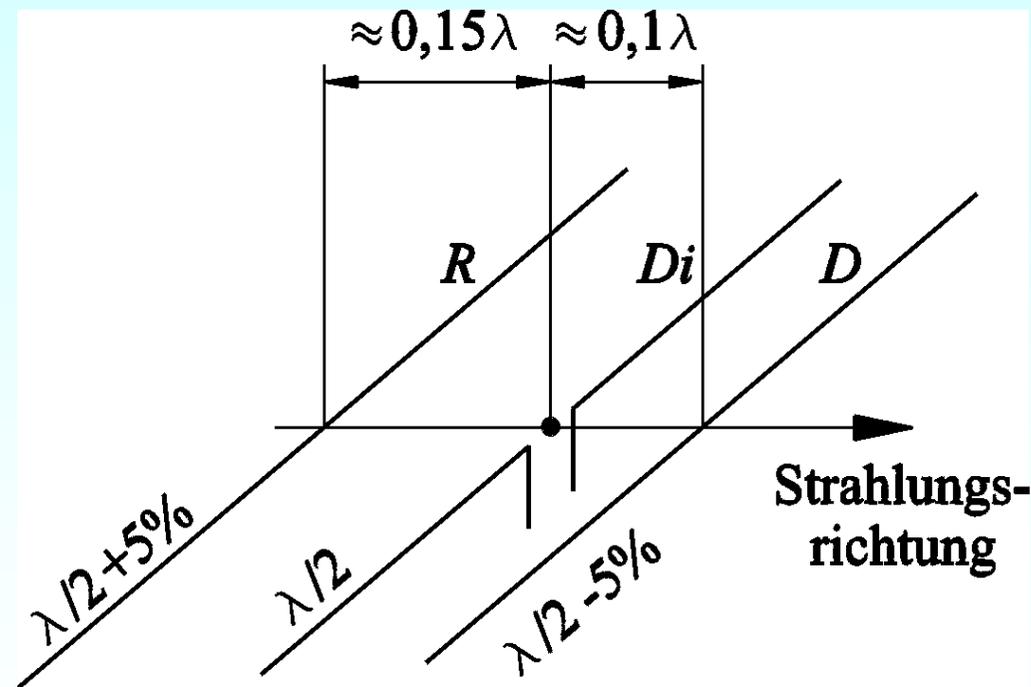
- Reflektor  $R$  schwingt mit seinem Feld (2) gegenphasig zum einfallenden Feld (1).
- Direktor  $D$  schwingt mit seinem Feld (2) gleichphasig zum einfallenden Feld (1).
- $D$  strahlt in Richtung der weiterlaufenden Welle gleichphasig:  
**Verstärkung** der weiterlaufenden Welle, **Auslöschung** der einfallenden Welle.
- $R$  strahlt in Richtung der weiterlaufenden Welle gegenphasig:  
**Auslöschung** der weiterlaufenden Welle, **Verstärkung** der einfallenden Welle.
- **Ergebnis:** Verstärkung des Felds zwischen Dipol  $Di$  und  $D$  und  $R$  !



# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Yagi-Antenne: Ausführung

-*Yagi-Antenne*: Dreileiteranordnung mit gespeistem Dipol  $Di$ , Reflektor  $R$  und Direktor  $D$  in einer realitätsnahen Anordnung



# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Versuchsdurchführung

### Versuch 5 Schwingkreise und Wellenausbreitung

Versuchsbetreuer:

Dipl.-Ing. Mehran Mirzaei

Raum S3|10/442

Tel. : 06151 / 16-4294

E-Mail : [mmirzaei@ew.tu-darmstadt.de](mailto:mmirzaei@ew.tu-darmstadt.de)



# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Übersicht über die Aufgaben

- 5.5 *RLC* - **Reihen**schwingkreis
- 5.6 *RLC* - **Paralle**lschwingkreis
- 5.7 **Lecher**-Leitung
- 5.8 **Dipol**antenne

# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## 5.5 RLC - Reihenschwingkreis

### Verwendete Bauteile:

- Kondensator:  $C = 1 \mu\text{F}$
- Induktivität:  $L_{Sp}$  ca. 193 mH;  $R_{Sp}$  ca. 4,6  $\Omega$ ;  $N = 1200$ , auf Kern gesteckt, Eisenjoch offen = H-Feld schließt sich über Luft = lineare  $B$ - $H$ -Charakteristik
- Mess-Shunt  $R_{mess} = 20 \Omega$ .

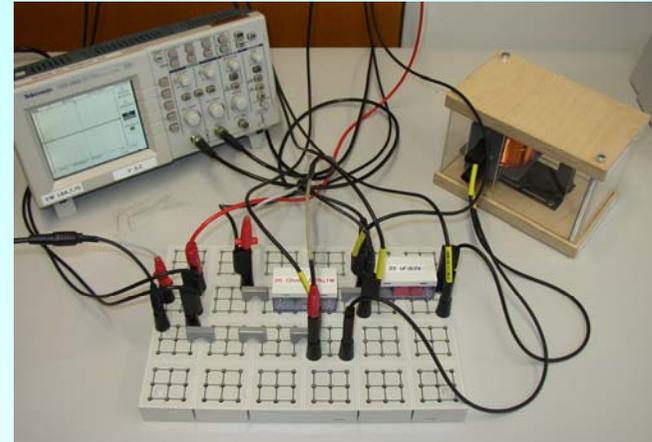
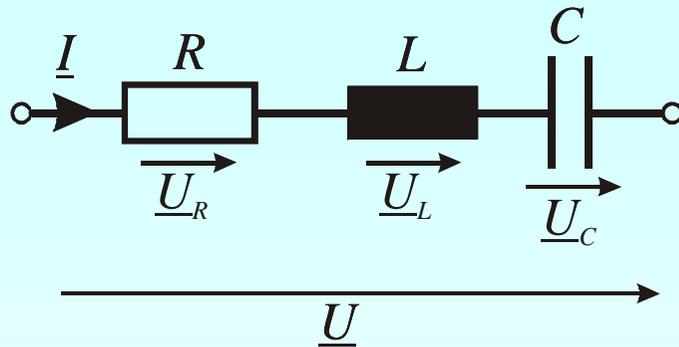
### Verwendete Geräte:

- Funktionsgenerator FG 200 speist Schwingkreis 100 mV ... 12 V ss
- Oszilloskop TDS 1002 misst  $u$  und  $i$ .
- Frequenzmesser Hengstler Tico 734
- 2 digitale Einbau-Voltmeter (0... 2 V und 0 ... 20 V bzw. 0 ... 40 V)
- Einbau-Amperemeter mit Messwiderstand
- **Beiden Masse-Punkte der Oszilloskopanschlüsse** (BNC) müssen an den **gleichen Bezugspunkt** (Punkt 2) gelegt werden (Masseanschluss der BNC-Kabel: schwarze Buchse).

# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Aufbau des $RLC$ - Reihenschwingkreises

- Ersatzschaltbild



- Einzelne Komponenten des Schwingkreises:



Spule



Kondensator

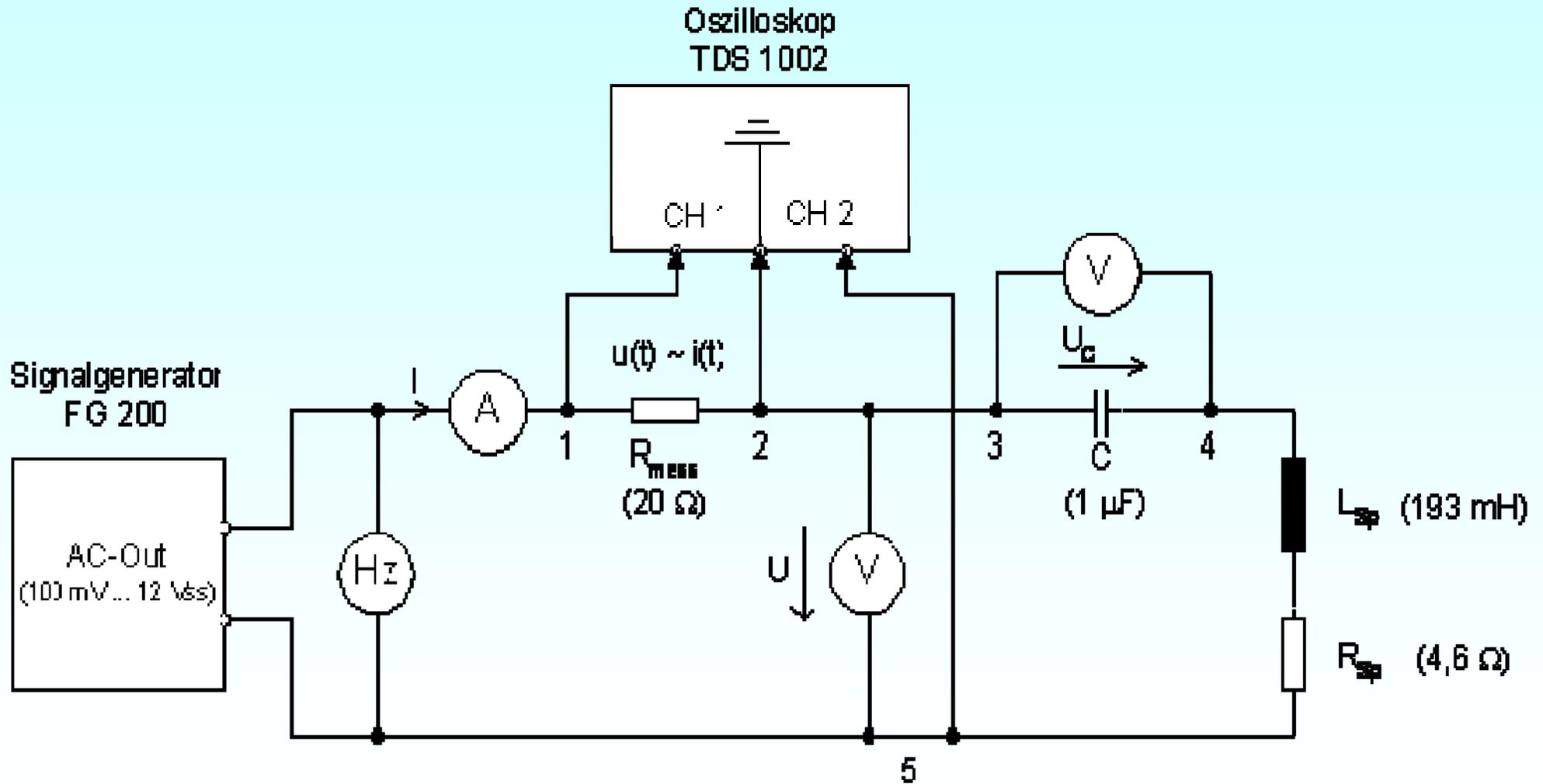


Widerstand



# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Versuchsaufbau des *RLC* - Reihenschwingkreises



# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Messprogramm des *RLC* - Reihenschwingkreises

- a) Zeitliches Verhalten der Spannungen und Ströme  
 b) Übertragungsfunktionen: Betragsgang :  $L(f)$ ,  $|I(f)|$ ,  $|Z(f)|$  , Phasengang :  $\varphi(f)$

| $f_{soll}$<br>(Hz) | $f_{ist}$<br>(Hz) | $U$<br>(SkW) | $U$<br>(V) | $U_C$<br>(SkW) | $U_C$<br>(V) | $I$<br>(SkW) | $I$<br>(mA) | $\Delta t$<br>(ms) | $\varphi_{Rech}$<br>(°) | $I_{Rech}$<br>(mA) | $ Z_{Rech} $<br>(Ω) | $L_{Rech}$<br>(dB) |
|--------------------|-------------------|--------------|------------|----------------|--------------|--------------|-------------|--------------------|-------------------------|--------------------|---------------------|--------------------|
| 50                 |                   |              |            |                |              |              |             |                    |                         |                    |                     |                    |
| 100                |                   |              |            |                |              |              |             |                    |                         |                    |                     |                    |
| 150                |                   |              |            |                |              |              |             |                    |                         |                    |                     |                    |
| 200                |                   |              |            |                |              |              |             |                    |                         |                    |                     |                    |
| 250                |                   |              |            |                |              |              |             |                    |                         |                    |                     |                    |
| 300                |                   |              |            |                |              |              |             |                    |                         |                    |                     |                    |

# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Auswertung: Spannungspegel am Kondensator

a) Messauswertung:

$$L(f) = 20 \cdot \log \left| \frac{U_c(f)}{U(f)} \right|$$

b) Rechnung:

$$L = 20 \cdot \log \left| \frac{U_c}{U} \right| = 20 \cdot \log \left| \frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \right|$$

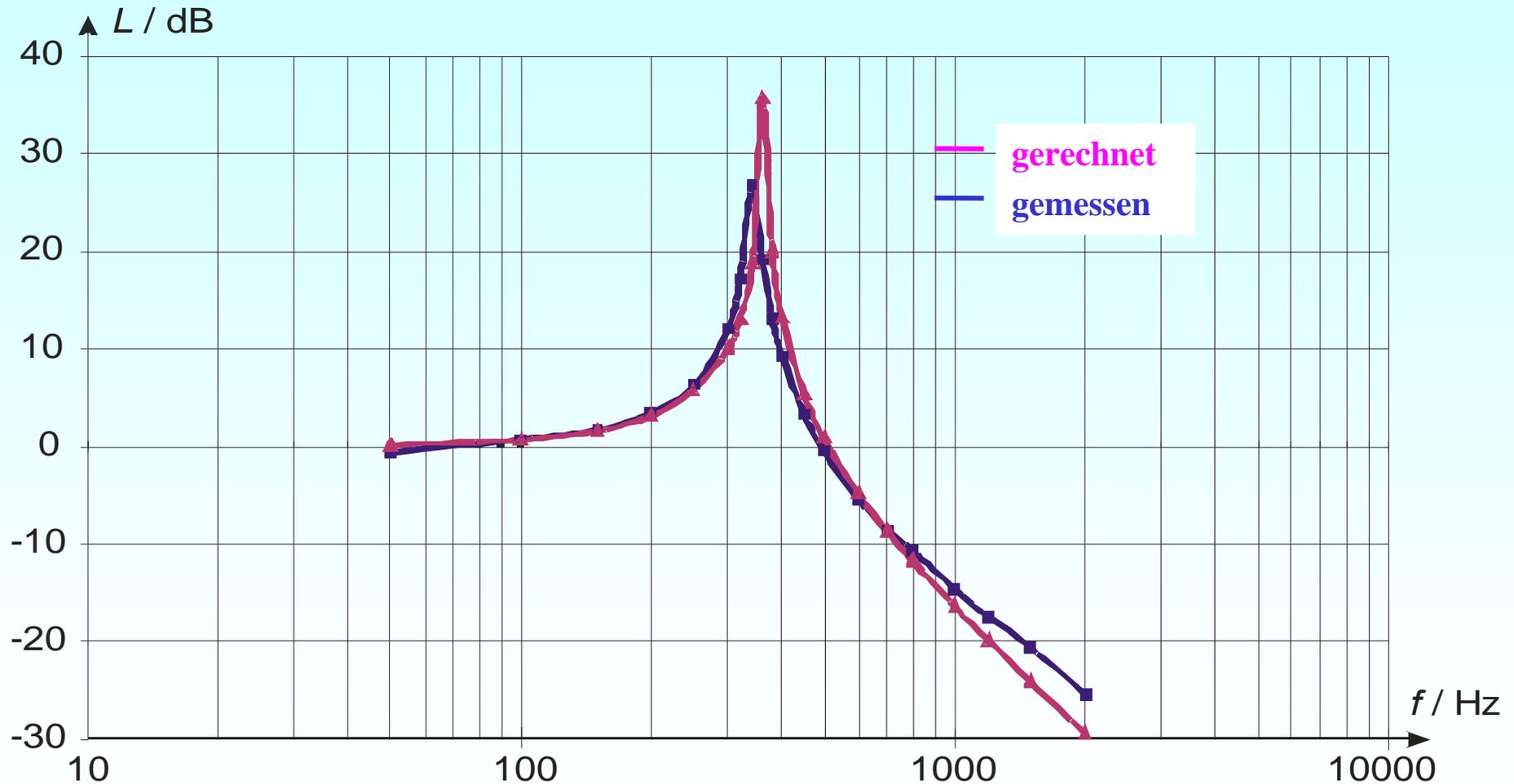
Messtabelle:

| f / Hz | L / dB |
|--------|--------|
| 50     | 0,2    |
| 100    | 0,7    |
| 150    | 1,6    |
| 200    | 3,2    |
| 250    | 5,7    |
| 300    | 10,1   |
| 320    | 13,2   |
| 342    | 18,8   |
| 360    | 35,8   |
| 380    | 19,9   |
| 400    | 13,2   |
| 450    | 5,3    |
| 500    | 0,9    |
| 600    | -4,8   |
| 700    | -8,7   |
| 800    | -11,8  |
| 1000   | -16,4  |
| 1200   | -20,0  |
| 1500   | -24,2  |
| 2000   | -29,4  |



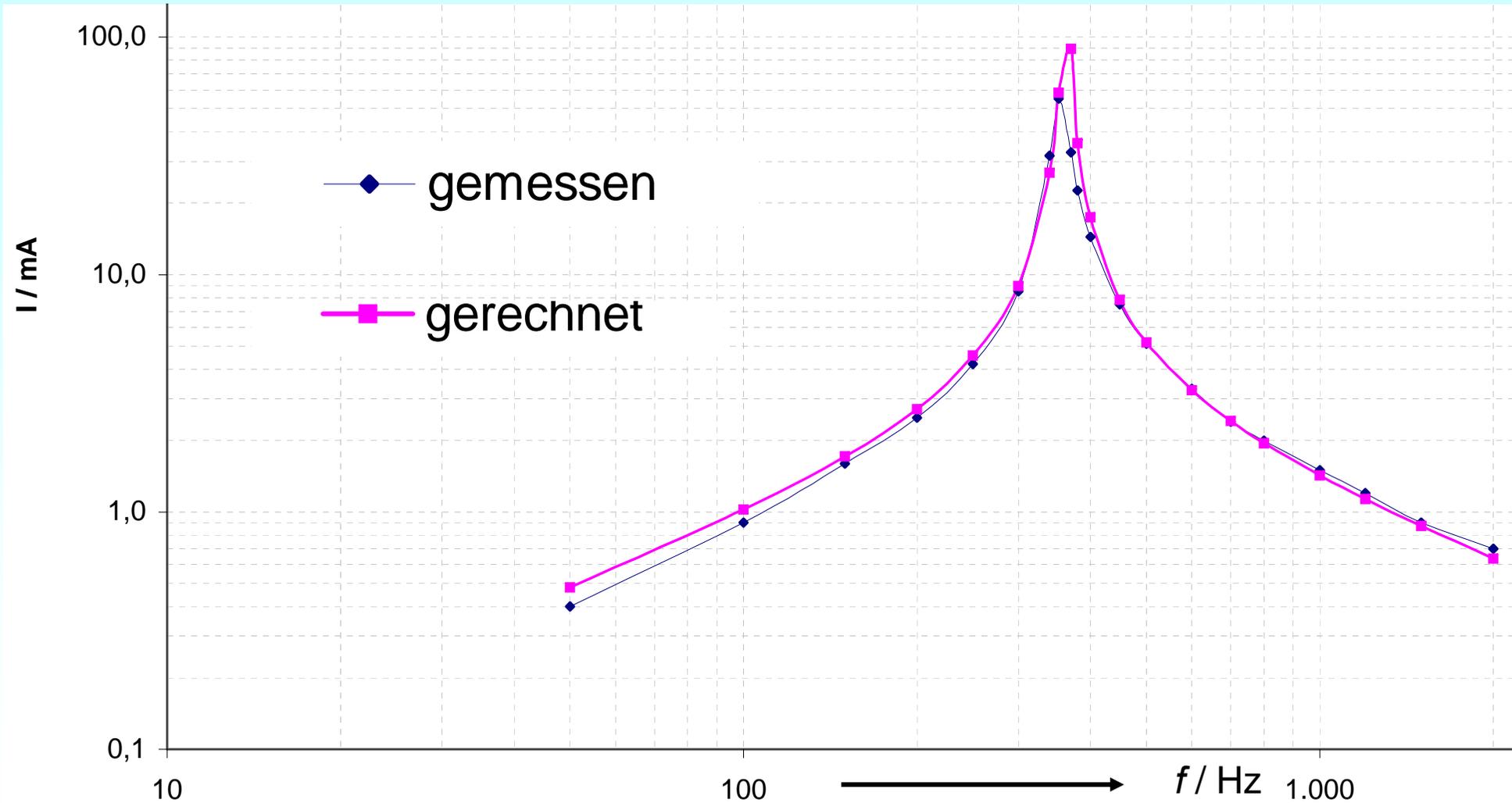
# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Spannungspegel $L(f)$ am Kondensator



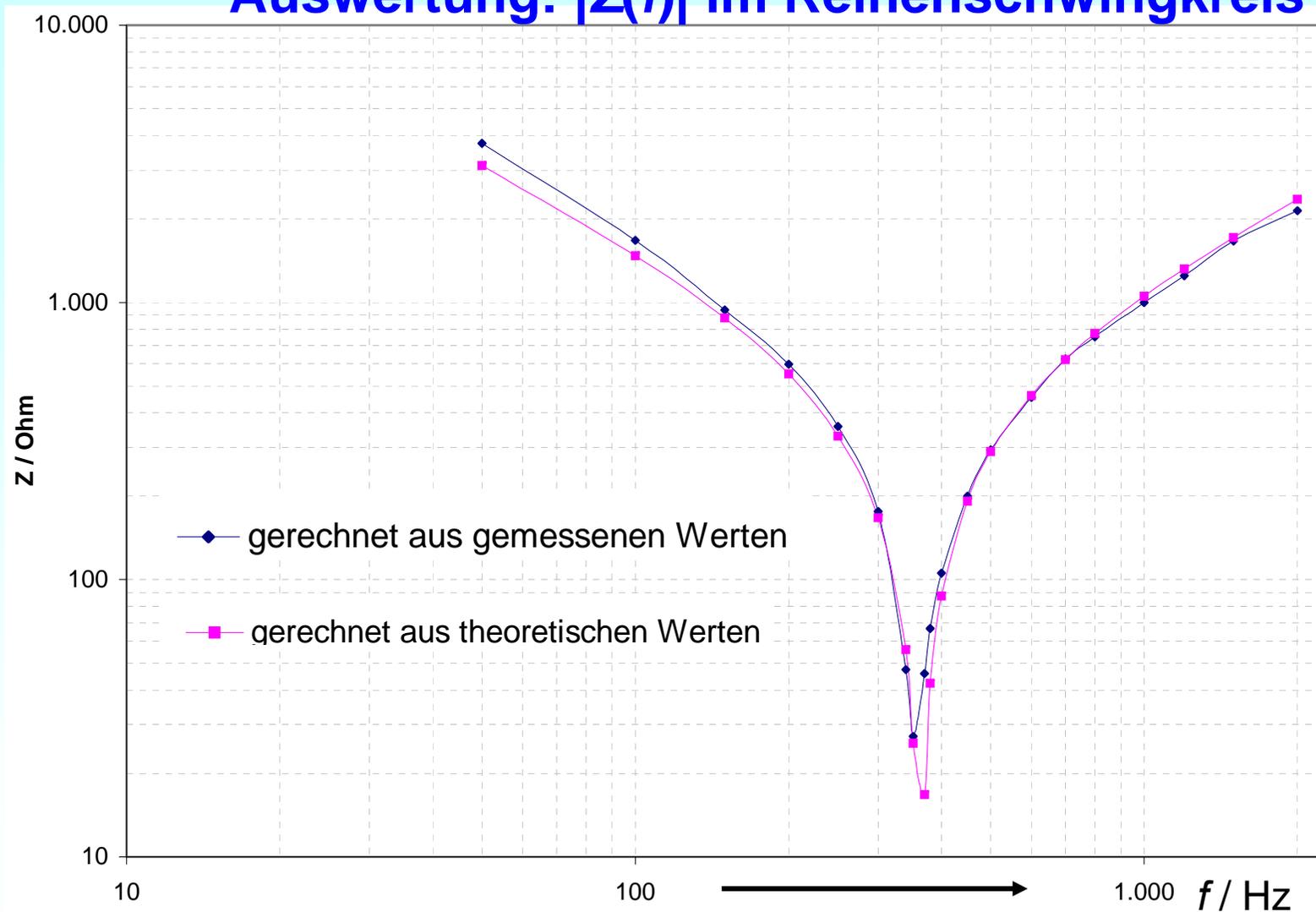
# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Auswertung: Strom im Reihenschwingkreis



