Dynamik elektromechanischer Systeme

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

TU Darmstadt 2013 Privatissimum für Dissertanden



TU Darmstadt
Institut für Elektrische Energiewandlung

Andreas Binder

abinder@ew.tu-darmstadt.de

Vorlesungsunterlagen von
o. Univ. Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. habil. Adalbert Prechtl,
TU Wien
Institut für wissenschaftliche Grundlagen und Theorie der Elektrotechnik

Dynamik elektromechanischer Systeme

TU Darmstadt 2013 Privatissimum für Dissertanden

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Diese Vorlesung wurde als „Privatissimum“ für Dissertanden des Instituts für Elektrische Energiewandlung der TU Darmstadt in den Jahren 2013 und 2014 von Prof. A. Binder gehalten.

Sie basiert auf dem Kapitel 1 der gleichnamigen Vorlesung von Prof. A. Prechtl, die dieser in den Jahren 1983 – 1985 an der TU Wien gehalten hat, und wurde entsprechend um Anwendungsbeispiele erweitert.

A. Binder, Darmstadt, Mai 2015

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Dynamik elektromechanischer Systeme

Vorlesung im Wintersemester 1983/84

Adalbert Prechtl

Technische Universität Wien

Inhalt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

1. Diskrete Systeme

1.1. Leistung, Energiezufuhr

1.2. Energiespeicher

1.2.1. Speicher potentieller Energie

1.2.2. Speicher kinetischer Energie

1.3. Dissipative Elemente

1.4. Verallgemeinerte Koordinaten

1.5. Virtuelle Verschiebungen

1.6. Lagrange-Gleichungen

1.7. Mechanische und elektrische Beispiele

1.8. Grundsysteme elektromechanischer Wandler

1.8.1. Das magnetische Grundsystem

1.8.2. Das elektrische Grundsystem

1.9. Übungsaufgaben

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

1.10. Stationäre Zustände. Rotierende magnetische Wandlersysteme

1.10.1. Grundsystem

1.10.2. System mit konstantem Luftspalt

1.10.3. System mit variablem Luftspalt

1.11. Übungsaufgaben

1.12. Dynamik linearer Systeme

1.12.1. Linearisierung der Systemgleichungen in bezug auf eine bekannte Lösung

1.12.2. Systeme mit konstanten Koeffizienten

1.12.3. Systeme mit nicht konstanten Koeffizienten

1.13. Übungsaufgaben

1.14. Nichtlineare Systeme

1.14.1. Verlustfreie und konservative Systeme

1.14.2. Beispiele

1.14.3. Stark gedämpfte Systeme

1.14.4. Selbsterregte Schwingungen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

2. Felder und bewegte Körper

2.1. Grundgleichungen

2.1.1. Umformung der Maxwell-Gleichungen

2.1.2. Normierung der Differentialgleichungen

2.1.3. Das elektrische Feldsystem

2.1.4. Das magnetische Feldsystem

2.1.5. Kräfte und Drehmomente

2.2. Das Eindringen des Magnetfeldes in bewegte Leiter

2.2.1. Die Bullard-Gleichung

2.2.2. Orientierende Beispiele zur Felddiffusion

2.2.3. Beispiel zur stationären Feldverdrängung: Rotierender Vollzylinder im magnetischen Feld

2.2.4. Beispiel zur instationären Flußverdrängung: Erzeugung extrem starker Magnetfelder durch Feldkompression

2.2.5. Beispiel: Kräfte an bewegten Leitern. Ein Trag- und Vortriebssystem

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

2.3. Relaxation und Konvektion elektrischer Ladung

2.3.1. Die Relaxationsgleichung

2.3.2. Orientierende Beispiele

2.3.3. Beispiel zur stationären Ladungskonvektion: Rotierender Vollzylinder im elektrischen Feld

2.4. Übungsaufgaben

3. Kontinuierliche Systeme

3.1. Elektromagnetische Kräfte und verformbare Körper

3.1.1. Beschreibung der Bewegung. Verformungsgrößen

3.1.2. Kräfte, Spannungen, Bewegungsgleichungen

3.1.3. Beispiele

3.1.4. Die Äquivalenz unterschiedlicher Kraftansätze

3.2. Ideale Flüssigkeiten

3.2.1. Wechselwirkung über elektrische Ströme

3.2.2. Alfvén-Wellen

3.2.3. Stationäre Strömung im Magnetfeld. MHD-Wandler

3.2.4. Wechselwirkung über die Magnetisierung. Ferromagnetische Flüssigkeiten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

3.3. Newton'sche Flüssigkeiten

3.3.1. Wechselwirkung über elektrische Ströme

3.3.2. Die Poiseuille-Hartmann-Strömung

3.4. Isotrope Festkörper

3.4.1. Magnetoelastische Wechselwirkungen in isotropen Festkörpern

3.4.2. Zur Frage des Kraftangriffs

3.5. Anisotrope Festkörper

3.5.1. Die piezoelektrischen Grundgleichungen

3.5.2. Piezoelektrische Wellen und Schwingungen

3.6. Übungsaufgaben

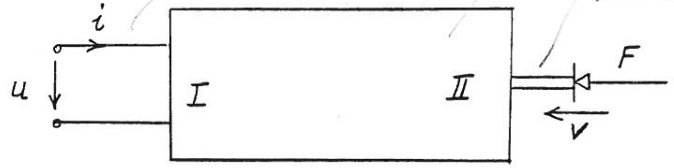
Literatur

1. Diskrete Systeme

"System als räumlich abgegrenzter Bereich
Wechselwirkung mit Umgebung über "Anschlüsse"
Darstellung durch konzentrierte Elemente

1.1. Leistung, Energiezufuhr

Schema, z.B.



Wechselwirkung mit Umgebung über Anschlüsse I, II

momentan zugeführte Leistung

$$p = ui + Fv \quad , \qquad i = \frac{dQ}{dt} \quad , \quad v = \frac{dx}{dt}$$

zugeführte Energie (Arbeit) während Zeitintervall dt:

$$p\,dt = u\,dQ + F\,dx \; .$$

Die Größen heißen:

x, Q	...	"Koordinaten"
v, i	...	"Geschwindigkeiten"
F, u	...	"Kräfte"

Die zugeführte Energie wird im System gespeichert oder in andere Energieformen umgewandelt.

Allgemein:

Koordinaten x_i, $i = 1, \ldots, r$ (Lagekoordinaten, Verschiebungen, Winkel, el. Ladungen)

Geschwindigkeiten $v_i = \dot{x}_i = dx_i/dt$ (Geschwindigkeiten, Winkelgeschwindigkeiten, el. Ströme)

Kräfte F_i (Kräfte, Drehmomente, el. Spannungen)

$$p = \sum_{i=1}^{r} F_i v_i \quad , \qquad pdt = \sum_{i=1}^{r} F_i dx_i$$ – Energie inkrement

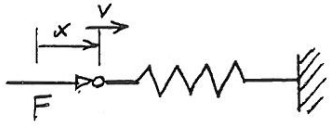
1.2. Energiespeicher (z.U.: dissipative Elemente)

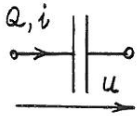
Wir unterscheiden: Speicher potentieller Energie
Speicher kinetischer Energie

1.2.1. Speicher potentieller Energie

elastische Strukturelemente (Federn, Drehfedern)
Ladungsspeicher (Kondensatoren)

Gegenüberstellung (keine Analogiebetrachtung, Schemata!):





beschreibende Gleichung	$F = F(x)$	$u = u(Q)$
(linear :	$F = kx$	$u = Q/C$)
aufgenommene Leistung	$p = Fv$	$p = ui$
inkrementelle Energiezuf.	$pdt = F(x)dx$	$pdt = u(Q)dQ$

potentielle Energie

$$W_p(x) = \int_0^x F(x')\,dx' \qquad 0 \le x \le x$$

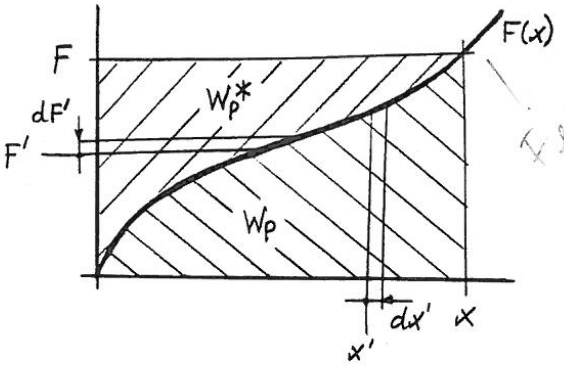
$$W_p(Q) = \int_0^Q u(Q')\,dQ' \qquad 0 \le Q \le Q$$

pot. Ergänzungsenergie

Def.!

$$W_p^*(F) = Fx - W_p = \int_0^F x(F')\,dF'$$

$$W_p^*(u) = uQ - W_p = \int_0^u Q(u')\,du'$$



Federkennlinie

linear!



Damit gilt

$$F(x) = \frac{dW_p(x)}{dx} \qquad u(Q) = \frac{dW_p(Q)}{dQ}$$

$$x(F) = \frac{dW_p^*(F)}{dF} \qquad Q(u) = \frac{dW_p^*(u)}{du}$$

linear:

$$W_p(x) = \int_0^x kx'\,dx' = \frac{1}{2}kx^2 \qquad W_p(Q) = \int_0^Q \frac{1}{C}Q'\,dQ' = \frac{Q^2}{2C}$$

$$W_p^*(F) = \int_0^F \frac{1}{k}F'\,dF' = \frac{F^2}{2k} \qquad W_p^*(u) = \int_0^u Cu'\,du' = \frac{1}{2}Cu^2$$

$\frac{1}{2}k \cdot ^2 \neq \frac{1}{2k} \cdot ^2$

$W_p^* \neq W_p$ als

Vektor (r-dim.)

$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_r)$

Allgemeine Form der beschreibenden Gleichung:

$$F_i = F_i(x_1, \ldots, x_r), \quad i = 1, \ldots, r, \qquad \underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x}) \qquad (\vec{F} = \vec{F}(\vec{x}))$$

$\vec{F} = (F_1, \ldots, F_r)$

Potentielle Energie:

r Komponenten

$$W_p(\underset{\sim}{x}) = \int_{\underset{\sim}{0}}^{\underset{\sim}{x}} \underset{\sim}{E}(\underset{\sim}{x}') \cdot d\underset{\sim}{x}'$$

inneres Produkt:

$$\left(\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{B} = \sum_{i=1}^{r} A_i B_i = A_1 B_1 + \ldots + A_r B_r\right)$$

$W_p(\underset{\sim}{x})$ sei eine Zustandsfunktion: Werte hängen nur von $\underset{\sim}{x}$ ab, nicht aber vom Weg zwischen $\underset{\sim}{0}$ und $\underset{\sim}{x}$. Notwendige und hinreichende Bedingung dafür:

$$\boxed{\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}}$$

$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}$ etc.

$\hat{=}$ Potentialfeld

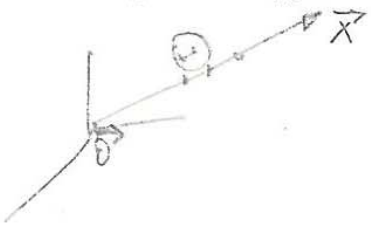
($\mathrm{Rot}\, F = 0 \Rightarrow$ Integ. bed.)

(Integrabilitätsbedingungen, Reziprozitätsbedingungen)

Berechnung von $W_p(\underset{\sim}{x})$ bei geg. Funktionen $\underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x})$:

Integration entlang eines beliebigen Weges zwischen $\underset{\sim}{0}$ und $\underset{\sim}{x}$,

z.B. entlang des Strahles $\underset{\sim}{x}' = \theta \underset{\sim}{x}$, $0 \le \theta \le 1$



$$W_p(\underset{\sim}{x}) = \int_{\underset{\sim}{0}}^{\underset{\sim}{x}} \underset{\sim}{F}(\theta\underset{\sim}{x}) \cdot d(\theta\underset{\sim}{x}) = \int_0^1 \underset{\sim}{F}(\theta\underset{\sim}{x}) \cdot \underset{\sim}{x}\, d\theta$$

Es gilt:

$$F_i = \frac{\partial W_p}{\partial x_i}$$

„Gradient"

Pfadintegral

Beweis:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int_0^1 \sum_{j=1}^{r} F_j(\theta x_1, \dots, \theta x_i, \dots, \theta x_r) x_j \, d\theta = \int_0^1 \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial F_j(\dots)}{\partial(\theta x_i)} \theta x_j \, d\theta + \int_0^1 F_i(\dots) d\theta$$

totale Diff.

$$= \int_0^1 \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial F_i(\dots)}{\partial(\theta x_j)} \theta x_j \, d\theta + \int_0^1 F_i(\dots) d\theta \quad , \quad \left[\frac{d}{d\theta} F_i(\theta x_1, \dots, \theta x_r) = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial F_i(\dots)}{\partial(\theta x_j)} x_j \right]$$

$$= \int_0^1 \theta \frac{dF_i}{d\theta} d\theta + \int_0^1 F_i \, d\theta = F_i \theta \Big|_0^1 - \int_0^1 F_i \, d\theta + \int_0^1 F_i \, d\theta = F_i \quad \blacksquare$$

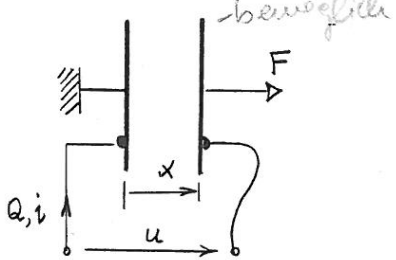
part. Integ.

Potentielle Ergänzungsenergie:

$$W_p^*(\underset{\sim}{F}) = \underset{\sim}{F} \cdot \underset{\sim}{x} - W_p \qquad \text{d. h.} \qquad W_p^*(F_1, \ldots, F_r) = \sum_{i=1}^{r} F_i x_i - W_p$$

$$dW_p^* = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial W_p^*}{\partial F_i} dF_i = \sum_{i=1}^{r} (F_i \cancel{dx_i} + x_i dF_i - \cancel{\frac{\partial W_p}{\partial x_i} dx_i}) \Rightarrow \boxed{x_i = \frac{\partial W_p^*}{\partial F_i}}$$

Beispiel: Elektrisch linearer Plattenkondensator



$u(Q,x) = \frac{Q}{C(x)}$ (ohne Streuung $C(x) = \frac{\varepsilon A}{x}$)

$x_1 = Q, \quad x_2 = x$

$F_1 = u, \quad F_2 = F = ?$

Reziprozitätsbedingung: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial Q}$; part. DGL.

$$u = \frac{\partial W_p}{\partial Q} = \frac{Q}{C(x)} \Rightarrow W_p(Q,x) = \frac{Q^2}{2C(x)} + \phi(x)$$

$$F = \frac{\partial W_p}{\partial x} = \frac{1}{2}Q^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{C(x)}\right) + \frac{d\phi(x)}{dx}$$

$\phi(x)$ aus gegebenem $F(Q,x)$, z.B. $F(0,x) \equiv 0 \Rightarrow$

$\phi(x)$ = konst. = 0 . Dann ist

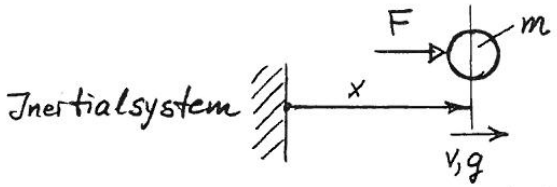
$$W_p(Q,x) = \frac{Q^2}{2C(x)}, \quad u = \frac{\partial W_p}{\partial Q} = \frac{Q}{C(x)}, \quad F = \frac{Q^2}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{C(x)}\right)$$

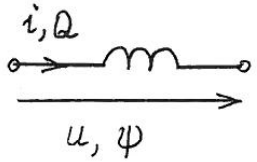
(ohne Streuung: $F = \frac{Q^2}{2\varepsilon A}$)

1.2.2. Speicher kinetischer Energie

Massen, Schwungmassen, magn. Flußspeicher (Spulen)

Gegenüberstellung (Schemata !)





Impuls	$g = g(v) = mv$, $D = I\omega$	$\psi = \psi(i)$ (lin: $\psi = Li$)
	$[v = v(g)]$	$[i = i(\psi)]$
dynamische Gleichung	$F = \frac{dg}{dt} \equiv \dot{g}$,	$u = \frac{d\psi}{dt} \equiv \dot{\psi}$
aufgenommene Leistung	$p = vF = v\dot{g}$,	$p = iu = i\dot{\psi}$
inkrementelle Energiezuf.	$pdt = v\,dg$	$pdt = i\,d\psi$

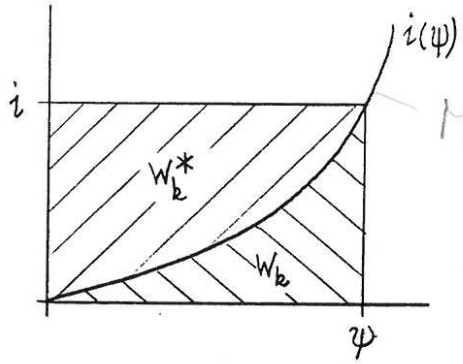
z.B.: Newton: $V = \frac{1}{2m}$ $W_k(g) = \int_0^g \frac{g'}{2m}\,dg' = \frac{g'^2}{2m}\Big|_0^g = \frac{mv^2}{2}$ ✓

kinetische Energie

$$W_k(g) = \int_0^g v(g')\,dg' \qquad W_k(\psi) = \int_0^\psi i(\psi')\,d\psi'$$

kinet. Ergänzungsenergie

$$W_k^*(v) = vg - W_k = \int_0^v g(v')\,dv' \qquad W_k^*(i) = i\psi - W_k = \int_0^i \psi(i')\,di'$$



Mag. Kurve

Damit gilt

(Wie Seite 3, weil gleiche Struktur)

$$v(g) = \frac{dW_k(g)}{dg} \qquad i(\psi) = \frac{dW_k(\psi)}{d\psi}$$

$$g(v) = \frac{dW_k^*(v)}{dv} \qquad \psi(i) = \frac{dW_k^*(i)}{di}$$

linear:

$$W_k(g) = \frac{g^2}{2m},\ \frac{D^2}{2I} \qquad W_k(\psi) = \frac{\psi^2}{2L}$$

$$W_k^*(v) = \frac{1}{2}mv^2,\ \frac{1}{2}I\omega^2 \qquad W_k^*(i) = \frac{1}{2}Li^2$$

Allgemeiner kinetischer Speicher:

Die gespeicherte kinetische Energie hängt auch von den Koordinaten ab,

$$W_k = W_k(q_1, \cdots, q_r\,;\, x_1, \cdots, x_r) \quad , \qquad W_k = W_k(\underset{\sim}{q}\,;\,\underset{\sim}{x}) \quad ,$$

den Koordinaten sind dann innere Kräfte $\underset{\sim}{F}^{(i)}$ zugeordnet.
Die dynamische Gleichung ist

$$\boxed{\underset{\sim}{F} = \dot{\underset{\sim}{q}} - \underset{\sim}{F}^{(i)}}$$

* äußere + innere Kräfte auf einen Körper erzeugen dessen Impulsänderung!

Daraus folgt für die zugeführte Leistung

$$p = \underset{\sim}{F}\cdot\underset{\sim}{v} = (\dot{\underset{\sim}{q}} - \underset{\sim}{F}^{(i)})\cdot\underset{\sim}{v}$$

und für die inkrementelle Energiezufuhr

$$p\,dt = (\underset{\sim}{v}\cdot d\underset{\sim}{q}/dt - \underset{\sim}{F}^{(i)}\cdot d\underset{\sim}{x}/dt)\,dt = \underset{\sim}{v}\cdot d\underset{\sim}{q} - \underset{\sim}{F}^{(i)}\cdot d\underset{\sim}{x} \quad .$$

Sie bedingt eine Erhöhung der gespeicherten Energie

$$pdt = dW_k = \sum_i \frac{\partial W_k}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial W_k}{\partial x_i} dx_i$$

wie W_k auch von $\vec{x}$ abhängt

Koeffizientenvergleich $\Rightarrow$

$$v_i = \frac{\partial W_k}{\partial q_i} \qquad F_i^{(i)} = -\frac{\partial W_k}{\partial x_i}$$

Die kinetische Ergänzungsenergie ist durch

$$W_k^*(\underset{\sim}{v}; x) = \underset{\sim}{q} \cdot \underset{\sim}{v} - W_k$$

definiert. Damit gilt

$$dW_k^* = \sum_i \left(q_i dv_i + v_i dq_i - \frac{\partial W_k}{\partial q_i} dq_i - \frac{\partial W_k}{\partial x_i} dx_i \right) = \sum_i \left(\frac{\partial W_k^*}{\partial v_i} dv_i + \frac{\partial W_k^*}{\partial x_i} dx_i \right)$$

also

$$q_i = \frac{\partial W_k^*}{\partial v_i} \qquad F_i^{(i)} = -\frac{\partial W_k}{\partial x_i} = \frac{\partial W_k^*}{\partial x_i}$$

Für die Berechnung von W_k^* müssen die Funktionen

$$\underset{\sim}{g} = \underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{v}; \underset{\sim}{x}) \quad , \quad \underset{\sim}{F}^{(i)} = \underset{\sim}{F}^{(i)}(\underset{\sim}{v}; \underset{\sim}{x})$$

gegeben sein und die Reziprozitätsbedingungen

$$\boxed{\frac{\partial g_i}{\partial v_j} = \frac{\partial g_j}{\partial v_i} \quad , \quad \frac{\partial F_i^{(i)}}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j^{(i)}}{\partial x_i} \quad , \quad \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j^{(i)}}{\partial v_i}}$$

erfüllen. Man findet W_k^* durch Integration von

$$dW_k^* = \underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{v}; \underset{\sim}{x}) \cdot d\underset{\sim}{v} + \underset{\sim}{F}^{(i)}(\underset{\sim}{v}; \underset{\sim}{x}) \cdot d\underset{\sim}{x}$$

im Raum der $\underset{\sim}{v}, \underset{\sim}{x}$ vom Ursprung aus entlang irgendeines Weges,*)
z.B. zuerst $\underset{\sim}{v}' = 0$, $\underset{\sim}{x}' = \theta \underset{\sim}{x}$ und dann $\underset{\sim}{v}' = \theta \underset{\sim}{v}$, $\underset{\sim}{x}' = \underset{\sim}{x}$:

$$W_k^*(\underset{\sim}{v}; \underset{\sim}{x}) = \int_0^1 \underset{\sim}{F}^{(i)}(\underset{\sim}{0}; \theta \underset{\sim}{x}) \cdot \underset{\sim}{x} \, d\theta + \int_0^1 \underset{\sim}{g}(\theta \underset{\sim}{v}; \underset{\sim}{x}) \cdot \underset{\sim}{v} \, d\theta$$

Der erste Term hängt nur von $\underset{\sim}{x}$, nicht von $\underset{\sim}{v}$ ab:

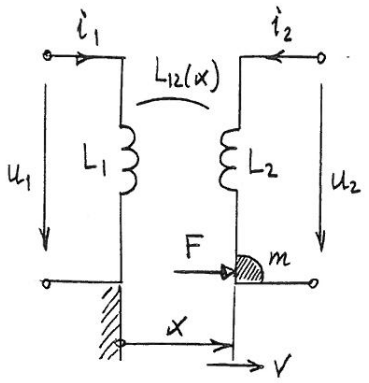
*) wegunabhängig!

$$W_k^*(\underset{\sim}{v};\underset{\sim}{x}) = W_{k0}^*(\underset{\sim}{x}) + \int_0^1 \underset{\sim}{g}(\theta\underset{\sim}{v};\underset{\sim}{x})\cdot\underset{\sim}{v}\,d\theta$$

Der Anteil $W_{k0}^*(\underset{\sim}{x})$ spielt eine Rolle, wenn das System Dauermagnete enthält. Für $W_k^*(\underset{\sim}{0};\underset{\sim}{x}) \equiv 0$ berechnet sich W_k^* allein aus den Funktionen $\underset{\sim}{g}(\underset{\sim}{v};\underset{\sim}{x})$.

Beispiel: Gekoppelte, elektrisch lineare Spulen.
Eine Spule verschiebbar, Masse m

Schema:



$$\left.\begin{aligned}\psi_1 &= L_1 i_1 + L_{12}(x) i_2\\ \psi_2 &= L_{12}(x) i_1 + L_2 i_2\\ g &= m v\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}x_1 = Q_1\,,\quad x_2 = Q_2\,,\quad x_3 = x\\ v_1 = i_1\,,\quad v_2 = i_2\,,\quad v_3 = v\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}F_1 = u_1\,,\quad F_2 = u_2\,,\quad F_3 = F\\ g_1 = \psi_1\,,\quad g_2 = \psi_2\,,\quad g_3 = g\end{aligned}\right\}$$

$$W_k^* = \int_0^1 \left[\left(L_1 \theta i_1 + L_{12}(x)\,\theta i_2 \right) i_1 + \left(L_{12}(x)\,\theta i_1 + L_2 \theta i_2 \right) i_2 + (m\theta v)\, v \right] d\theta$$

$$= \tfrac{1}{2} L_1 i_1^2 + \tfrac{1}{2} L_2 i_2^2 + L_{12}(x)\, i_1 i_2 + \tfrac{1}{2} m v^2 ,$$

dynamische Gleichungen: $\underset{\sim}{F} = \dot{\underset{\sim}{g}} - \underset{\sim}{F}^{(i)}$ mit $g_i = \frac{\partial W_k^*}{\partial v_i}$, $F_i^{(i)} = \frac{\partial W_k^*}{\partial x_i}$;

$$\underline{u_1 = \dot{\psi}_1 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W_k^*}{\partial i_1}\right) = L_1 \frac{di_1}{dt} + L_{12}(x) \frac{di_2}{dt} + L'_{12}(x)\, i_2 \frac{dx}{dt}} \quad , \quad L'_{12}(x) = d L_{12}(x)/dx ,$$

$$\underline{u_2 = \dot{\psi}_2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W_k^*}{\partial i_2}\right) = L_2 \frac{di_2}{dt} + L_{12}(x) \frac{di_1}{dt} + L'_{12}(x)\, i_1 \frac{dx}{dt}} ,$$

$$(F_3 =) \quad \underline{F = \dot{g}_3 - F_3^{(i)} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W_k^*}{\partial v}\right) - \frac{\partial W_k^*}{\partial x} = m\dot{v} - L'_{12}(x)\, i_1 i_2} .$$



$F \sim i_1 i_2$

$\Rightarrow i_1 \Rightarrow \overrightarrow{\leftarrow} F$

$\Rightarrow L'_{12} < 0$:

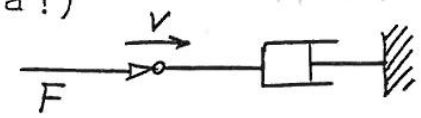
$-L'_{12} > 0$:

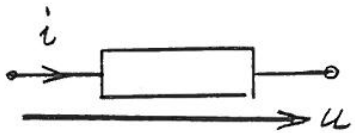
Anziehung

1.3. Dissipative Elemente

mechanische Reibungs- und Dämpfungsglieder,
elektrische Widerstände, div. Halbleiterbauelemente

Gegenüberstellung (Schemata!)





beschreibende Gleichung

$F = F(v)$

$u = u(i)$

aufgenommene Leistung	$p = F(v)\,v$	$p = u(i)\,i$
inkrement. Energiezuf.	$p\,dt = F(v)\,dx$	$p\,dt = u(i)\,dQ$

Allgemeine Form:

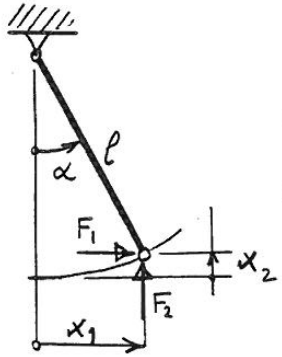
$$F_i = F_i(v_1, \ldots, v_r;\ x_1, \ldots, x_r), \qquad \underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{v};\ \underset{\sim}{x})$$

$$p\,dt = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{v};\ \underset{\sim}{x}) \cdot d\underset{\sim}{x} = \sum_{i=1}^{r} F_i\,dx_i$$

Beschreibung für Inkrementen möglich (Differentialform) – hier nicht nötig

1.4. Verallgemeinerte Koordinaten

Wir betrachten ein elektromechanisches System, bestehend aus potentiellen Speichern, kinetischen Speichern und dissipativen Elementen. Durch Zusammenschalten der Systemteile sind die Koordinaten x_i i.a. nicht mehr voneinander unabhängig. Es gibt "kinematische Verträglichkeitsbedingungen", z.B.