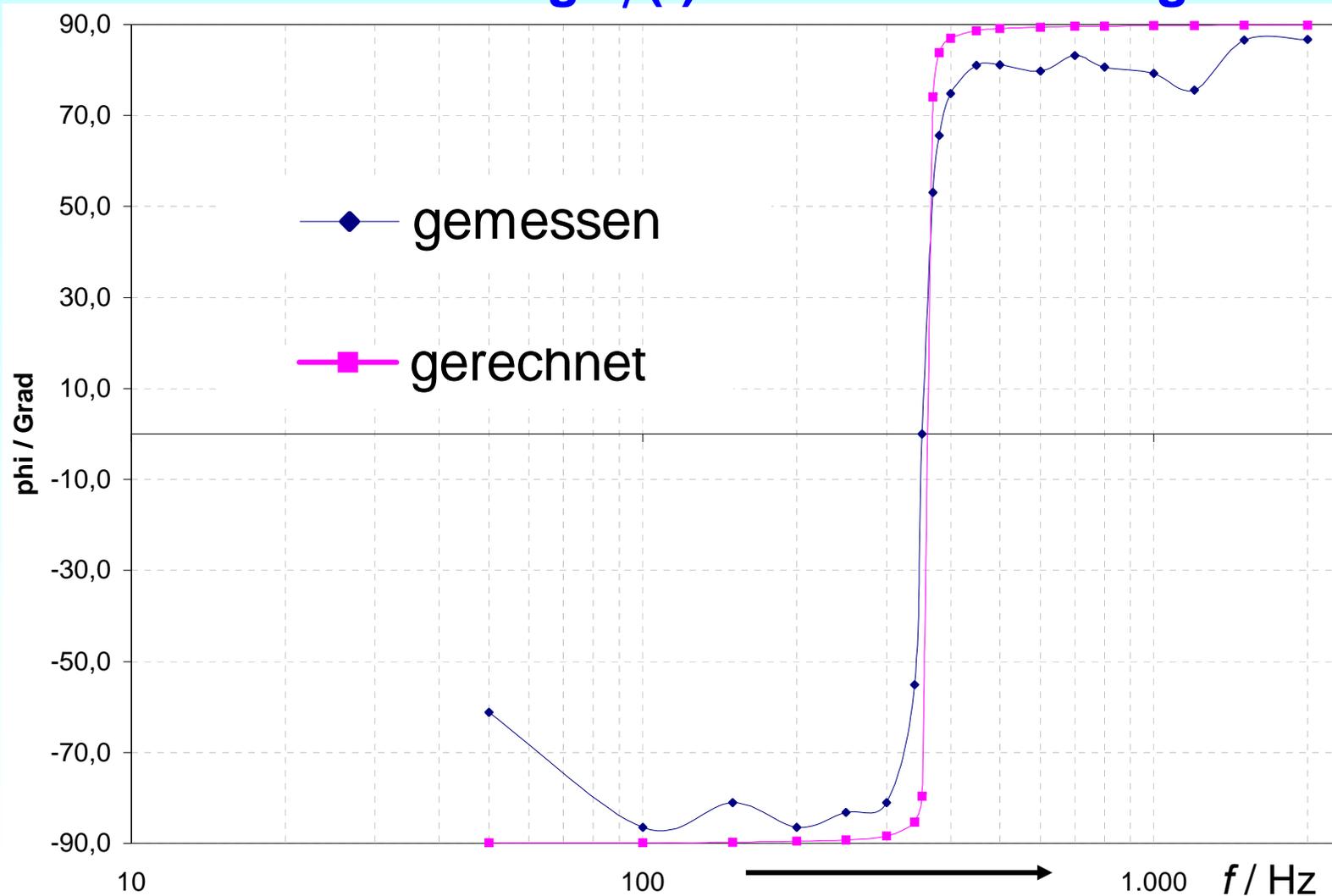
# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Auswertung: $|Z(f)|$ im Reihenschwingkreis



# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Auswertung: $\varphi(f)$ im Reihenschwingkreis



# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## 5.6 RLC - Parallelschwingkreis

### Verwendete Bauteile:

- Kondensator:  $C = 22 \mu\text{F}$
- Induktivität:  $L_{Sp}$  ca. 193 mH;  $R_{Sp}$  ca. 4,6  $\Omega$ ;  $N = 1200$ , auf Kern gesteckt, Eisenjoch offen = H-Feld schließt sich über Luft = lineare  $B-H$ -Charakteristik
- Mess-Shunt  $R_{mess} = 50 \Omega$ .

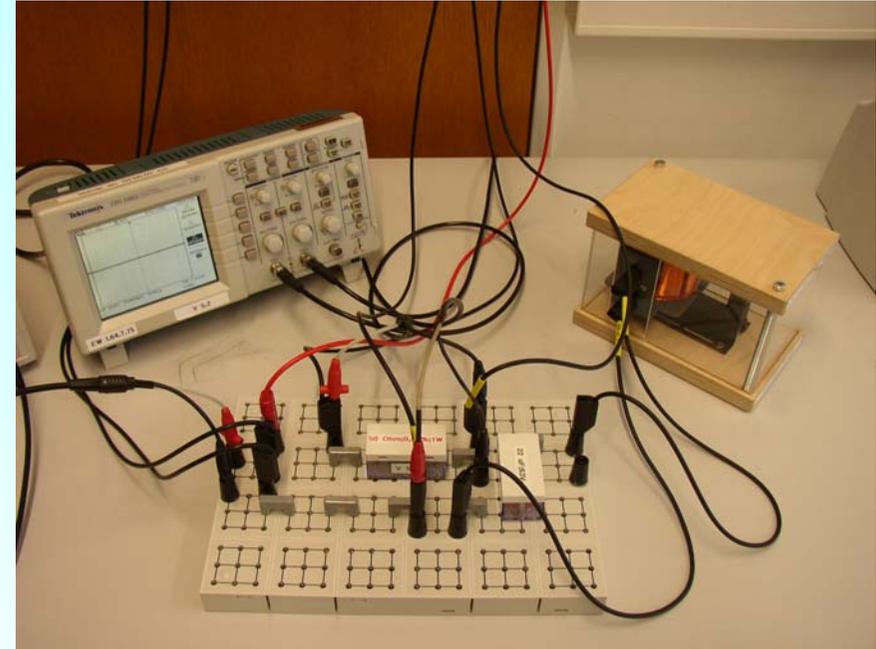
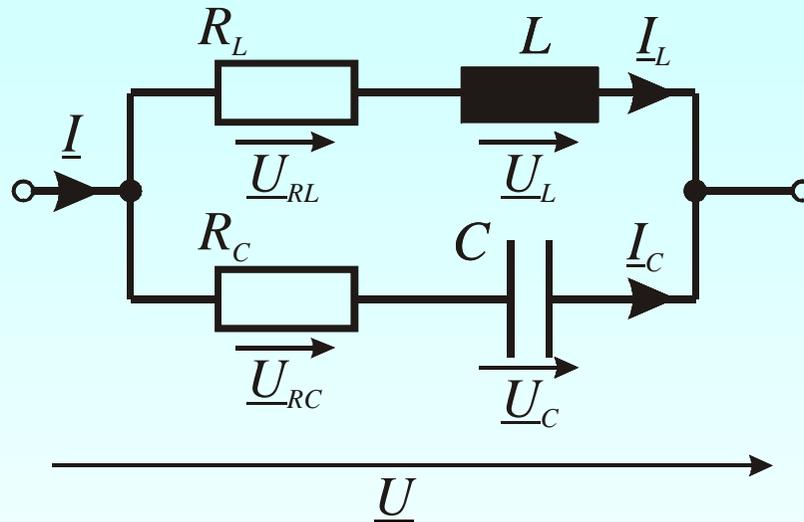
### Verwendete Geräte:

- Funktionsgenerator FG 200
- Frequenzmesser Hengstler Tico 734
- 2 digitale Einbau-Voltmeter (0... 2 V und 0 ... 20 V)
- Einbau-Amperemeter mit Messwiderstand
- Oszilloskop Tektronix - TDS 1002

# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Aufbau des $RLC$ - Parallelschwingkreises