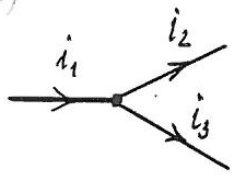


$$x_1 = l \sin\alpha$$
$$x_2 = l(1-\cos\alpha)$$

$x_1 = x_1(x_2)$

1. Freiheitsgrad (z.B.: α)

geometrische Bedingungen



$$i_1 = i_2 + i_3$$
$$Q_1 = Q_2 + Q_3$$

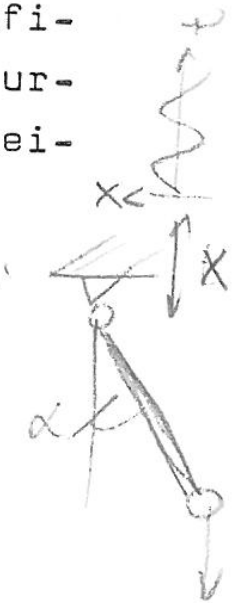
Knotengleichungen

Die x_i, $i=1,\dots,r$ werden durch einen Satz voneinander unabhängiger verallgemeinerter Koordinaten $q_i(t)$, $i=1,\dots,n$ (geometrische Lagekoordinaten und Ladungskoordinaten) ersetzt. Sie legen die Konfiguration des Systems und die Ladungen Q_i eindeutig fest. Die ursprünglichen Koordinaten lassen sich dann durch die verallgemeinerten ausdrücken:

$r \geq n$!

$$x_i = x_i(q_1, \dots, q_n, t) \quad , \quad i=1,\dots,r \quad , \qquad \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{x}(\underset{\sim}{q}, t) \quad ,$$

z.B.



$q_1 = \alpha$: $x_1 = l \sin q_1$ $\qquad$ $Q_1 = q_1$, $Q_2 = q_2$,

$x_2 = l(1-\cos q_1)$ $\qquad$ $Q_3 = q_1 - q_2$

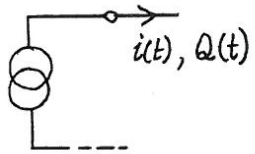
Ihre Zeitableitungen $\dot{q}_i(t) = dq_i(t)/dt$ heißen verallgemeinerte Geschwindigkeiten.

1.5. Virtuelle Verschiebungen

Wir denken uns den Zustand eines Systems zu einem beliebigen Zeitpunkt festgehalten (Momentaufnahme) und von diesem Zustand aus (kleine) Verschiebungen δx_i der Lage- und Ladungskoordinaten durchgeführt. Die δx_i sind virtuelle Verschiebungen (Variationen) bei festgehaltener Zeit. Sie sind i.a. nicht unabhängig voneinander, müssen aber "kinematisch zulässig" sein (geometr. Bedingungen und Knotengleichungen erfüllt). Ist die Bewegung eines Punktes oder der el. Strom in einem Zweig als Zeitfunktion vorgeschrieben, so sind die zugehörigen virtuellen Verschiebungen gleich Null (Variationen für t = konst.!)



Wegerregung,
$x(t)$ vorgeschrieben, $\delta x = 0$



Stromquelle,
$i(t)$ vorgeschrieben, $\delta Q = 0$

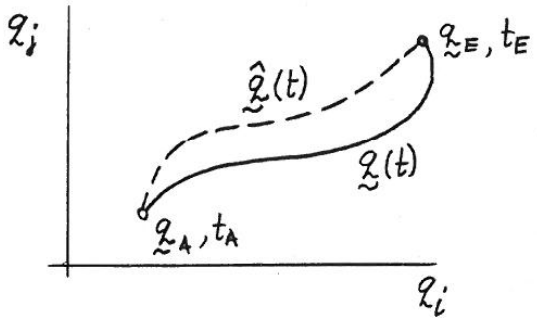
Virtuelle Verschiebungen dienen zum Vergleich benachbarter Zustände des Systems.

1.6. Lagrange-Gleichungen

Gleichgewichtslagen eines (verlustfreien) mechanischen Systems sind bekanntlich durch Extremwerte der potentiellen Energie gekennzeichnet: Verglichen mit benachbarten Lagen nimmt die potentielle Energie in der stabilen Gleichgewichtslage ein Minimum an. Kann man auch die Bewegung eines Systems zwischen einem Anfangs- und einem Endzustand durch eine Größe (ähnlich der pot.Energie) derart charakterisieren, daß diese Größe für die tatsächlich ausgeführte Bewegung im Vergleich mit anderen, kinematisch ebenfalls zulässigen Bewegungen einen ausgezeichneten Wert (Max. od. Min.) annimmt?

Wir untersuchen zuerst sog. konservative Systeme: keine Energiedissipation, keine Energiezufuhr, es wird lediglich Energie zwischen den Speichern ausgetauscht. Für derartige Systeme gibt es tatsächlich eine Größe mit obiger Eigenschaft. Sie heißt Wirkung und ist das Zeitintegral der Lagrange-Funktion, der Differenz von kinetischer Ergänzungsenergie und potentieller Energie aller Speicher des Systems.

Die momentane "Lage" (geom. Konfiguration und Ladungen) sei durch n verallgemeinerte Koordinaten q_i festgelegt. Die q_i sind unabhängig voneinander (geom. Bedingungen und Knotengleichungen bereits berücksichtigt). Wir betrachten nun die tatsächliche Bewegung des Systems, dargestellt durch eine Kurve $\underset{\sim}{q}(t)$ zwischen den Punkten $\underset{\sim}{q}_A = \underset{\sim}{q}(t_A)$ und $\underset{\sim}{q}_E = \underset{\sim}{q}(t_E)$ im Raum der verallgemeinerten Koordinaten. Zugehörige Wirkung:



$$S = \int_{t_A}^{t_E} L(\underset{\sim}{q}(t), \dot{\underset{\sim}{q}}(t), t)\, dt$$

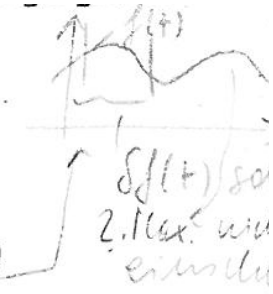
$$L(\underset{\sim}{q}, \dot{\underset{\sim}{q}}, t) = W_k^*(\underset{\sim}{q}, \dot{\underset{\sim}{q}}, t) - W_p(\underset{\sim}{q}, t)$$

Im Vergleich mit anderen, kinematisch ebenfalls zulässigen Bewegungen zwischen den Lagen $\underset{\sim}{q}_A$ und $\underset{\sim}{q}_E$ soll die Wirkung S für die tatsächlich ausgeführte Bewegung einen Extremwert annehmen. Bei bekannter Funktion $L(\cdot, \cdot, t)$ lassen sich aus dieser Forderung Bedingungen für die Funktionen $q_i(t)$ ableiten, die den "Bewegungsgleichungen"des Systems entsprechen.

Vergleichsbewegungen:

$$\hat{\underset{\sim}{q}}(t) = \underset{\sim}{q}(t) + \varepsilon\, \delta\underset{\sim}{q}(t) \quad \text{mit} \quad \delta\underset{\sim}{q}(t_A) = \delta\dot{\underset{\sim}{q}}(t_E) = 0$$

(KEINE Differentiale, die kleiner endlich groß)



$\delta q_i(t)$ sind sonst beliebige Funktionen (hinreichend glatt), ε ist ein Auswahlparameter. Einsetzen von $\hat{\underset{\sim}{q}}(t)$ und $\dot{\hat{\underset{\sim}{q}}}(t)$ anstelle von $\underset{\sim}{q}(t)$, $\dot{\underset{\sim}{q}}(t)$ in $L(\cdot,\cdot,t)$ liefert $S=S(\varepsilon)$. Die "Extremalenbedingung" lautet

$$\boxed{\delta S = \left.\frac{dS(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \stackrel{!}{=} 0}$$

Auswertung:

$$S(\varepsilon) = \int_{t_A}^{t_E} L(\underset{\sim}{q}(t) + \varepsilon \delta \underset{\sim}{q}(t), \dot{\underset{\sim}{q}}(t) + \varepsilon (\delta \underset{\sim}{q}(t))^{\cdot}, t)\, dt,$$

$$\delta S = \int_{t_A}^{t_E} \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (\delta q_i)^{\cdot} \right] dt \stackrel{!}{=} 0 ;$$

partielle Integration:

$$\int_{t_A}^{t_E} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (\delta q_i)^{\cdot}\, dt = \int_{t_A}^{t_E} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i \right] dt$$

$$= \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big]_{t_A}^{t_E}}_{0} - \int_{t_A}^{t_E} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i\, dt ,$$

$\delta q_i = 0$ bei t_A, t_E

$$\delta S = \int_{t_A}^{t_E} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \right] \delta q_i \, dt \stackrel{!}{=} 0 .$$

der Variationsrechnung.
(FUNDAMENTAL-LEMMA)

$\delta q_i(t)$ bis auf Randpunkte beliebig wählbar $\Longrightarrow$ jeder der n Ausdrücke in eckigen Klammern muß verschwinden. (Nehmen Sie alle $\delta q_i \equiv 0$ bis auf δq_1 : $\delta S = \int_{t_A}^{t_E} [\ ]\, \delta q_1 \, dt = 0 \Longrightarrow [\ ] = 0$, da sonst $\delta q_1(t)$ so gewählt werden könnte, daß der Integrand stets positiv ist. Nun mit $\delta q_2(t) \neq 0$ usw.)

Euler-Gleichungen des Variationsproblems

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 , \quad i = 1, \ldots, n}$$

Ausführlicher:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial W_k^*}{\partial q_i} + \frac{\partial W_p}{\partial q_i} = 0 , \quad i = 1, \ldots, n$$

Dies sind n Gleichungen für die n Funktionen $q_i(t)$. Spezialfall: Gleichgewichtsbedingungen $\partial W_p / \partial q_i = 0$.

Erweiterung auf nichtkonservative Systeme:

Jede der Gleichungen wird mit der zugehörigen Variation δq_i multipliziert und anschließend über i summiert,

$$\sum_i \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial W_k^*}{\partial q_i}\right]\delta q_i = \sum_i \left(-\frac{\partial W_p}{\partial q_i}\delta q_i\right).$$ gemäß der EULER-gl.

$\sum_i F_i dx_i = \sum_i (\partial W_p/\partial x_i) dx_i$ ist die inkrementelle Energiezufuhr der potentiellen Speicher, $-\sum_i (\partial W_p/\partial x_i) dx_i$ wird den kinetischen aus den potentiellen zugeführt. $d \to \delta$

$$-\delta W_p = -\sum_{i=1}^{r} \frac{\partial W_p}{\partial x_i}\delta x_i = \sum_{i=1}^{n} -\frac{\partial W_p}{\partial q_i}\delta q_i$$ $\delta q_i \to dq_i$ {δq_i nicht mehr veränderlich!}

bedeutet also die inkrementelle Energieabgabe an das System der kinetischen Speicher bei infinitesimaler Variation*) der verallgemeinerten Koordinaten. Damit ist die Verallgemeinerung auf nichtkonservative Systeme naheliegend: Ob der Energieaustausch der kinetischen Speicher mit den potentiellen Speichern oder mit äußeren Quellen und dissipativen Elementen erfolgt, ist gleichgültig. Bedeuten

δA ... dem System zugeführte Arbeit
δV ... Verlust in den dissipat. Elementen

} bei infinitesimalen Variationen δq_i

*) denn $\sum F_i \delta x_i$ ist nur differentiell Arbeit, global müßte integriert werden ($\int F \cdot ds = A$)

so ist

$$\sum_i \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial W_k^*}{\partial q_i} \right] \delta q_i + \delta W_p + \delta V = \delta A$$

In den ursprünglichen Koordinaten sind die Inkremente

$p\,dt = \sum_i F_i\, dx_i$ äußere Zufuhr, dA

$p\,dt = \sum_i F_i^d\, dx_i$ für dissipative Elemente. dV

Beziehungen zu den verallgemeinerten Koordinaten:

$$x_i = x_i(q_1, \dots, q_n; t), \quad dx_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} dt;$$

für infinitesimale Variationen bei festgehaltener Zeit: $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$

$$\delta x_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

wegen $dx_i \to \delta x_i$

Damit

Doppelsumme Einfachsumme

$$\delta A = \sum_i F_i \delta x_i = \sum_{i,j} F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^{n} f_j \delta q_j$$

$$\delta V = \sum_i F_i^d \delta x_i = \sum_{i,j} F_i^d \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^{n} f_j^d \delta q_j$$

f_i und f_i^d sind die verallgemeinerten äußeren bzw. dissipativen Kräfte zur verallgemeinerten Koordinate q_i. Man gewinnt sie am besten direkt durch Anschreiben von δA und δV in verallgemeinerten Koordinaten.

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial W_k^*}{\partial q_i} + \frac{\partial W_p}{\partial q_i} + f_i^d - f_i \right] \delta q_i = 0$$

Auch die infinitesimalen Variationen werden als unabhängig voneinander vorausgesetzt ("holonome Systeme") $\Rightarrow$ die Lagrange-Gleichungen

(nichtholonom: hier nicht: weniger Freiheits-grade im Kleinen (ideal) als im Großen: z.B.: scharfe Kante auf Ebene → PARKETT)

verall. äußere Kräfte

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial W_k^*}{\partial q_i} + \frac{\partial W_p}{\partial q_i} + f_i^d = f_i \;,\quad i = 1, \ldots, n}$$

pot. Energie-Kräfte

verall. diss Kräfte

Vorgehensweise:

a) Feststellen der Anzahl n der Freiheitsgrade und Wahl der verallgemeinerten Koordinaten q_i, $i = 1, \ldots, n$.

Vorgehensweise:

a) Feststellen der Anzahl n der Freiheitsgrade und Wahl der verallgemeinerten Koordinaten q_i, $i = 1, \ldots, n$.

Verallgemeinerte Koordinaten sind unabhängige Verschiebungen, Winkel, Ladungskoordinaten. Eingeprägte Verschiebungen und Ladungen (Wegerregung, Stromquellen), deren Zeitverlauf vorgeschrieben ist, sind keine unab. verallg. Koordinaten. Geometrische Bedingungen und Knotengleichungen müssen erfüllt sein.

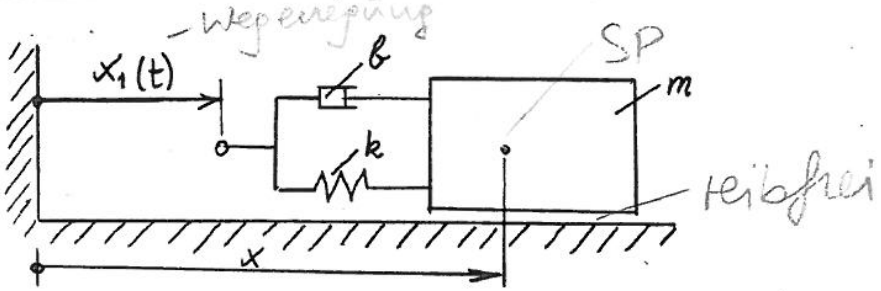
b) Anschreiben der kinetischen Ergänzungsenergie als Funktion der verallg. Geschwindigkeiten $\dot{q}_i$ und Koordinaten q_i und der potentiellen Energie als Funktion der verallg. Koordinaten q_i.

c) Bestimmen der verallg. dissipativen Kräfte f_i^d und der äußeren Kräfte f_i als Koeffizienten der Variationen δq_i in den Ausdrücken δV bzw. δA.

d) Einsetzen in die Lagrange-Gleichungen und Ausführen der Differentiationen liefert einen Satz von n unabhängigen Gleichungen.

1.7. Mechanische und elektrische Beispiele

1) Wegerregte Bewegung mit linearer Dämpfung



$x_1(t)$ vorgeschrieben

Dämpfer u. Feder linear

a) $n = 1$: x (t = const. $\Rightarrow x_1$ = const.)

b) $W_k^* = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$, $W_p = \frac{1}{2} k (x - x_1 - l_0)^2$ (Feder entspannt für $x - x_1 = l_0$)

c) $\delta V = b(\dot{x} - \dot{x}_1)\delta(x - x_1)$, $\delta A = 0$: $f^d = b(\dot{x} - \dot{x}_1)$, $f = 0$

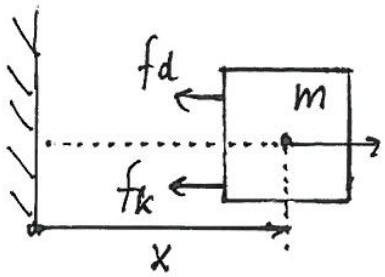
d) $\frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$, $\frac{\partial W_k^*}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial W_p}{\partial x} = k(x - x_1 - l_0)$

nach Schwinger

$$m\ddot{x} + k(x - x_1 - l_0) + b(\dot{x} - \dot{x}_1) = 0, \qquad \underline{m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = k(x_1 + l_0) + b\dot{x}_1}$$

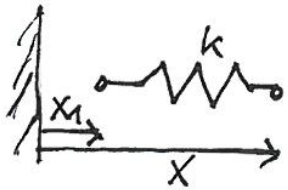
Alternative Betrachtung mit dem Schwerpunktsatz:

$$m\ddot{x} = f - f_d - f_k = -f_d - f_k$$

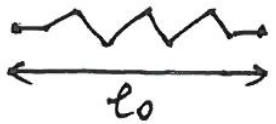


Äußere Kraft: $f = 0$

Feder:



$$f_k = (x - x_1 - l_0) \cdot k$$

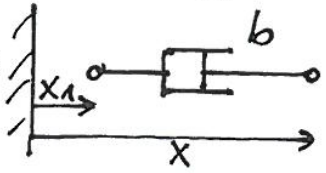


$$f_k = 0$$

$$m\ddot{x} = -b \cdot (\dot{x} - \dot{x}_1) - (x - x_1 - l_0) \cdot k$$

$$m \cdot \ddot{x} + b \cdot \dot{x} + k \cdot x = k \cdot (x_1(t) + l_0) + b \cdot \dot{x}_1(t)$$

Dämpfer:

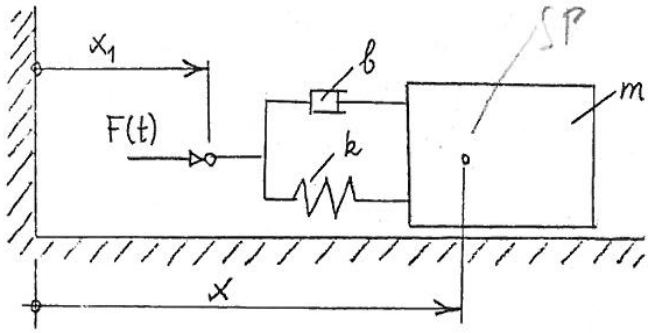


$$f_d = b \cdot v = b \cdot (\dot{x} - \dot{x}_1)$$

Beispiel: $x_1(t) = \hat{x}_1 \cdot \sin \omega t, \quad l_0 = 2 \cdot \hat{x}_1$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

2) Krafterregte Bewegung mit linearer Dämpfung



F(t) vorgeschrieben

$t = \text{const}: F = \text{const}: x_1, x$ können sich ändern

a) $n = 2 : x_1 = x$ → 2 Lagrange Gleichungen!

b) $W_k^* = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$, $W_p = \frac{1}{2} k (x - x_1 - l_0)^2$,

c) $\delta V = b(\dot{x} - \dot{x}_1)\delta(x - x_1)$, $\delta A = F \delta x_1 : f^d = -f_1^d = b(\dot{x} - \dot{x}_1)$, $f = 0$, $f_1 = F$,

d) $\frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{x}_1} = 0$, $\frac{\partial W_k^*}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial W_p}{\partial x_1} = -k(x - x_1 - l_0)$:

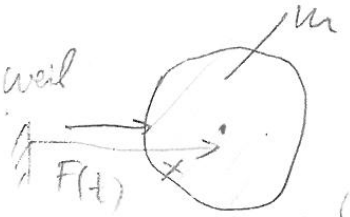
$$-k(x - x_1 - l_0) - b(\dot{x} - \dot{x}_1) = F(t)$$

$\frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$, $\frac{\partial W_k^*}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial W_p}{\partial x} = k(x - x_1 - l_0)$:

$$m\ddot{x} + k(x - x_1 - l_0) + b(\dot{x} - \dot{x}_1) = 0$$

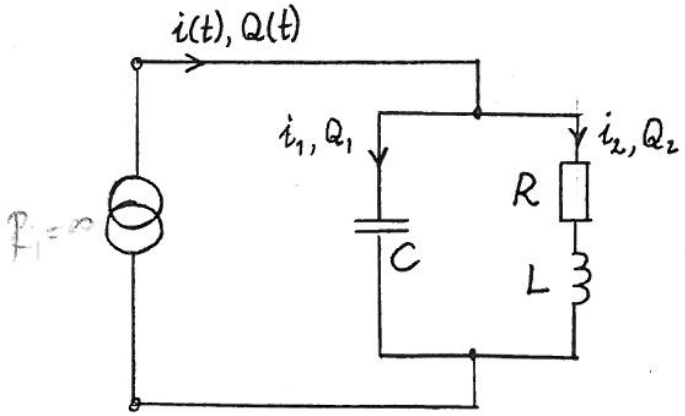
$(m\ddot{x} = F(t))$ → klar, weil

Relativbewegung $x - x_1$! Sehr wohl was anderes



$m\ddot{x} = F(t)$

3) Lineares Netzwerk, stromgespeist



$i(t)$ d.h. $Q(t)$ vorgeschrieben

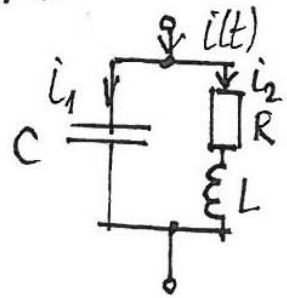
$n=1$: Q_2 $\quad (Q_1 = Q - Q_2)$ — Kräftegl.

$$W_k^* = \frac{1}{2} L i_2^2 \,, \quad W_p = \frac{1}{2C}(Q-Q_2)^2 \,, \quad \delta V = R i_2 \delta Q_2 \,, \quad \delta A = 0 \,, \quad \text{mit } \delta = 0$$

$$\frac{\partial W_k^*}{\partial i_2} = L i_2 \,, \quad \frac{\partial W_k^*}{\partial Q_2} = 0 \,, \quad \frac{\partial W_p}{\partial Q_2} = -\frac{1}{C}(Q-Q_2) \,, \quad f_2^d = R i_2 \,, \quad f_2 = 0 \,:$$

$$L\frac{di_2}{dt} - \frac{1}{C}(Q-Q_2) + R i_2 = 0 \,, \qquad \underline{L\frac{d^2 i_2}{dt^2} + R\frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C} i_2 = \frac{1}{C} i(t)} \,; \text{ elektr. Schwingkreis}$$

Alternative Betrachtung mit Maschengleichung:

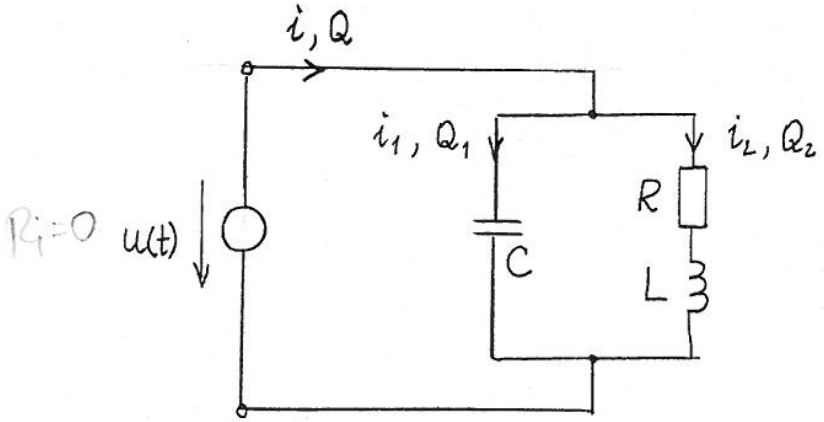


$$u_C(t) = u_{LR}(t) \quad \begin{cases} u_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i_1 \cdot dt \\ i_1 = i - i_2 \end{cases} \qquad u_{LR}(t) = R \cdot i_2 + L \cdot \frac{di_2}{dt}$$

$$\frac{1}{C}\int_0^t i \cdot dt = \frac{1}{C}\int_0^t i_2\, dt + R \cdot i_2 + L \cdot \frac{di_2}{dt}$$

$$L \cdot \ddot{i}_2 + R \cdot \dot{i}_2 + \frac{1}{C} \cdot i_2 = \frac{1}{C} \cdot i(t)$$

4) Lineares Netzwerk, spannungsgespeist



u(t) vorgeschrieben

$n=2$: Q_1, Q_2 $\quad (Q = Q_1 + Q_2)$

$$W_k^* = \frac{1}{2} L i_2^2 , \quad W_p = \frac{Q_1^2}{2C} , \quad \delta V = R i_2 \delta Q_2 , \quad \delta A = u \delta Q = u \delta Q_1 + u \delta Q_2 ,$$

$$\frac{\partial W_k^*}{\partial i_1} = 0, \ \frac{\partial W_k^*}{\partial Q_1} = 0, \ \frac{\partial W_p}{\partial Q_1} = \frac{Q_1}{C}, \ f_1^d = 0, \ f_1 = u : \quad \underline{Q_1/C = u(t)}$$

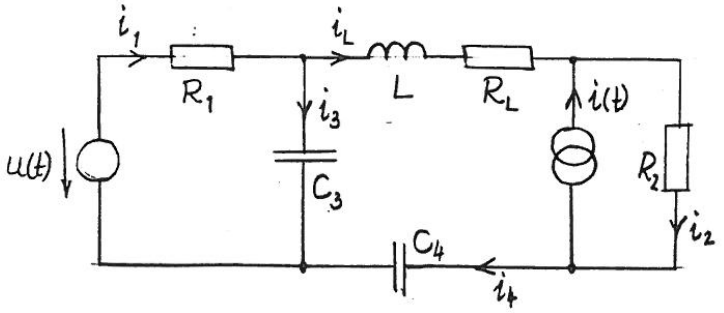
$$\frac{\partial W_k^*}{\partial i_2} = L i_2 , \ \frac{\partial W_k^*}{\partial Q_2} = 0, \ \frac{\partial W_p}{\partial Q_2} = 0, \ f_2^d = R i_2 , \ f_2 = u : \quad \underline{L \frac{di_2}{dt} + R i_2 = u(t)}$$

$$L \frac{di_2}{dt} + R i_2 = \frac{Q_1}{C}$$

6 Zweige → 6 FG ? →
→ 4 Knoten → 3 i unabh KGL →
→ 3 FG ? I(t) vorg. → 2 FG !

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

5) Lineares Netzwerk



vorgeschrieben: $u(t)$, $i(t)$

4 Knoten, 3 unabh. Knotengl.

$$\left.\begin{aligned} i_1 &= i_3 + i_L \;,\quad i_2 = i_L + i \\ i_4 &= i_2 - i \end{aligned}\right\}$$

$n = 2$: Q_1, Q_2 (z.B.!) – aber immer nur 2!