- Ersatzschaltbild

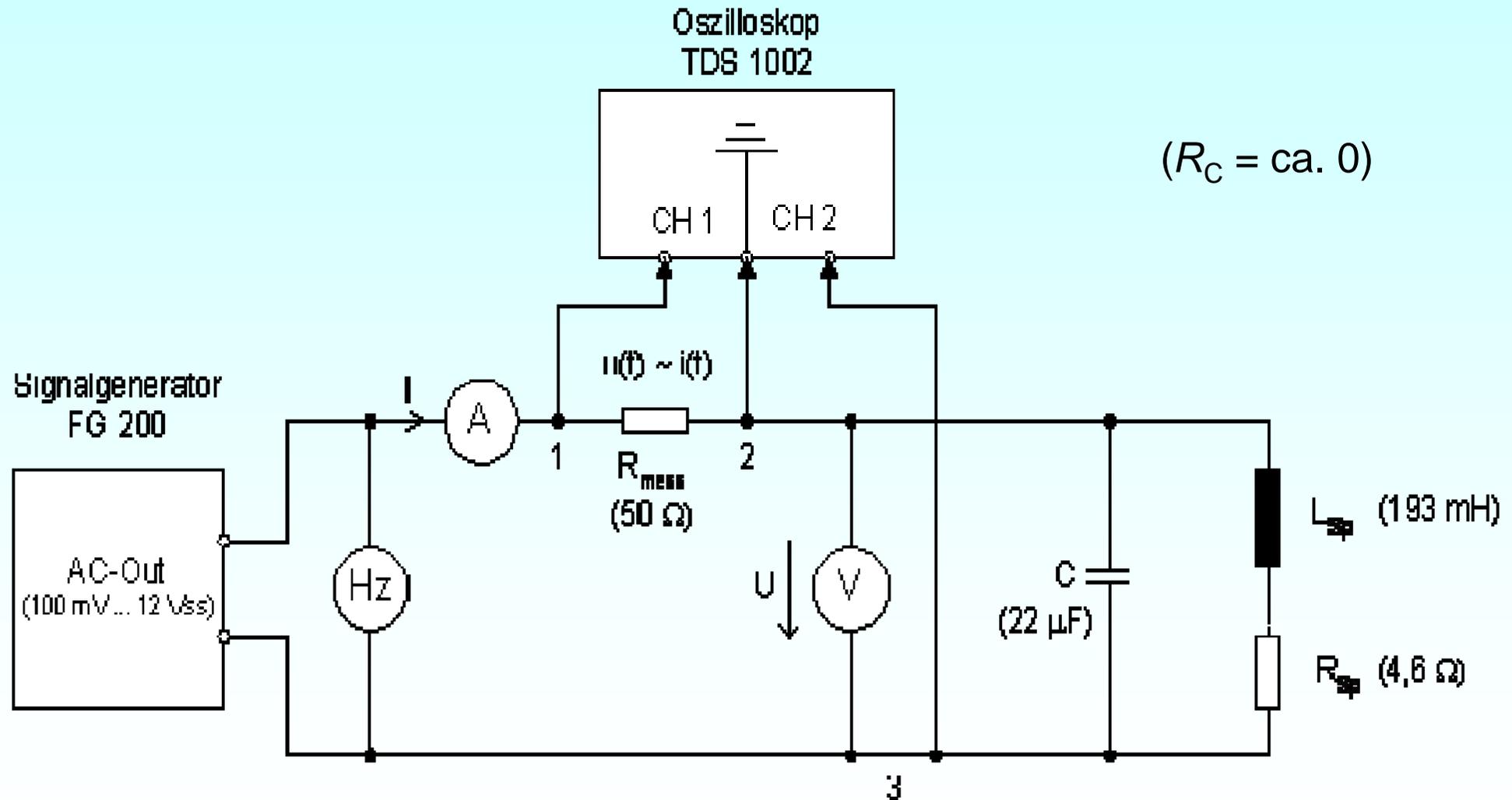


- Zwei unterschiedliche Resonanzpunkte :

1. Phasenverschiebungswinkel zwischen  $\underline{I}$  und  $\underline{U}$  **ist Null !**  
Diese Resonanzbedingung ist analog zu der vom Serienschwingkreis.
2. Gesamtstrom  $|\underline{I}|$  wird **minimal !**  
Diese Bedingung ist analog zum verlustlosen Parallelschwingkreis definiert.

# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Versuchsaufbau des $RLC$ - Parallelschwingkreises



# Schwingkreise und Wellenausbreitung

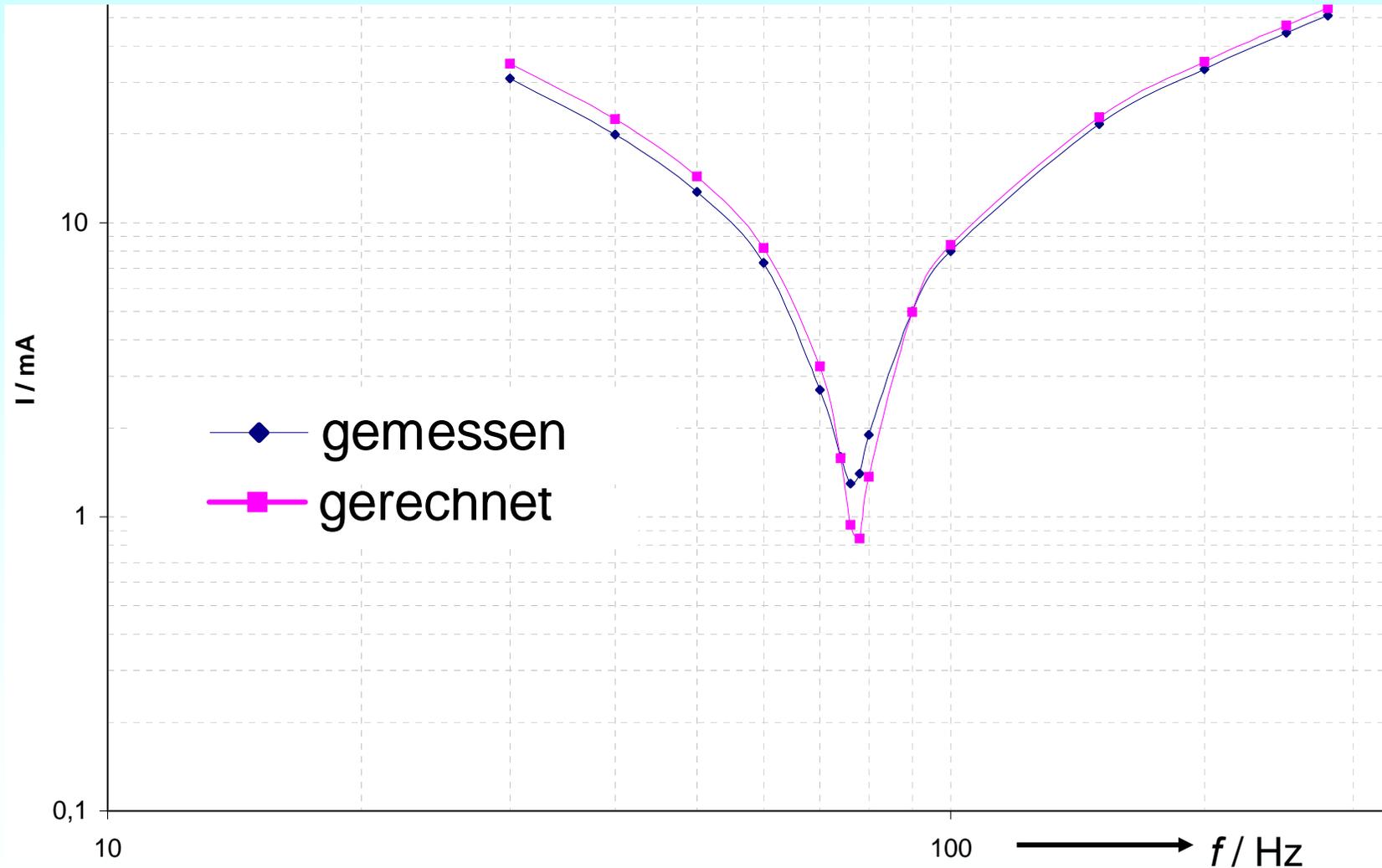
## Messprogramm des *RLC* - Parallelschwingkreises

- Zeitliches Verhalten der Spannungen und Ströme
- Übertragungsfunktionen: Betragsgang :  $L(f)$ ,  $|I(f)|$ ,  $|Z(f)|$  Phasengang :  $\varphi(f)$

| $f_{soll}$<br>(Hz) | $f_{ist}$<br>(Hz) | $U$<br>(SkW) | $U_{Messber}$<br>(V) | $U$<br>(V) | $I$<br>(SkW) | $I$<br>(mA) | $\Delta t$<br>(ms) | $I_{Rech}$<br>(mA) | $\varphi_{Rech}$<br>(°) | $ Z_{Rech} $<br>(Ω) |
|--------------------|-------------------|--------------|----------------------|------------|--------------|-------------|--------------------|--------------------|-------------------------|---------------------|
| 30                 |                   |              | 0 ... 2              |            |              |             |                    |                    |                         |                     |
| 40                 |                   |              | 0 ... 2              |            |              |             |                    |                    |                         |                     |
| 50                 |                   |              | 0 ... 2              |            |              |             |                    |                    |                         |                     |
| 60                 |                   |              | 0 ... 2              |            |              |             |                    |                    |                         |                     |
| 70                 |                   |              | 0 ... 2              |            |              |             |                    |                    |                         |                     |

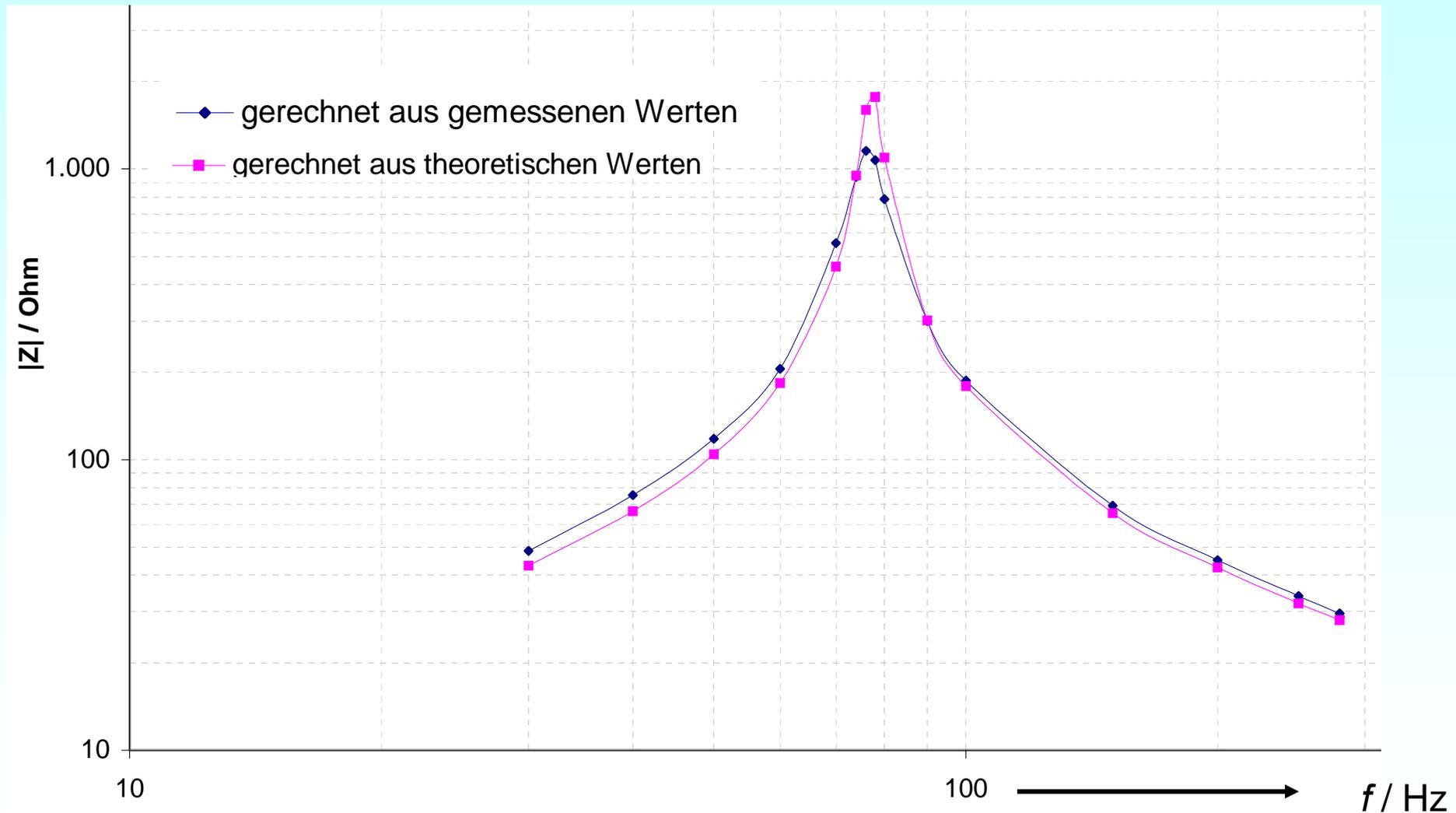
# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Auswertung: Bestimmung von $I(f)$ im Parallelschwingkreis



# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Auswertung: $|Z(f)|$ im Parallelschwingkreis



# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Auswertung: $\varphi(f)$ im Parallelschwingkreis