$(Q_L = Q_2 - Q = Q_4 \;,\; Q_3 = Q_1 - Q_2 + Q)$

$$W_k^* = \tfrac{1}{2} L i_L^2 = \tfrac{1}{2} L (i_2 - i)^2, \quad W_p = \tfrac{1}{2}\left(\frac{Q_3^2}{C_3} + \frac{Q_4^2}{C_4}\right) = \frac{1}{2C_3}(Q_1 - Q_2 + Q)^2 + \frac{1}{2C_4}(Q_2 - Q)^2,$$

$$\delta V = R_1 i_1 \delta Q_1 + R_2 i_2 \delta Q_2 + R_L (i_2 - i)\delta Q_2 \;,\quad \delta A = u \delta Q_1 \;,\quad \delta Q_L = \delta(Q_2 - Q) = \delta Q_2$$

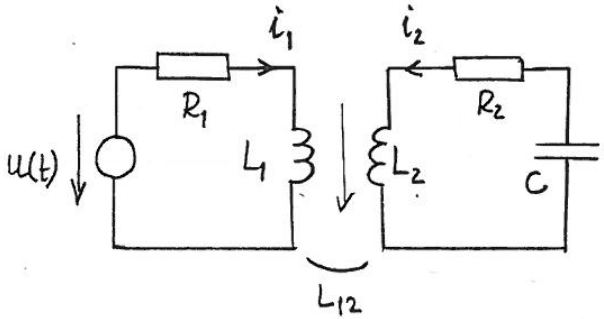
$$\frac{\partial W_k^*}{\partial i_1} = 0,\ \frac{\partial W_k^*}{\partial Q_1} = 0,\ \frac{\partial W_p}{\partial Q_1} = \frac{1}{C_3}(Q_1 - Q_2 + Q),\ f_1^d = R_1 i_1,\ f_1 = u\ ;$$

$$\frac{\partial W_k^*}{\partial i_2} = L(i_2 - i),\ \frac{\partial W_k^*}{\partial Q_2} = 0,\ \frac{\partial W_p}{\partial Q_2} = -\frac{1}{C_3}(Q_1 - Q_2 + Q) + \frac{1}{C_4}(Q_2 - Q),\ f_2^d = R_2 i_2 + R_L(i_2 - i),\ f_2 = 0\ ;$$

$$\underline{\frac{1}{C_3}(Q_1 - Q_2 + Q) + R_1 i_1 = u} \;,\quad \underline{L\frac{d}{dt}(i_2 - i) - \frac{1}{C_3}(Q_1 - Q_2 + Q) + \frac{1}{C_4}(Q_2 - Q) + R_2 i_2 + R_L(i_2 - i) = 0}\ .$$

sämtliche andere Ströme über obige Knotengleichungen

6) Kreise mit induktiver Kopplung



$u(t)$ vorgeschrieben

$n=2: \; Q_1, Q_2$

$$W_k^* = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + L_{12} i_1 i_2 \;, \quad W_p = \frac{Q_2^2}{2C} \;, \quad \delta V = R_1 i_1 \delta Q_1 + R_2 i_2 \delta Q_2 \;, \quad \delta A = u \delta Q_1 \;,$$

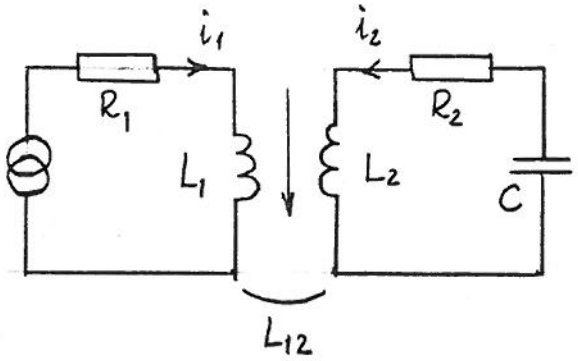
$$\frac{\partial W_k^*}{\partial i_1} = L_1 i_1 + L_{12} i_2 \;, \quad f_1^d = R_1 i_1 \;, \quad f_1 = u \;,$$

$$\frac{\partial W_k^*}{\partial i_2} = L_2 i_2 + L_{12} i_1 \;, \quad \frac{\partial W_p}{\partial Q_2} = \frac{Q_2}{C} \;, \quad f_2^d = R_2 i_2 \;,$$

die Fu 0 sich ergebenden Werte nicht mehr anschreiben

$$\underline{L_1 \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt} + R_1 i_1 = u} \;, \quad \underline{L_2 \frac{di_2}{dt} + L_{12} \frac{di_1}{dt} + \frac{Q_2}{C} + R_2 i_2 = 0}$$

7) Gekoppelte Kreise mit Stromquelle



$i_1(t)$ vorgeschrieben

$n = 1$: Q_2

$n = 0$

$$W_b^* = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + L_{12} i_1 i_2 \,, \quad W_p = \frac{Q_2^2}{2C} \,, \quad \delta V = R_2 i_2 \delta Q_2 \,, \quad \delta A = 0$$

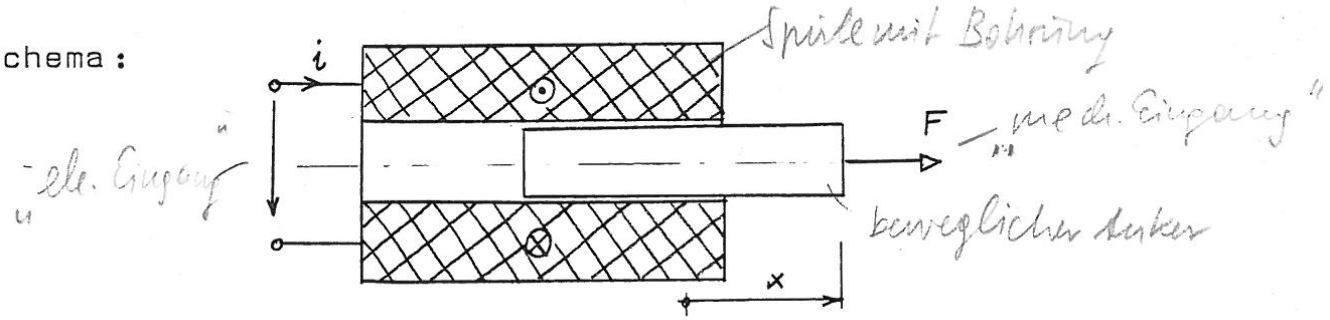
$$\frac{\partial W_b^*}{\partial i_2} = L_2 i_2 + L_{12} i_1 \,, \quad \frac{\partial W_p}{\partial Q_2} = \frac{Q_2}{C} \,, \quad f_2^d = R_2 i_2 \;:$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C} Q_2 + R_2 i_2 = - L_{12} \frac{di_1}{dt}$$

1.8. Grundsysteme elektromechanischer Wandler

1.8.1. Das magnetische Grundsystem

Schema:



Die Flußverkettung hängt auch von der Lage des verschieblichen Teils ab, (Außer mind. magn. aktiv sein (Fe, Ni, ...), ansonsten: $\psi = \psi(i)$!)

$$\psi = \psi(i; x) .$$

Magnetischer Anteil der kinetischen Ergänzungsenergie:

$$W_k^m(i; x) = W_{k0}^*(x) + \int_0^i \psi(\theta i; x)\, i\, d\theta .$$

Ohne Permanentmagnete und Remanenz: $W_{k0}^*(x) \equiv 0$

Speziell: Lineares System keine Sättigung in den Eisenteilen:

$\psi \sim i$ ($\psi = Li$)

$$\psi = L(x)\, i , \qquad W_k^m(i; x) = \frac{1}{2} L(x)\, i^2$$

Beispiele: ($L = L(x)$!)

└ allg.: $L(x,i)$!

1) Magnetisches Grundsystem, linear mit Stromspeisung. Wie groß muß die Kraft F sein, um den verschieblichen Teil an der Stelle x im Gleichgewicht zu halten?

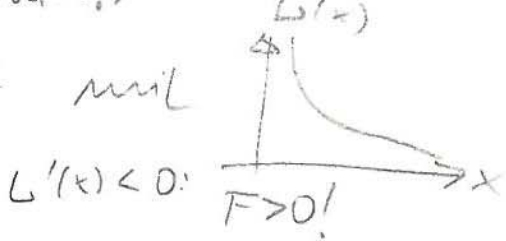
$$\underbrace{\frac{1}{2} m \dot{x}^2}_{=0} + \frac{1}{2} L(x) i^2 = W_k^*$$

$i(t)$ vorgeschrieben $\Rightarrow$ $n = 1$: x, Gleichgewichtsbed.: $\dot{x} = 0$.

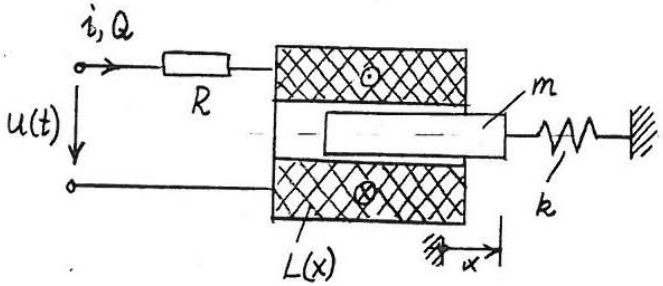
($R \neq 0$, $i = \text{const}$: $\delta L = 0 \rightarrow \delta Q = 0$!)

$$W_k^* = \frac{1}{2} L(x) i^2, \quad W_p = 0, \quad \delta V = 0, \quad \delta A = F \delta x,$$

$$\frac{\partial W_k^*}{\partial x} = \frac{1}{2} L'(x) i^2, \quad f = F : \quad \underline{F = -\frac{1}{2} L'(x) i^2}$$



2) Magnetisches Grundsystem, linear, spannungsgespeist



Feder sei bei $x=0$ entspannt,

$u(t)$ vorgeschrieben.

ges.: Bewegungsgleichungen

$n=2$: Q, x

$$W_k^* = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} L(x) i^2 , \quad W_p = \frac{1}{2} k x^2 , \quad \delta V = R i \delta Q , \quad \delta A = u \delta Q$$

$$\frac{\partial W_k^*}{\partial i} = L(x) i , \quad \frac{\partial W_k^*}{\partial Q} = 0 , \quad \frac{\partial W_p}{\partial Q} = 0 , \quad f_Q^d = R i , \quad f_Q = u ,$$

$$\frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} , \quad \frac{\partial W_k^*}{\partial x} = \frac{1}{2} L'(x) i^2 , \quad \frac{\partial W_p}{\partial x} = k x , \quad f_x^d = 0 , \quad f_x = 0 ,$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left[L(x) i\right] + R i = u}_{\text{el. Gleichung}} , \qquad \underbrace{m \ddot{x} - \frac{1}{2} L'(x) i^2 + k x = 0}_{\text{mech. Gleichung}} .$$

Qlgw. bed. → Stör= beweg.g.: linearisieren

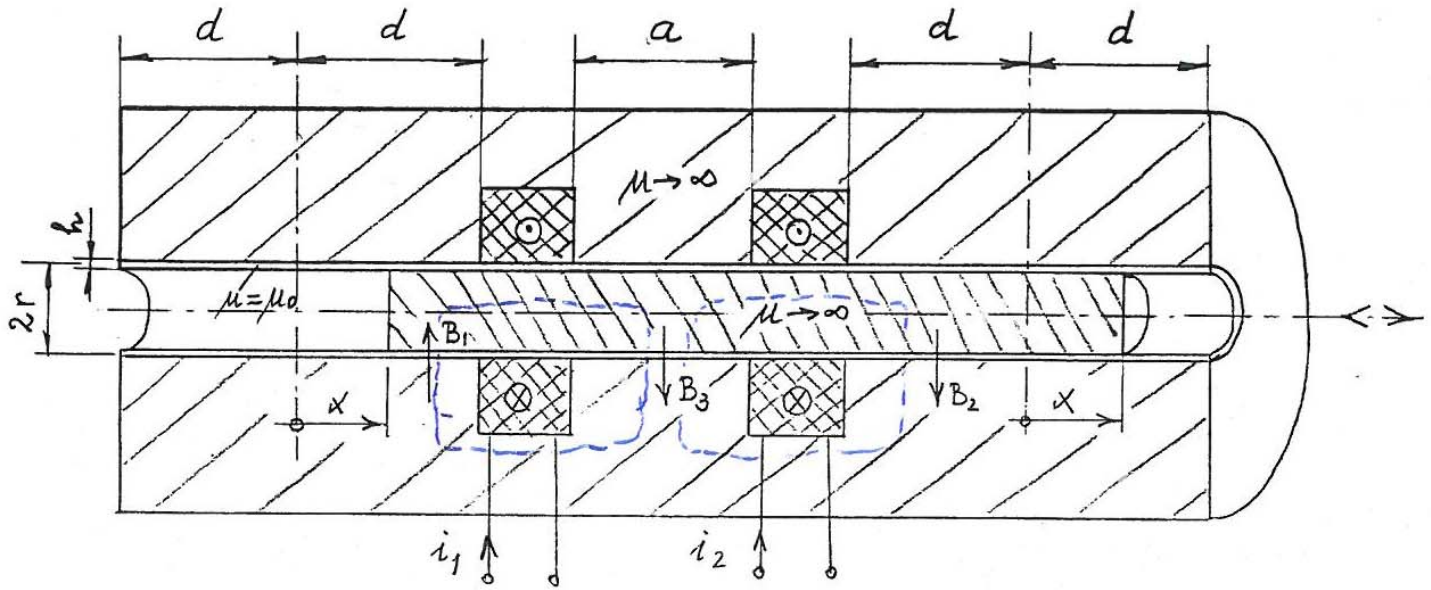
↑

NICHTLINEAR!

$L = L(x)$!

$L(x) \cdot i$!, $L'(x) \cdot i^2$!

3) Magnetantrieb mit zwei Spulen



Zwei Spulen mit je N Windungen; $|x| < d$ dünne, unmagnetische Hülse $h \ll r$, ungesättigte Eisenteile, $\mu_r \to \infty$, Streuung vernachlässigt.

Flußverkettungen:

$$\left.\begin{aligned} \psi_1 &= L_1(x)\,i_1 + L_{12}(x)\,i_2 = N 2\pi r (d-x) B_1 \\ \psi_2 &= L_{12}(x)\,i_1 + L_2(x)\,i_2 = N 2\pi r (d+x) B_2 \end{aligned}\right\}$$

$$\oint \vec{H}\cdot\vec{ds} = \Theta : \quad \frac{h}{\mu_0}(B_1+B_3) = N i_1 \quad , \quad \frac{h}{\mu_0}(B_2-B_3) = N i_2$$
$$\oint \vec{B}\cdot\vec{dA} = 0 : \quad 2\pi r\left[(d+x)B_2 + a B_3 - (d-x)B_1\right] = 0 \qquad \Big\} \rightarrow$$

$$\rightarrow + \left(\begin{array}{l} a B_1 + a B_3 = \mu_0 N \frac{a}{h} i_1 \\ a B_2 - a B_3 = \mu_0 N \frac{a}{h} i_2 \\ (d-x)B_1 - (d+x)B_2 - a B_3 = 0 \end{array}\right) \Bigg\} \quad \begin{array}{l} (a+d-x)B_1 - (d+x)B_2 = \mu_0 N \frac{a}{h} i_1 \\ -(d-x)B_1 + (a+d+x)B_2 = \mu_0 N \frac{a}{h} i_2 \end{array} \Bigg\} \text{ lin. Gl.-Sys. in } B_1 \text{ u. } B_2$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 N}{h(a+2d)}\left[(a+d+x)i_1 + (d+x)i_2\right] \quad , \quad B_2 = \frac{\mu_0 N}{h(a+2d)}\left[(d-x)i_1 + (a+d-x)i_2\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} \Psi_1 = \mu_0 N^2 \frac{2\pi r d^2}{h(a+2d)}\left\{\left[1+\frac{a}{d}\left(1-\frac{x}{d}\right)-\left(\frac{x}{d}\right)^2\right]i_1 + \left[1-\left(\frac{x}{d}\right)^2\right]i_2\right\} \\ \Psi_2 = \mu_0 N^2 \frac{2\pi r d^2}{h(a+2d)}\left\{\left[1-\left(\frac{x}{d}\right)^2\right]i_1 + \left[1+\frac{a}{d}\left(1+\frac{x}{d}\right)-\left(\frac{x}{d}\right)^2\right]i_2\right\} \end{array}\right\} \quad L_0 = \mu_0 N^2 \frac{2\pi r d^2}{h(a+2d)}$$

$$L_1(x) = L_0\left[1+\frac{a}{d}\left(1-\frac{x}{d}\right)-\left(\frac{x}{d}\right)^2\right] \quad , \quad L_2(x) = L_0\left[1+\frac{a}{d}\left(1+\frac{x}{d}\right)-\left(\frac{x}{d}\right)^2\right] ,$$

$$L_{12}(x) = L_0\left[1-\left(\frac{x}{d}\right)^2\right] \quad ; \quad W_k^m(i_1,i_2;x) = \frac{1}{2}L_1(x)i_1^2 + \frac{1}{2}L_2(x)i_2^2 + L_{12}(x)i_1 i_2$$

4) Die Flußverkettung eines magnetischen Grundsystems mit weichmagnetischen Eisenteilen werde durch (nichtlinear!)

$$\psi(i;x) = \psi_s \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{i/i_0}{(1+x/d)^2} \quad ; \qquad \psi_s, i_0, d \ldots \text{konst.}$$

angenähert. Gesucht ist der magnetische Anteil der kinetischen Ergänzungsenergie und $\partial W_k^m / \partial x$.

$$W_k^m(i;x) = \int_0^1 \psi(\theta i; x)\, i\, d\theta = \psi_s \frac{2}{\pi} i \int_0^1 \operatorname{arctg}\left[\frac{i/i_0}{(1+x/d)^2}\theta\right] d\theta ,$$

$$\frac{i/i_0}{(1+x/d)^2} = g \quad , \quad \int_0^1 \operatorname{arctg}(g\theta)\, d\theta \overset{z}{=} \frac{1}{g}\int_0^g \operatorname{arctg} z\, dz = \frac{1}{g}\left[z \operatorname{arctg} z - \frac{1}{2}\ln(1+z^2)\right]_0^g$$

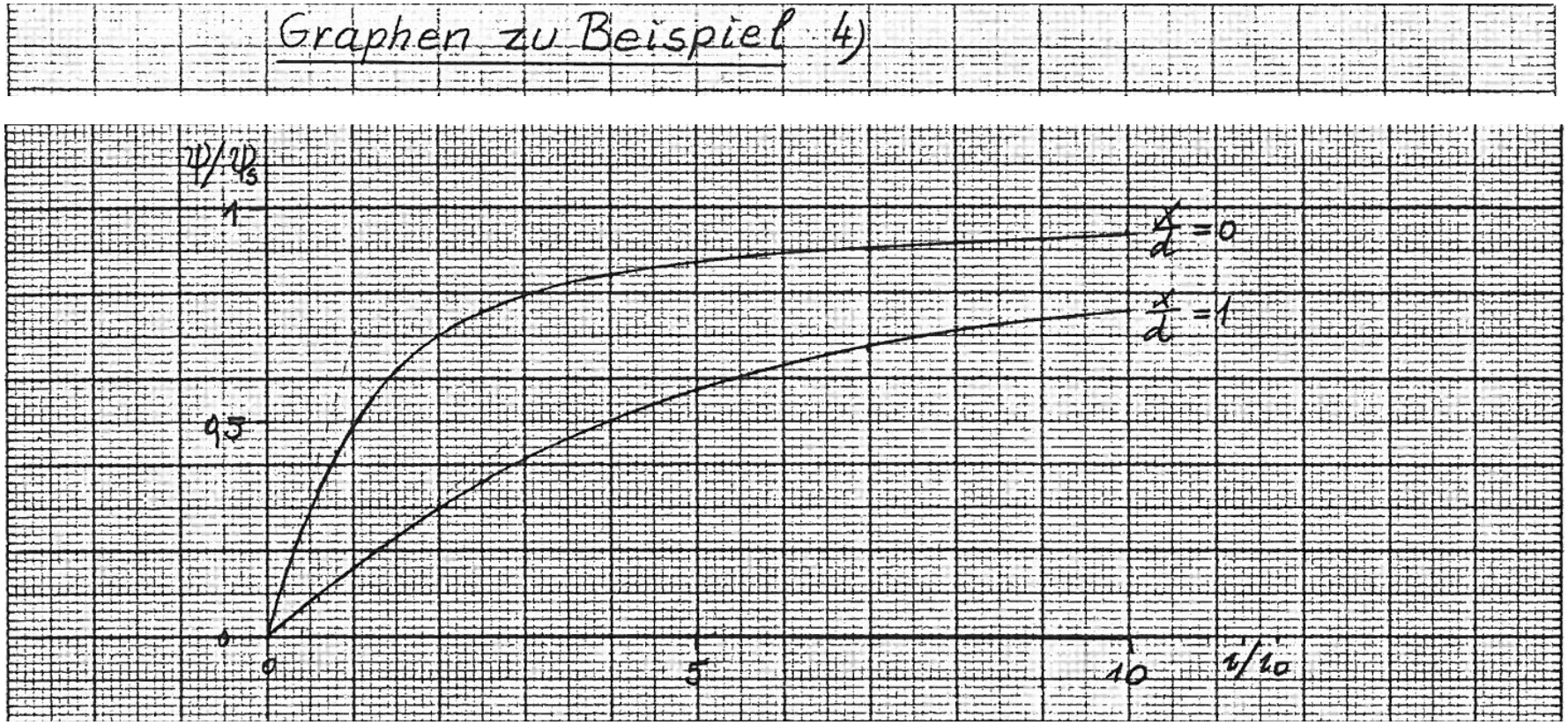
$$= \frac{1}{g}\left[g \operatorname{arctg} g - \frac{1}{2}\ln(1+g^2)\right] = \operatorname{arctg} g - \frac{1}{2g}\ln(1+g^2)$$

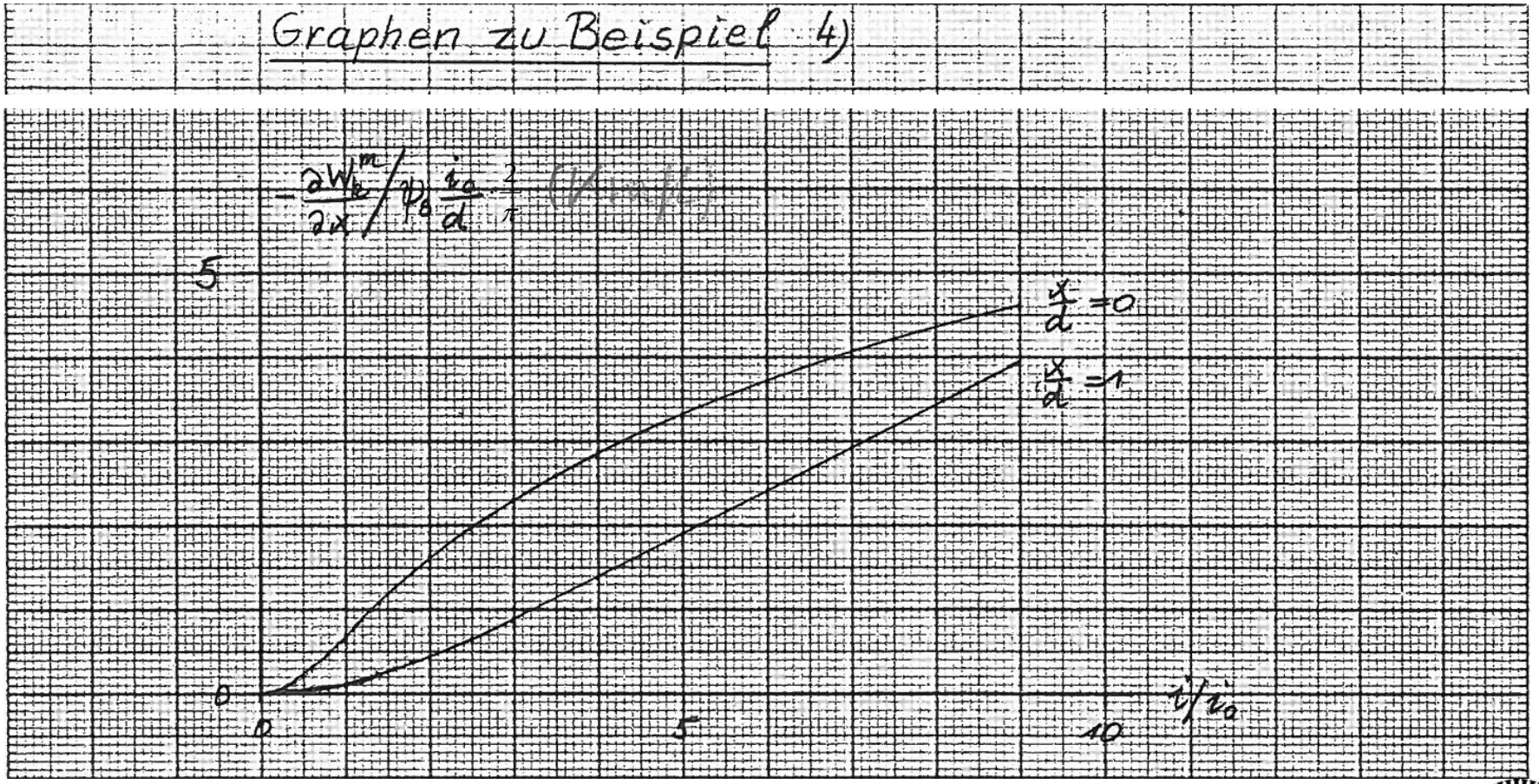
$$W_k^m(i;x) = \psi_s \frac{2}{\pi} i \left[\operatorname{arctg} g - \frac{1}{2g}\ln(1+g^2)\right]$$

$$\frac{\partial W_k^m}{\partial x} = \psi_s \frac{2}{\pi} i \frac{\partial g}{\partial x} \frac{d}{dg}\left[\operatorname{arctg} g - \frac{1}{2g}\ln(1+g^2)\right] = \psi_s \frac{2}{\pi} i \frac{\partial g}{\partial x}\left[\frac{1}{1+g^2} + \frac{1}{2g^2}\ln(1+g^2) - \frac{1}{1+g^2}\right]$$

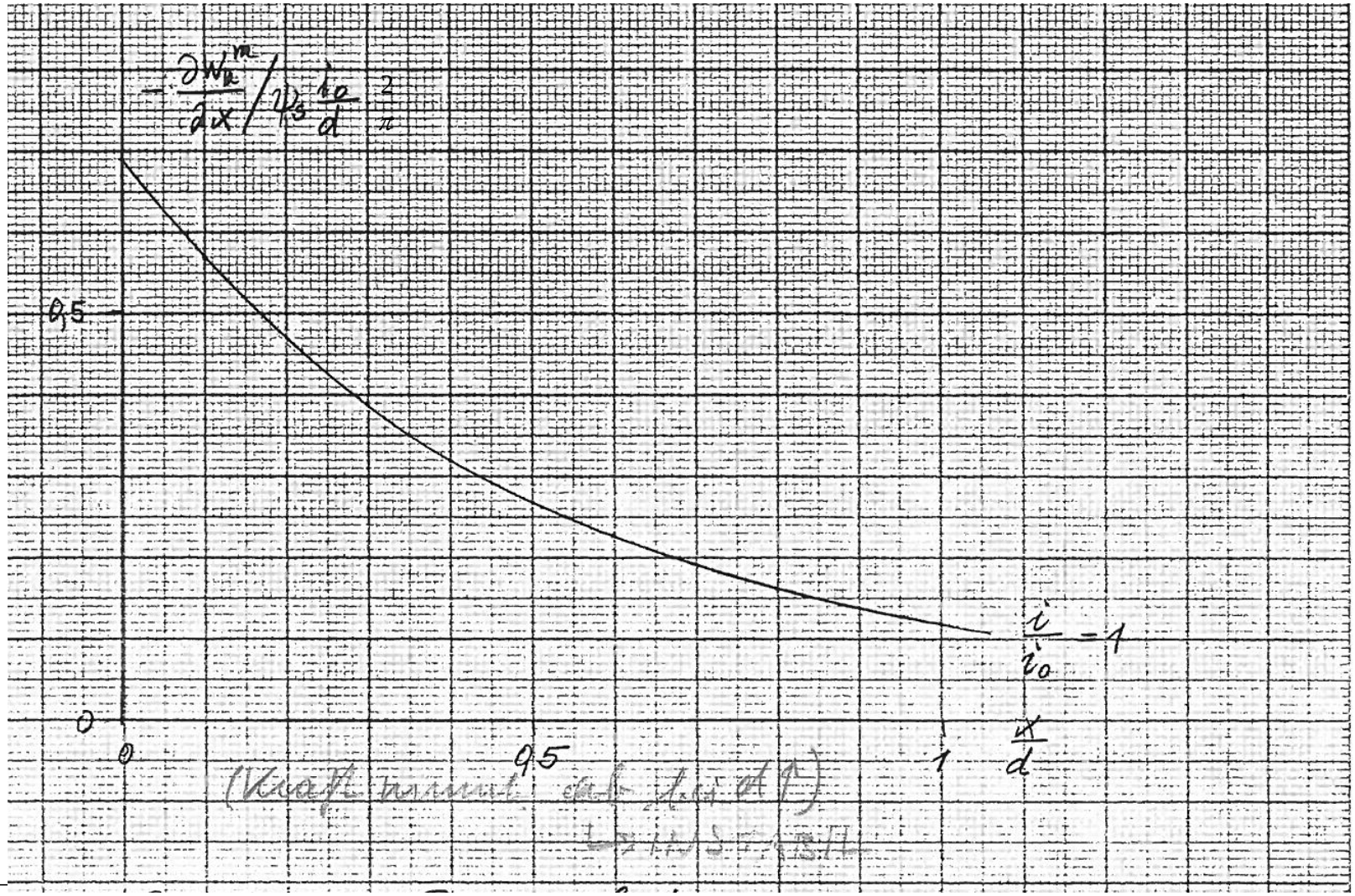
$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{2}{d}\frac{i/i_0}{(1+x/d)^3} = -\frac{2}{d}\left[\frac{i/i_0}{(1+x/d)^2}\right]^2 \frac{1+x/d}{i/i_0} = -\frac{2g^2}{d}\frac{1+x/d}{i/i_0}$$

$$\frac{\partial W_k^m}{\partial x} = -\psi_s \frac{2}{\pi}\frac{i}{d}\frac{1+x/d}{i/i_0}\ln(1+g^2) = -\psi_s \frac{i_0}{d}\left(1+\frac{x}{d}\right)\ln\left[1+\frac{(i/i_0)^2}{(1+x/d)^4}\right]\cdot\frac{2}{\pi}$$