### Versuchsauswertung:

- Vergleich von Berechnung und Messung
- Gemessener Phasenwinkel: Aus dem Strom- und Spannungsszillogramm: Zeitversatz  $\Delta t$  zwischen Strom und Spannung

$$\frac{\varphi}{360^\circ} = \frac{\Delta t}{T} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\Delta t \cdot 360^\circ}{T}, \quad [\varphi] = ^\circ$$

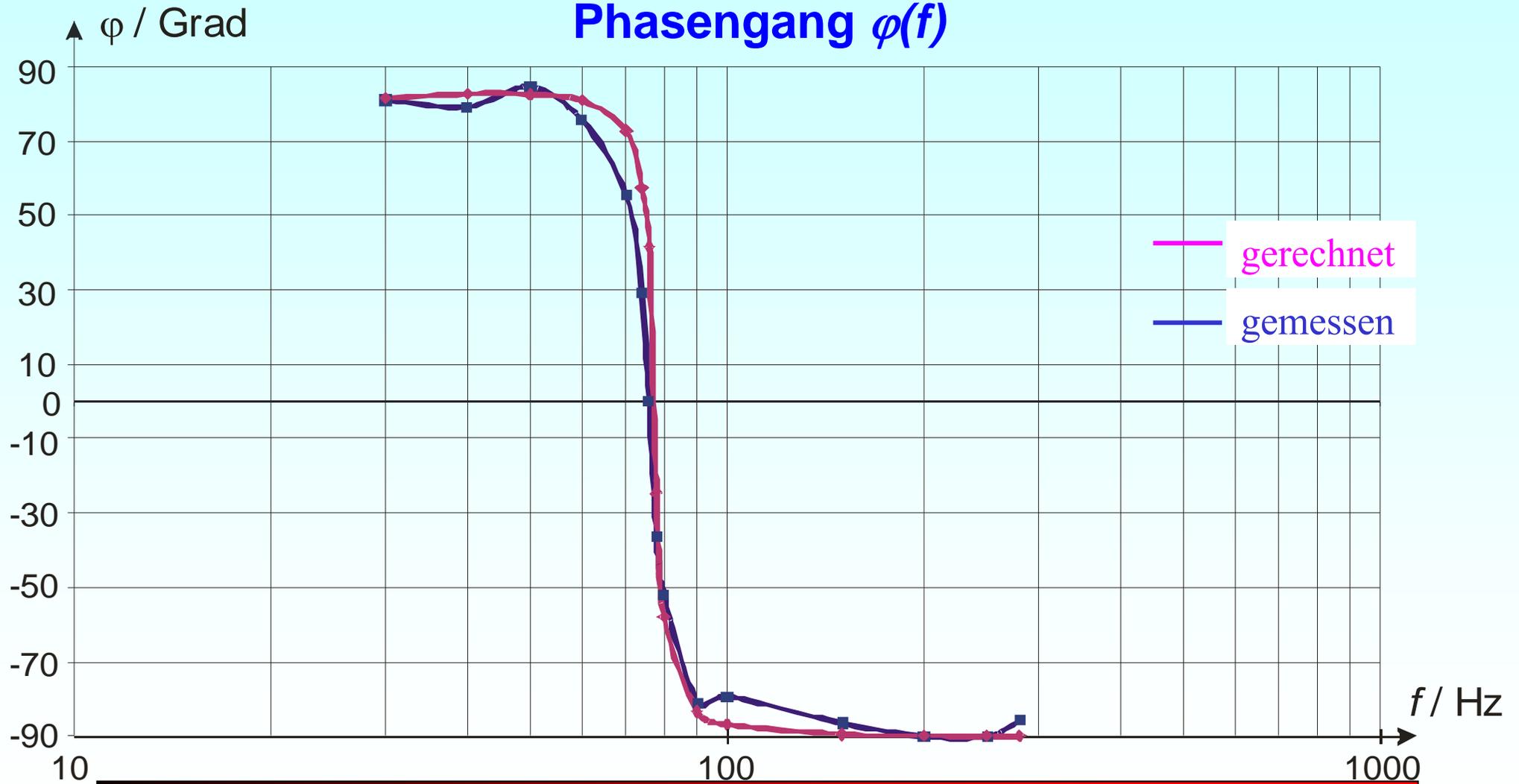
- Berechneter Phasenwinkel  $\varphi_{\text{theor}}$ : Aus komplexer Rechnung ermittelt über  $\underline{I}$  und  $\underline{U}$ : ( $R_C = \text{ca. } 0$ )

$$\underline{I} = \underline{U} \cdot \frac{R_L + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{\frac{L}{C} - j\frac{R_L}{\omega C}}$$

| f / Hz | $\varphi_{\text{theor}} / ^\circ$ |
|--------|-----------------------------------|
| 30     | 81,5                              |
| 40     | 82,6                              |
| 50     | 82,5                              |
| 60     | 80,9                              |
| 70     | 72,9                              |
| 74     | 57,2                              |
| 76     | 41,6                              |
| 78     | -24,6                             |
| 80     | -57,8                             |
| 90     | -83,3                             |
| 100    | -86,8                             |
| 150    | -89,5                             |
| 200    | -89,8                             |
| 250    | -89,9                             |
| 280    | -89,9                             |

# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## RLC – Parallelschwingkreis: Berechneter und gemessener Phasengang $\varphi(f)$



# Schwingkreise und Wellenausbreitung

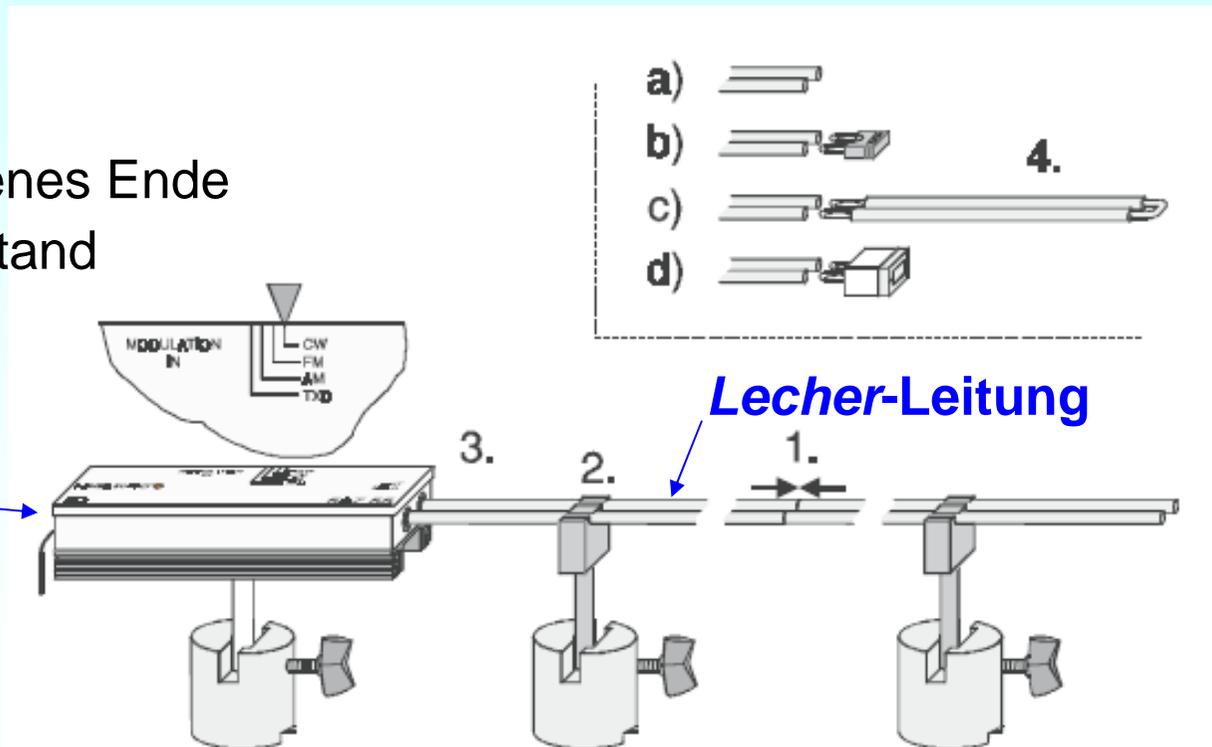
## 5.7 Lecher - Leitung

### Versuchsziele:

Nachweis der Ausbreitung von Strom- und Spannungswellen: Bestimmung der Strom- und Spannungsmaxima

- a) offenes Leitungsende
- b) kurzgeschlossenes Ende
- c) verlängertes kurzgeschlossenes Ende
- d) Abschluss mit Wellenwiderstand

**HF-Sender:** Wellenlängen  
im dm-Bereich



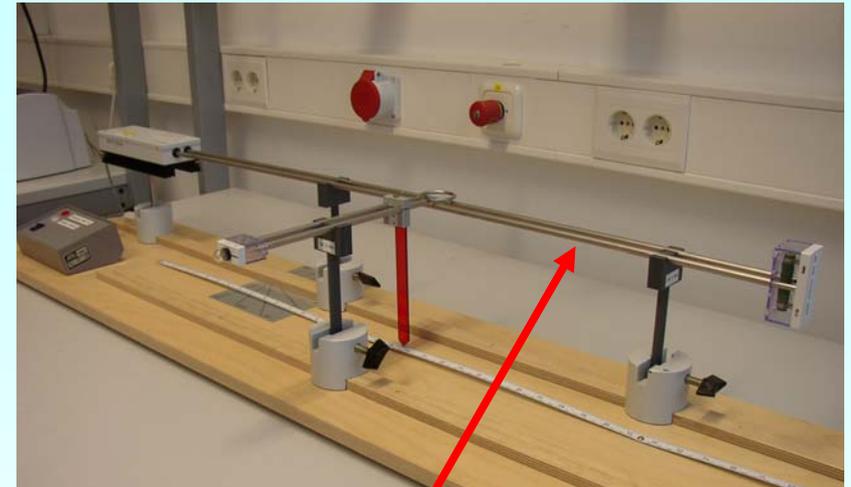
# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Lecher - Leitung

### a) Versuchsprinzip :

- Am Leitungsanfang: Wechselspannung mit fester Amplitude & Frequenz  $f$  eingepreßt
- „Eingeschwungener“ Zustand nach dem Abklingen des Einschwingvorgangs => **stehende Strom- und Spannungswellen** mit Frequenz  $f$  und Wellenlänge  $\lambda = 69.1$  cm

$$f = 435\text{MHz} = \frac{1}{T} = \frac{c_0}{\lambda} \Rightarrow c_0 = f \cdot \lambda$$



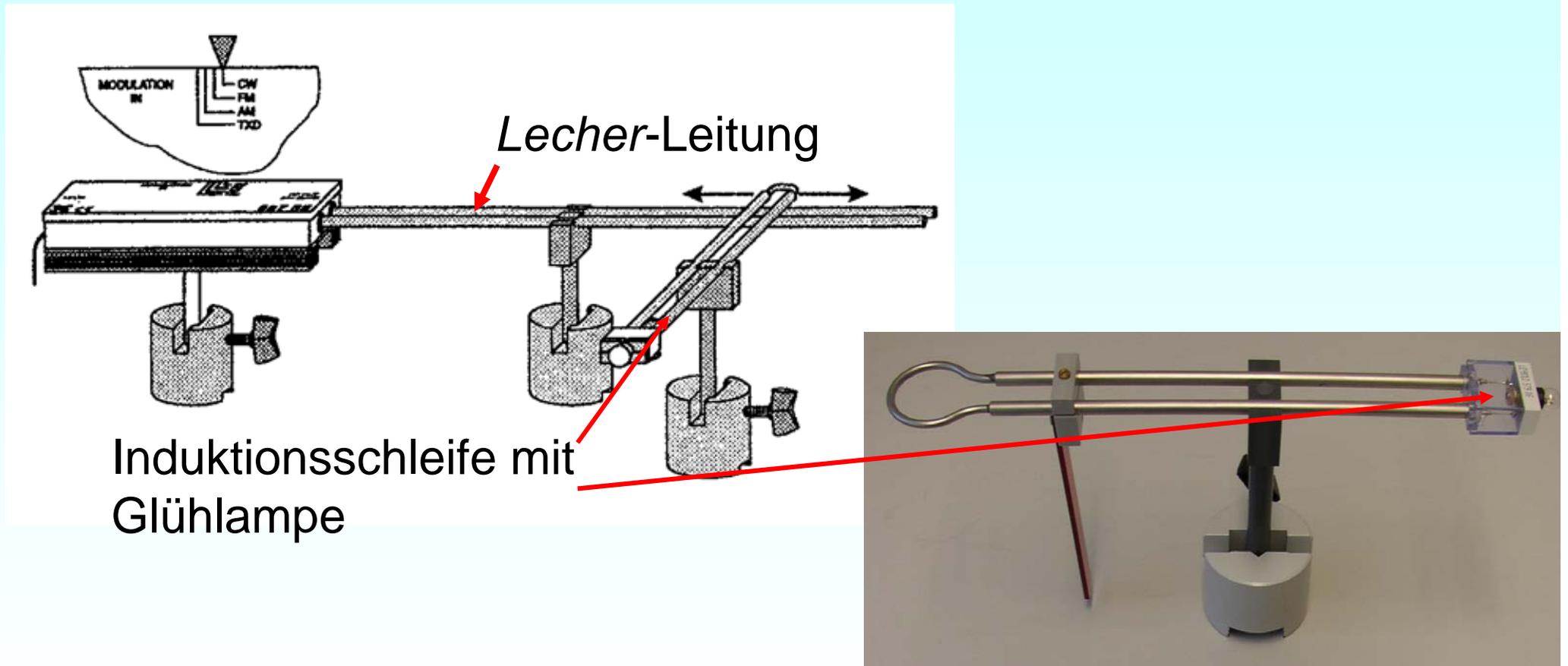
**Lecher**-Leitung

### b) Versuchsdurchführung:

- Niemals den Dezimeterwellensender mit offenem Ausgang betreiben!
- Bei Spannungsmessung den Kunststoff-Adapter bzw. Schleifsockel nicht berühren (Messergebnis verfälscht durch Ableitstrom über den Körper!)
- Bei Abschluss mit dem Wellenwiderstand max. 5 min Einschaltdauer zulässig!

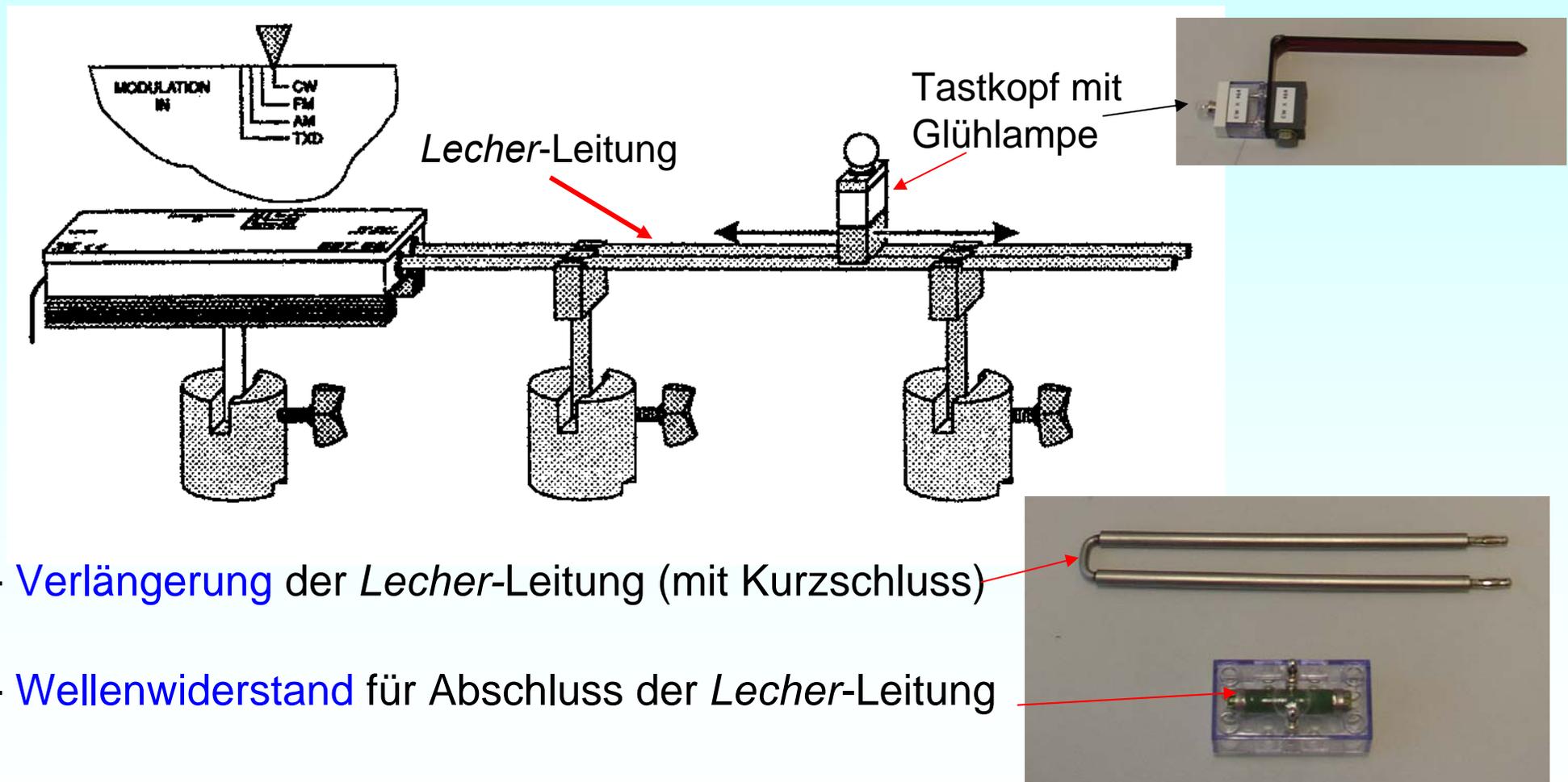
# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Lecher-Leitung - Strommessung mit Induktionsschleife



# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Lecher-Leitung - Spannungsmessung mit Tastkopf



- Verlängerung der Lecher-Leitung (mit Kurzschluss)
- Wellenwiderstand für Abschluss der Lecher-Leitung

# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Lecher-Leitung - Messdurchführung

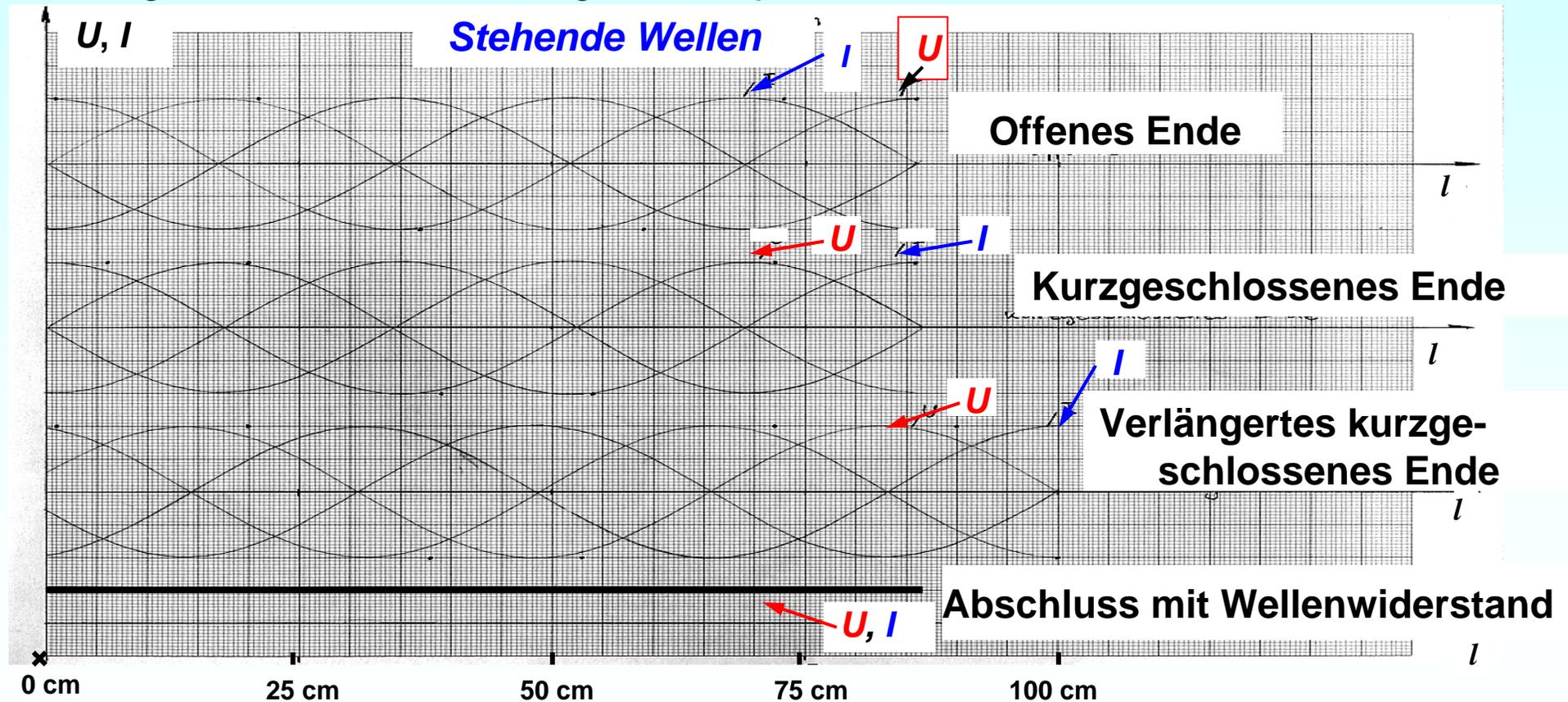
| Abschlussart                           | Bauch mit Entfernung in cm nacheinander eintragen |  |  |  |  |  |
|--|---|--|--|--|--|--|
| a) offenes Ende                        | $U$   |  |  |  |  |  |
|  | $I$   |  |  |  |  |  |
| b) kurzgeschlossenes Ende              | $U$   |  |  |  |  |  |
|  | $I$   |  |  |  |  |  |
| c) verlängertes kurzgeschlossenes Ende | $U$   |  |  |  |  |  |
|  | $I$   |  |  |  |  |  |
| d) Abschluss mit Wellenwiderstand      | $U$   |  |  |  |  |  |
|  | $I$   |  |  |  |  |  |

# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Lecher-Leitung – Auswertung: Stehende Wellen

Verwendetes Messgerät: Digitales Einbau-Voltmeter (0 ... 20 V)

Auswertung: Qualitativer Spannungs-Stromverlauf auf der *Lecher*-Leitung für verschiedene Leitungsabschlüsse: Wellenlänge 69 cm, passt zu 435 MHz



# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## 5.8 Dipolantenne

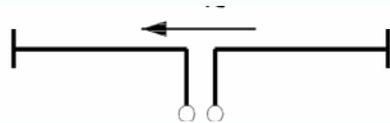
### Versuchsziele:

- Bestimmung der Abstrahlcharakteristik
- Bestimmung der Polarisationsrichtung der abgestrahlten Dezimeterwellen.
- Untersuchung der Wirkung eines Antennenstabes als Reflektor und Direktor
- Frequenz 435 MHz – Speisefrequenz abgestimmt auf Dipollänge

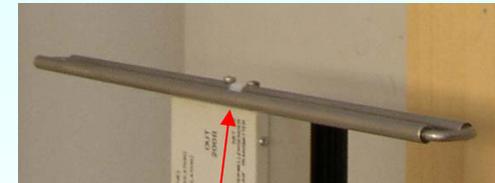
### Stabantenne



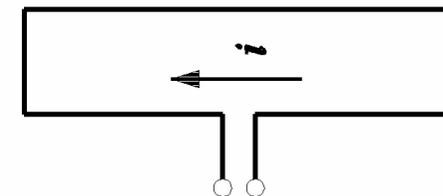
HF-Einspeisung



### Faltdipol-Antenne

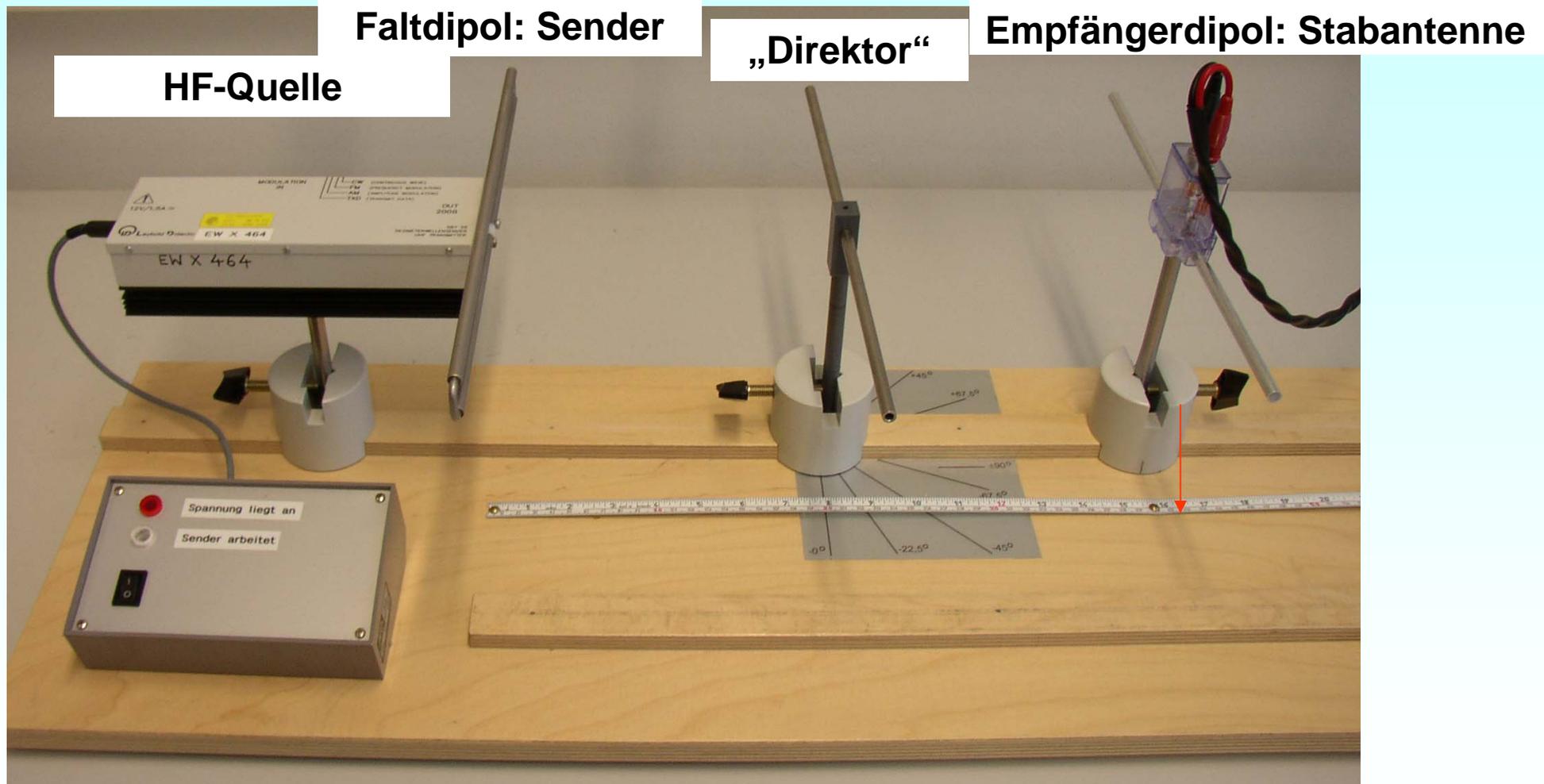


HF-Einspeisung



# Schwingkreise und Wellenausbreitung

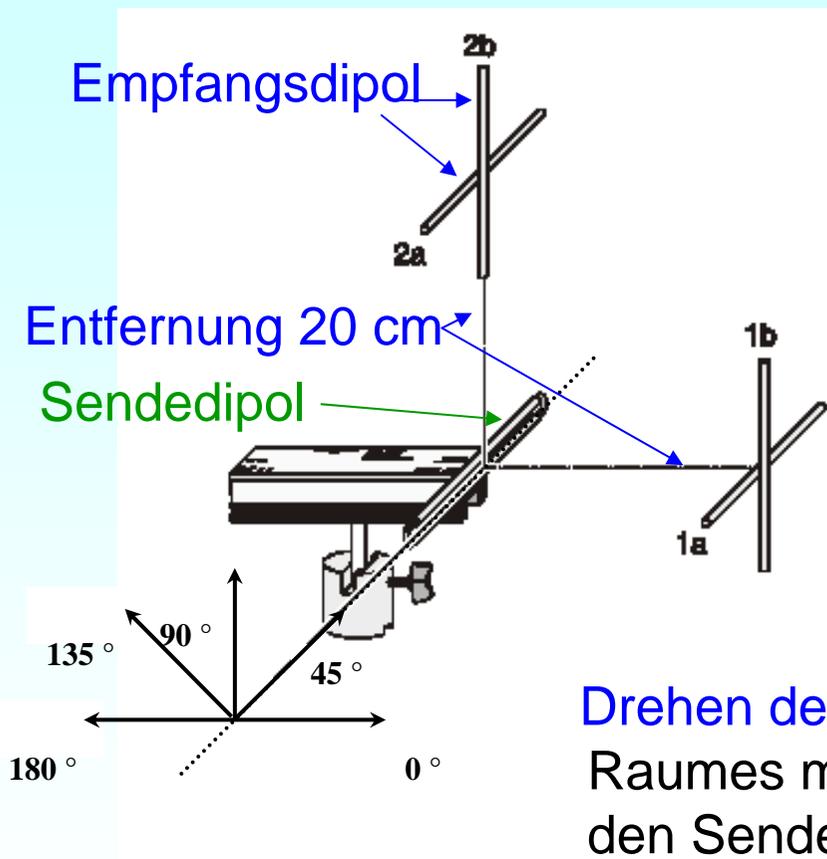
## Dipol-Antenne - Messanordnung



# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Dipolantenne - Versuchsdurchführung

**Messung 1:** Abstrahlcharakteristik – Polarisation: Empfangsdipol mit Glühlampe

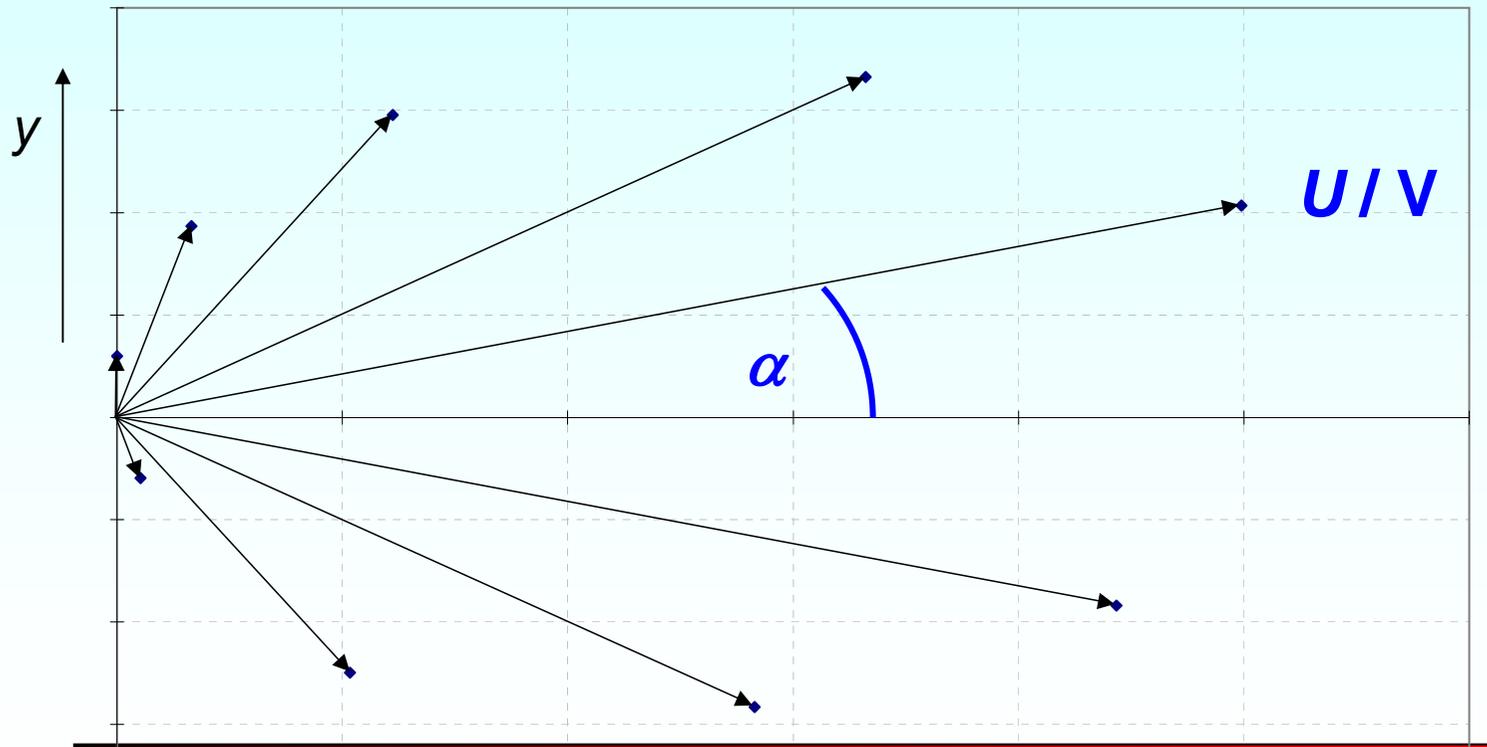


# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Messung 2: Richtcharakteristik

Messwerte der Spannung in Abhängigkeit des Winkels

|                      |      |     |      |     |     |     |       |     |       |
|----------------------|------|-----|------|-----|-----|-----|-------|-----|-------|
| $\alpha$ in $^\circ$ | 22,5 | 45  | 67,5 | 80  | 90  | -80 | -67,5 | -45 | -22,5 |
| $U$ in V             | 5,4  | 4,7 | 3,2  | 1,9 | 0,6 | 0,6 | 2,7   | 4   | 4,8   |