Graphen zu Beispiel 4)
ψ/ψs
1
0,5
0
0
5
10
i/i0
x/d = 0
x/d = 1


Graphen zu Beispiel 4)
$-\frac{\partial W_m'}{\partial x} / \psi_0 \frac{i_0}{d} \frac{2}{\pi}$
5
0
0
5
10
i/i_0
$\frac{x}{d}=0$
$\frac{x}{d}=1$

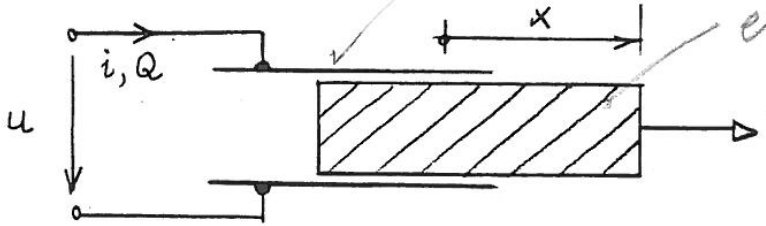
Graphen zu Beispiel 4)



1.8.2. Das elektrische Grundsystem

Kondensator

Schema:



elektrisch polarisierbar (Elektrete)

Für gegebene Ladung hängt die anliegende Spannung von x ab, $u = u(Q, x)$

Elektrischer Anteil der potentiellen Energie:

$$W_p^e(Q,x) = \underbrace{\int_0^1 F(0,\theta x)\, x\, d\theta}_{W_p^e(x)} + \int_0^1 u(\theta Q, x)\, Q\, d\theta \quad \leftarrow \quad W_p(\vec{x}) = \int_0^1 \vec{F}(\theta\vec{x})\cdot\vec{x}\, d\theta$$

Falls $F \equiv 0$ für $Q = 0$: $W_{p0}(x) \equiv 0$. ($\neq 0$ bei Elektreten)

Remanenz

$$u = \frac{\partial W_p^e}{\partial Q}, \qquad F = \frac{\partial W_p^e}{\partial x}.$$

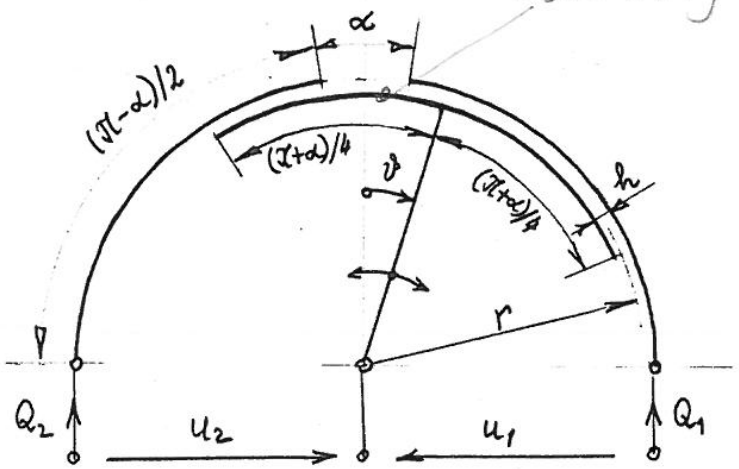
Elektrisch lineares System: $u = \frac{Q}{C(x)}$, $W_p^e = \frac{Q^2}{2C(x)}$

Elektrisch nicht linear: $C = C(x, Q)$

Beispiel: Lineares System

2 gekoppelte Kondensatoren

Schwinganker



Zylindrische Anordnung, Länge l, $h \ll r$

Streuung nicht berücksichtigt

$$Q_1 = \varepsilon_0 \left[\frac{1}{4}(\pi+\alpha) + \vartheta - \frac{\alpha}{2}\right] \frac{rl}{h} u_1 ,$$

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 r l}{h} , \quad \vartheta_m = \frac{1}{4}(\pi-\alpha) , \quad -\vartheta_m < \vartheta < \vartheta_m$$

$$Q_1 = (\vartheta_m + \vartheta) C_0 u_1 , \quad Q_2 = (\vartheta_m - \vartheta) C_0 u_2 ,$$

$$W_p^e(Q_1, Q_2, \vartheta) = \frac{1}{2C_0}\left[\frac{Q_1^2}{\vartheta_m+\vartheta} + \frac{Q_2^2}{\vartheta_m-\vartheta}\right] ,$$

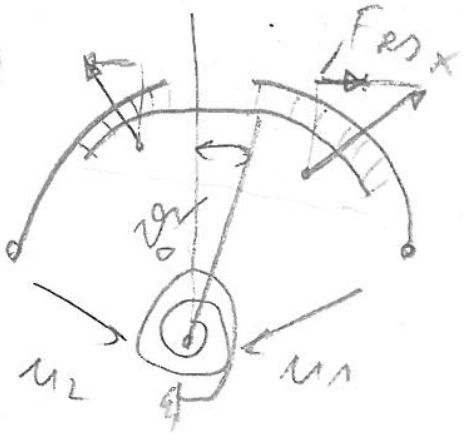
$$\frac{\partial W_p^e}{\partial \vartheta} = \frac{1}{2C_0}\left[-\frac{Q_1^2}{(\vartheta_m+\vartheta)^2} + \frac{Q_2^2}{(\vartheta_m-\vartheta)^2}\right] = \frac{C_0}{2}(u_2^2 - u_1^2)$$

≙ Drehmoment

$$C_1 = \frac{Q_1}{u_1} = (N_m - N)C_0$$

$$C_2 = \frac{Q_2}{u_2} = (N_m - N)C_0$$

Bsp:

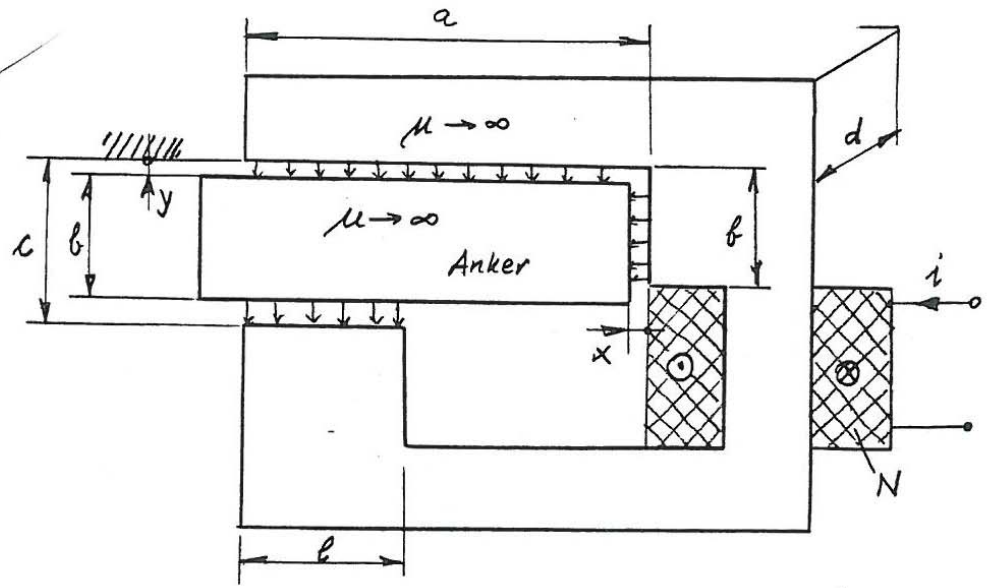


Ddl. $u_1, u_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow N_0$ ein-stellbar (über Federn)

1.9. Übungsaufgaben

1)



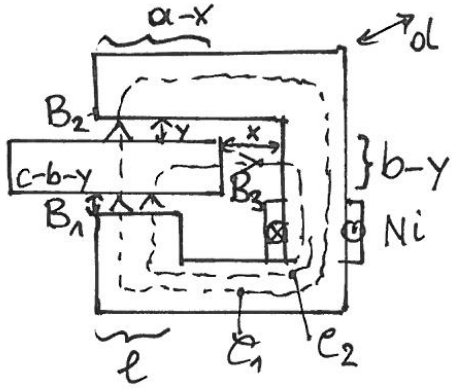
Der Anker eines hochpermeablen Magnetsystems ($\mu_r \to \infty$) ist in den x- und y-Richtungen verschiebbar angeordnet. Bestimmen Sie die Flußverkettung der Erregerspule und den magnetischen Anteil der kinetischen Ergänzungsenergie unter der Annahme, daß die Luftspalte klein gegen die Querschnittsabmessungen sind.

Lösung:

$$\psi(i;x,y) = L(x,y)\, i \,, \qquad \text{mit } L(x,y) = \mu_0 N^2 d \left[\frac{1}{\frac{b-y}{x} + \frac{a-x}{y}} + \frac{c-b-y}{\ell} \right]^{-1}$$

$$W_k^m(i;x,y) = \frac{1}{2} L(x,y)\, i^2$$

Lösung: Aufgabe 1)



$$\psi = N \cdot \ell d \cdot B_1$$

$$\psi = N \cdot [(a-x) d B_2 + (b-y) d B_3]$$

$$\oint_{c_1} \vec{H} d\vec{s} = N \cdot i = \frac{B_1}{\mu_0} \cdot (c-b-y) + \frac{B_2}{\mu_0} y$$

$$\oint_{c_2} \vec{H} d\vec{s} = N \cdot i = \frac{B_1}{\mu_0} \cdot (c-b-y) + \frac{B_3}{\mu_0} \cdot x$$

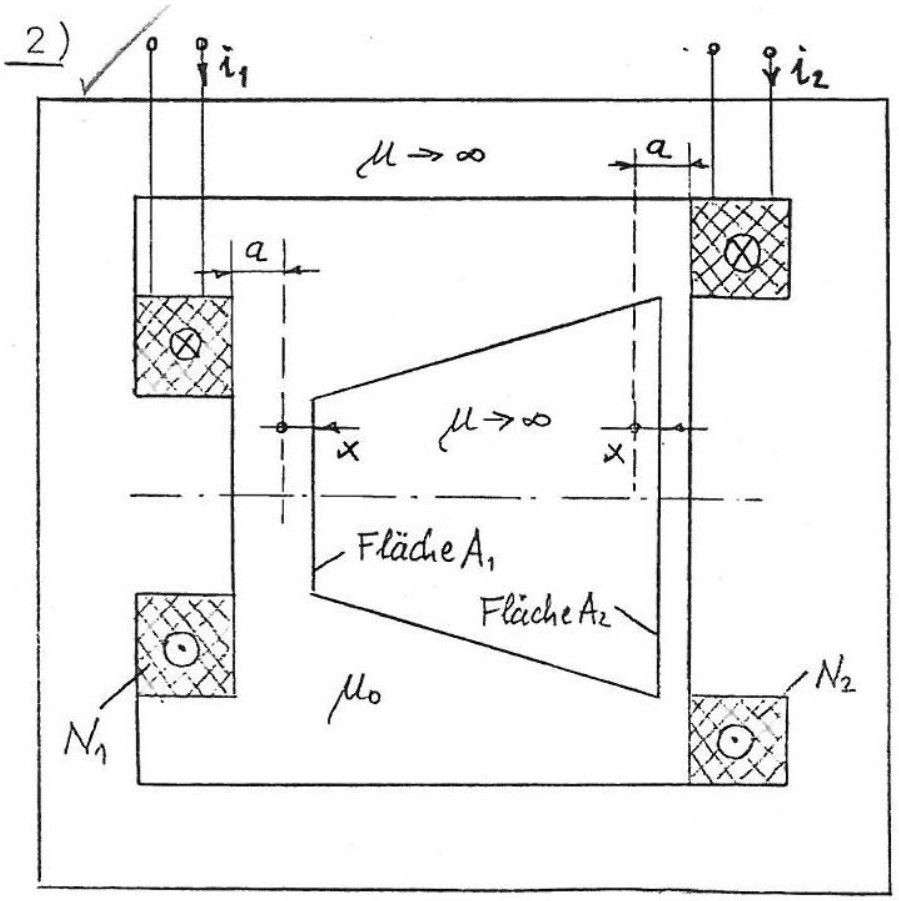
$$\begin{aligned} B_1 \cdot (c-b-y) + B_2 \cdot y &= \mu_0 N i \\ B_1 \cdot (c-b-y) + B_3 \cdot x &= \mu_0 \cdot N \cdot i \\ -B_1 \cdot \ell + B_2 \cdot (a-x) + B_3 \cdot (b-y) &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} c-b-y & y & 0 \\ c-b-y & 0 & x \\ \ell & -a+x & -b+y \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_0 N i \\ \mu_0 N i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \frac{1}{\mathrm{Det}(M)} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} \mu_0 N i & y & 0 \\ \mu_0 N i & 0 & x \\ 0 & -a+x & -b+y \end{vmatrix}}_{\mathrm{Det}(M1)}$$

CRAMER'sche Regel und Regel von SARRUS:
Det(M), Det(M1) berechnen!

$$B_1 = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot i \cdot [x(x-a) + y(y-b)]}{y \cdot x \cdot \ell - (c-b-y) \cdot [x(x-a) + y(y-b)]} \quad | \quad L = \frac{\psi}{i} = \frac{N \ell d B_1}{i} = \mu_0 N^2 d \cdot \frac{1}{\frac{c-b-y}{\ell} + \frac{1}{\frac{a-x}{y} + \frac{b-y}{x}}}$$

$$\psi(i; x, y) = L(x, y) \cdot i \quad , \quad W_k^m(i; x, y) = \int_0^i \psi \, di = L(x, y) \cdot i^2/2$$



Ist der bewegliche Teil des hochpermeablen Magnetsystems zentriert, so haben die beiden Luftspalte dieselbe Länge a. Die Verschiebung aus dieser Mittellage wird durch die Koordinate x gemessen.

a) Bestimmen Sie die Flußverkettungen $\psi_1(i_1, i_2; x)$ und $\psi_2(i_1, i_2; x)$ der beiden Spulen.