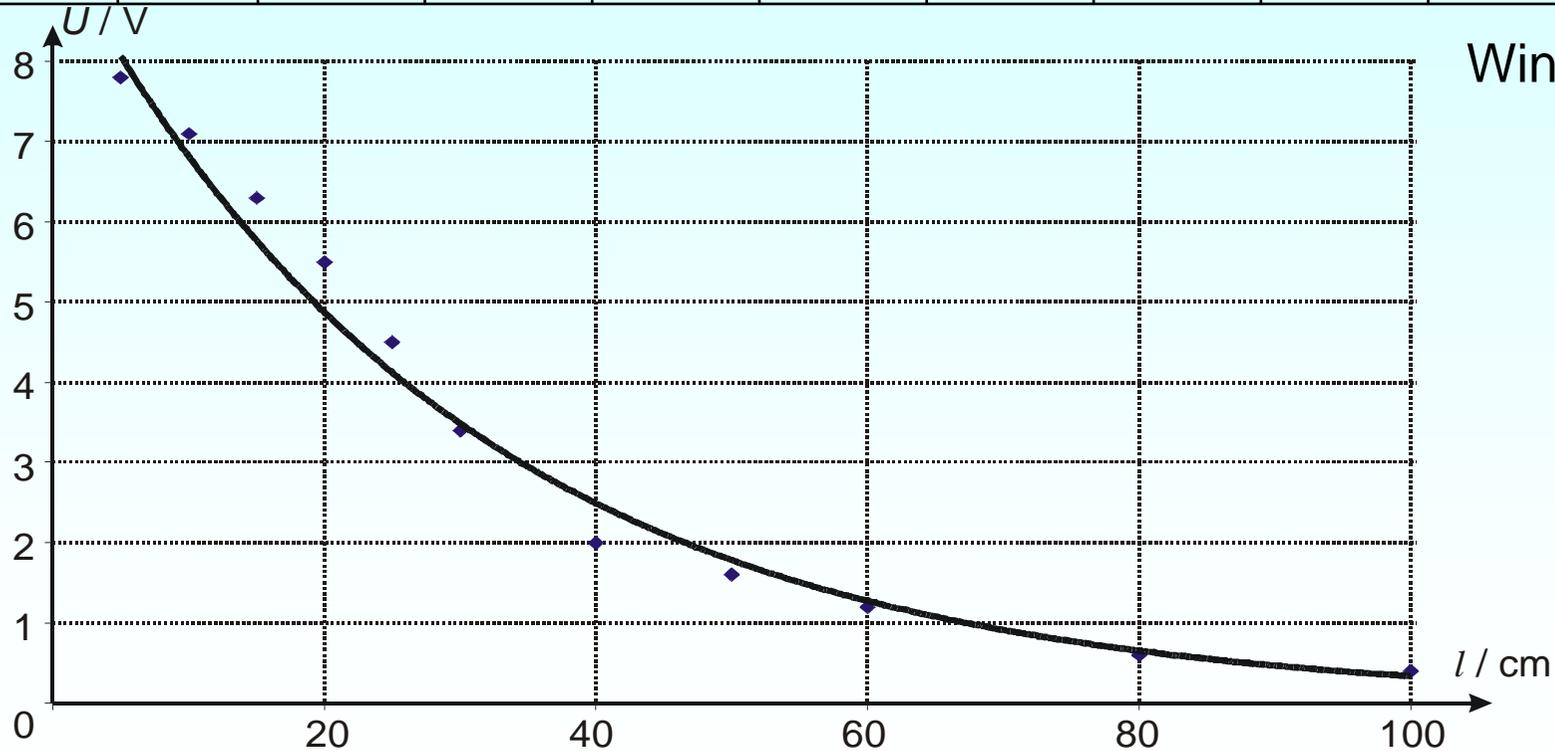
Abstand:  
Sender-Empfänger:  
20 cm

# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Messung 3: Abstandskarakteristik

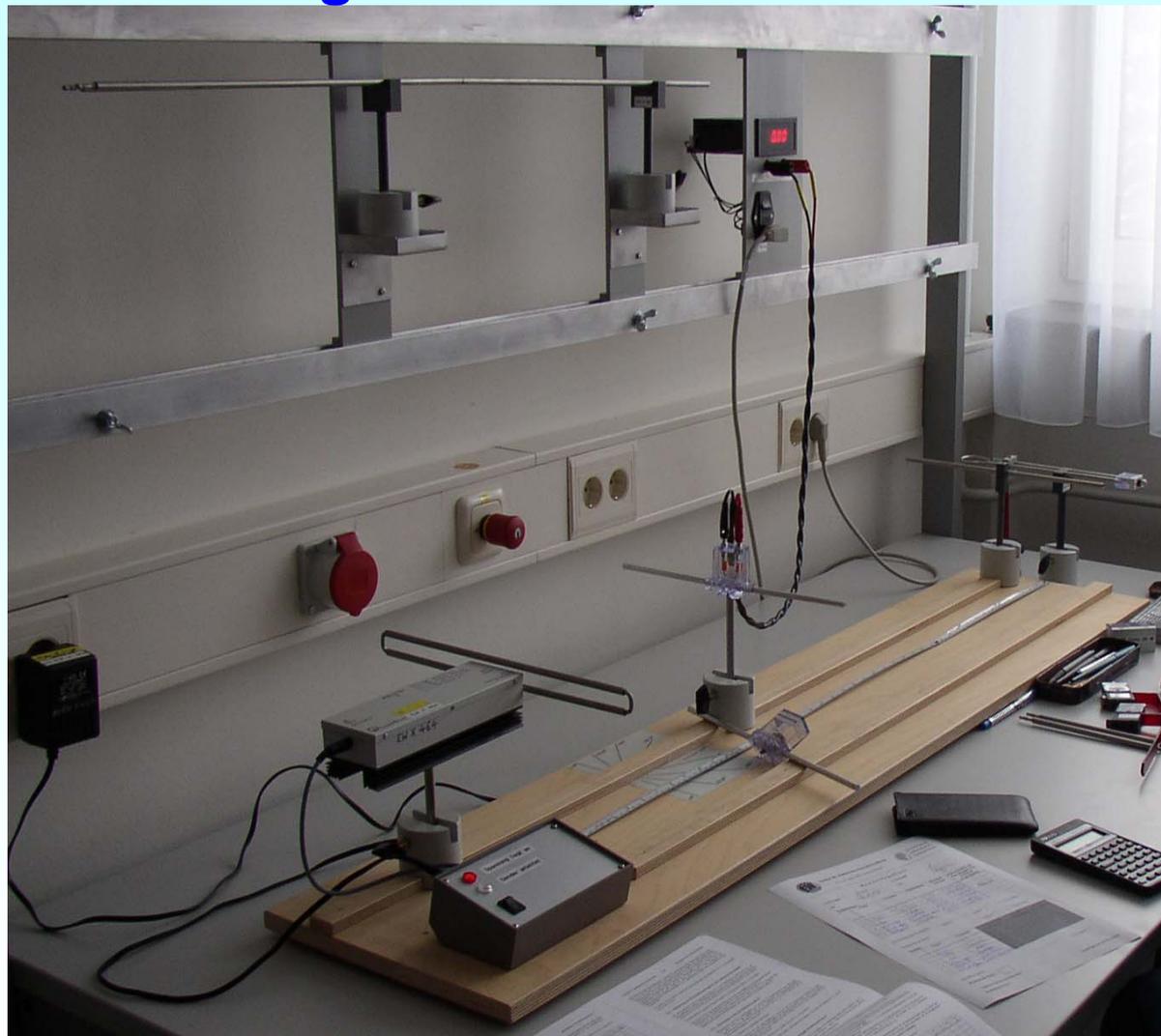
Messwerte der Spannung in Abhängigkeit des Abstands

|           |     |     |     |     |     |     |    |     |     |     |     |
|-----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|-----|-----|-----|-----|
| $l$ in cm | 5   | 10  | 15  | 20  | 25  | 30  | 40 | 50  | 60  | 80  | 100 |
| $U$ in V  | 7,8 | 7,1 | 6,3 | 5,5 | 4,5 | 3,4 | 2  | 1,6 | 1,2 | 0,6 | 0,4 |



# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Messung der Abstandscharakteristik



# Schwingkreise und Wellenausbreitung

## Messung 4: Untersuchung des Einflusses eines zusätzlichen Antennenstabes als Reflektor

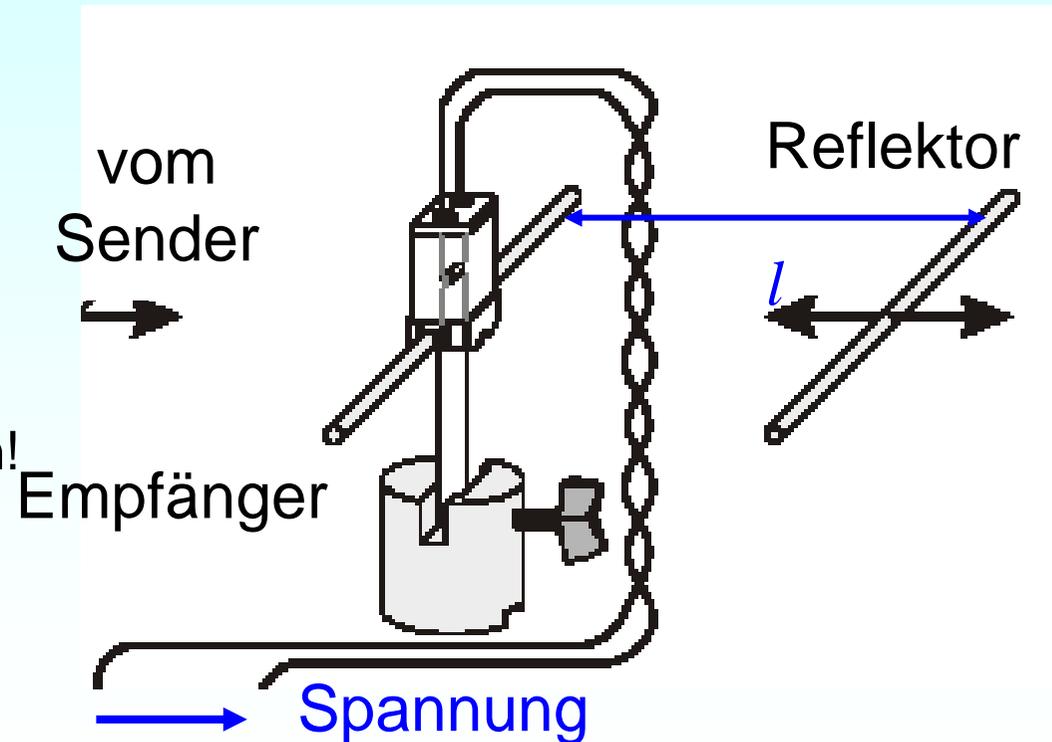
- Empfangsdipol mit Diode 40 cm vom Sendedipol entfernt aufstellen
- Parallel zum Sendedipol ausrichten.
- Reflektor hinter Empfangsdipol anordnen – Ort maximaler Spannung suchen

|           |     |      |      |      |
|-----------|-----|------|------|------|
| $l$ in cm | 40  | 57,5 | 77   | 92   |
| $U$ in V  | 1,9 | 2,94 | 1,68 | 2,02 |

Bei 57,5 cm muss der Reflektor angebracht werden, um das ausgesendete Signal optimal zu verstärken!

$$\lambda / 4 = 69.1 / 4 = 17.3\text{cm}$$

$$57.5 - 40 = 17.5\text{cm} \cong \lambda / 4$$



**Wir wünschen  
interessante Versuchsnachmittage  
und gutes Gelingen !  
Danke für Ihre Aufmerksamkeit!**

Ansprechpartner :  
T. Knopik, S3|10/336  
Tel. : 06151 / 16-5598  
[tknopik@ew.tu-darmstadt.de](mailto:tknopik@ew.tu-darmstadt.de)