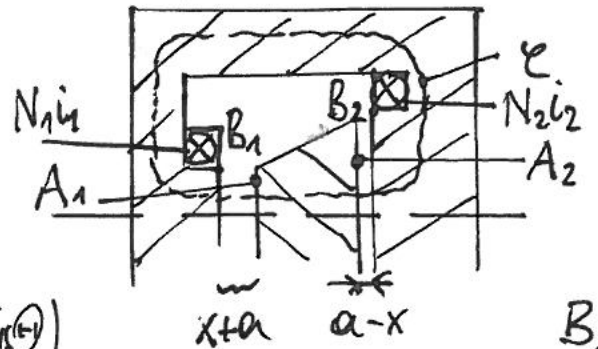
b) Berechnen Sie den magn. Anteil der kin. Ergänzungsenergie.

Lösung:

a)
$$\left.\begin{aligned} \psi_1(i_1, i_2; x) &= \mu_0 f(x)\left(N_1^2 i_1 + N_1 N_2 i_2\right) \\ \psi_2(i_1, i_2; x) &= \mu_0 f(x)\left(N_1 N_2 i_1 + N_2^2 i_2\right) \end{aligned}\right\} \text{ mit } f(x) = \left(\frac{a+x}{A_1} + \frac{a-x}{A_2}\right)^{-1}$$

b)
$$W_k^m(i_1, i_2; x) = \frac{1}{2}\mu_0 f(x)\left(N_1 i_1 + N_2 i_2\right)^2$$

Lösung: Aufgabe 2)



$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{s} = N_1 i_1 + N_2 i_2 = \textcircled{H} =$$

$$\textcircled{e} = \frac{B_1}{\mu_0}(a+x) + \frac{B_2}{\mu_0}\cdot(a-x)$$

$$\Phi = A_1 B_1 = A_2 B_2$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a+x & a-x \\ A_1 & -A_2 \end{pmatrix}}_{M} \cdot \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_0 \textcircled{H} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B_1 \cdot (a+x) + B_2 (a-x) = \mu_0 \cdot \textcircled{H}$$

$$B_1 \cdot A_1 - B_2 A_2 = 0$$

$$B_1 = \frac{1}{\mathrm{Det}(M)} \cdot \begin{vmatrix} \mu_0 \textcircled{H} & a-x \\ 0 & -A_2 \end{vmatrix} = \frac{-A_2 \cdot \mu_0 \textcircled{H}}{-A_2 \cdot (a+x)(a-x) \cdot A_1}$$

, B_2 wird nicht benötigt

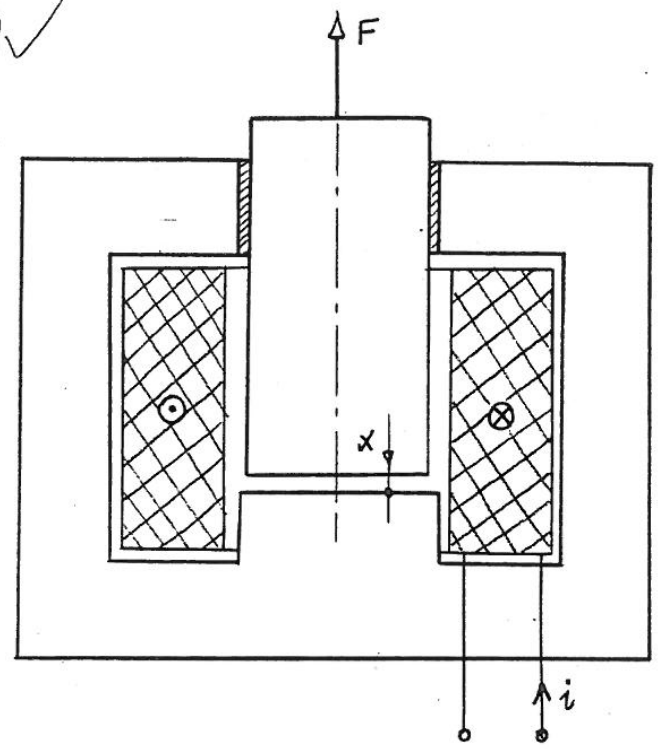
$$\Psi_1(x, i_1, i_2) = N_1 \cdot B_1 A_1 = \frac{\mu_0 \cdot N_1 (N_1 i_1 + N_2 i_2) \cdot A_1 A_2}{A_1 (a-x) + A_2 (a+x)} = \mu_0 \cdot (N_1^2 i_1 + N_1 N_2 i_2) \cdot f(x)$$

$$\Psi_2(x, i_1, i_2) = N_2 \cdot B_1 A_1 = \mu_0 (N_1 N_2 i_1 + N_2^2 i_2) \cdot f(x)$$

$$f(x) = \frac{1}{\frac{a-x}{A_2} + \frac{a+x}{A_1}}$$

$$W_k^m = \int_0^{i_1} \Psi_1 \cdot di_1 + \int_0^{i_2} \Psi_2 \, di_2 = \mu_0 \cdot f(x) (N_1 i_1 + N_2 i_2)^2 / 2$$

3)



Die Flußverkettung der Erregerspule eines magnetischen Antriebssystems sei durch die Beziehung

$$\psi(i;x) = \frac{L_0 i}{1+x/a}$$

gegeben.

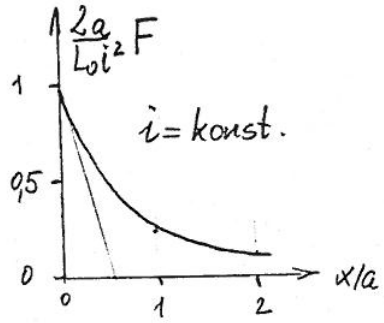
a) Bestimmen Sie die Kraft F, die nötig ist, um den verschiebbaren Teil für einen Erregerstrom i an der Stelle x im Gleichgewicht zu halten.

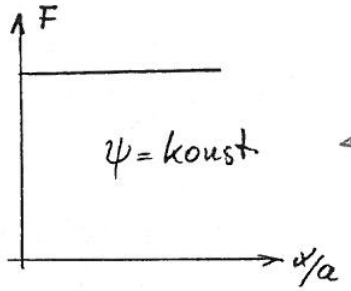
b) Skizzieren Sie den Verlauf dieser Kraft als Funktion des Abstands x für konstanten Strom i und für konstante Flußverkettung ψ

Lösung:

a) $F(i;x) = \frac{L_0 i^2}{2a} \frac{1}{(1+x/a)^2}$, $F(\psi;x) = \frac{\psi^2}{2aL_0}$

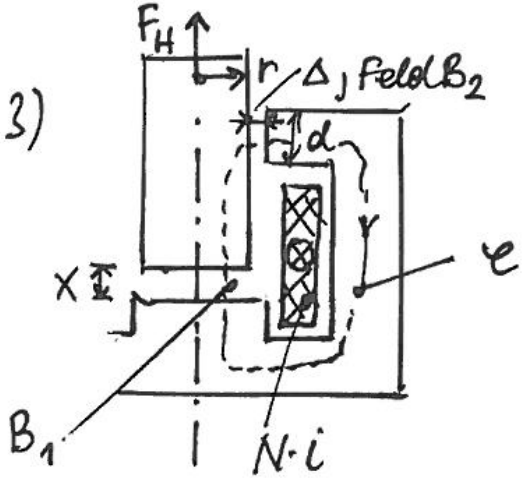
b)





für Ψ = const bleibt F const.
($i \sim 1 + \frac{x}{a}$!)

Lösung: Aufgabe 3)



$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{s} = N\cdot i = \frac{B_1}{\mu_0}x + \frac{B_2}{\mu_0}\Delta$$

$$\Phi = B_1 r^2\pi + 2r\pi d\cdot B_2$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x & \Delta \\ r^2\pi & -2r\pi d \end{pmatrix}}_{\mathcal{H}} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_0 N i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \frac{1}{\det(\mathcal{H})}\begin{vmatrix} \mu_0 \cdot N\cdot i & \Delta \\ 0 & -2r\pi d \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{-\mu_0 N i\cdot 2r\pi d}{-2r\pi d\cdot x - \Delta r^2\pi}, \quad \psi = L(x)\cdot i = N\cdot\Phi = N\cdot B_1\cdot r^2\pi = \frac{\mu_0 N^2\cdot i\cdot (r^2\pi)\,2r\pi d}{2r\pi d x + \Delta r^2\pi}$$

$$\psi(x,i) = L(x)\,i = \frac{\mu_0 N^2\cdot i}{\frac{x}{r^2\pi} + \frac{\Delta}{2r\pi d}} \Rightarrow L(x) = \underbrace{\mu_0 N^2\cdot\frac{2r\pi d}{\Delta}}_{L_0}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{a}} \quad | a = \frac{r\cdot\Delta}{2\cdot d}$$

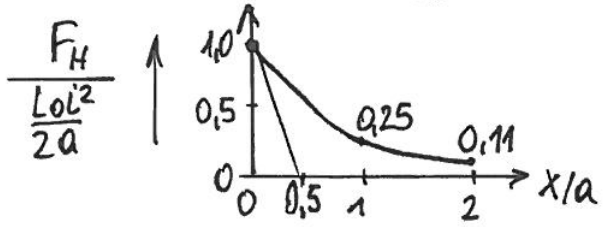
i gegeben, x variabel = Luftspalt $\qquad L(x) = L_0/(1+\frac{x}{a})$

$W_k^* = \frac{1}{2}L(x)\cdot i^2$, $W_p = 0$, $\delta V = 0$, $\delta A = F\cdot\delta x$, $\partial W_k^*/\partial i = 0$, $\partial W_k^*/\partial x = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{i^2}{2}\cdot\frac{L_0}{1+\frac{x}{a}}\right]$

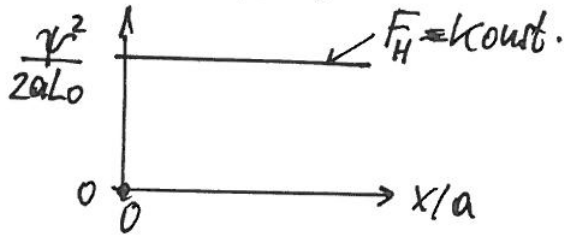
$\partial W_k^*/\partial x = -\frac{i^2}{2}\cdot L_0\cdot\frac{1/a}{(1+x/a)^2}$, $\frac{\partial W_k^*}{\partial x} = -F = -\frac{L_0\cdot i^2}{2a}\cdot\frac{1}{(1+\frac{x}{a})^2}$

Haltekraft nach oben: F_H: gegen magn. Zugkraft F (nach unten): $F_H = \frac{L_0 i^2}{2a}\cdot\frac{1}{(1+\frac{x}{a})^2}$

a) i = konst.: $F_H \sim \frac{1}{(1+\frac{x}{a})^2}$



b) ψ = konst.: $F_H = \frac{1}{2aL_0}\cdot\psi^2$ = konst.

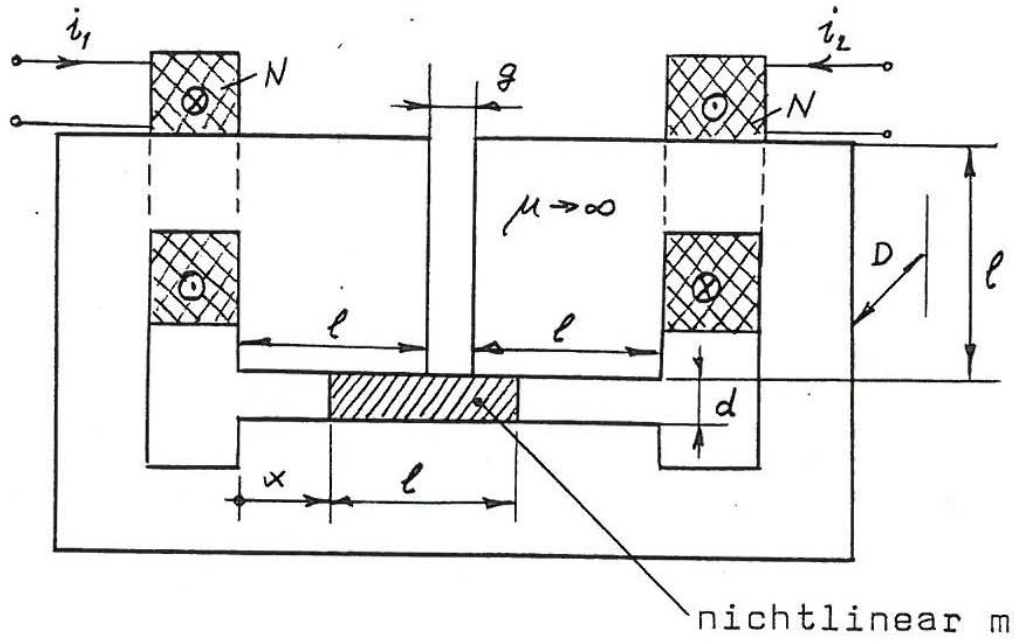


Tangente bei $x=0$: $x/a \ll 1$:

$$\frac{1}{(1+\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{1+\frac{2x}{a}+\frac{x^2}{a^2}} \cong \frac{1}{1+\frac{2x}{a}} \cong 1-\frac{2x}{a}$$

bei $x/a = 0{,}5$: $1-\frac{2x}{a} = 0$

4)



$g \ll l$, $d \ll l$,

$g < x < l$

nichtlinear magnet. Material

Ein Stück nichtlinear magnetischen Materials, das sich im interessierenden Bereich durch die Werkstoffbeziehung

$$\vec{B} = \mu(1+\alpha H^2)\vec{H} \quad ; \quad \mu, \alpha \text{ ... konst.}$$

beschreiben läßt, liegt zwischen den drei Polen eines hochpermeablen Magnetsystems.

a) Zeigen Sie, daß

$$\Psi_1(i_1, i_2; x) = L_0\left[\left(\frac{\mu}{\mu_0} + \frac{d}{g} - \frac{\mu-\mu_0}{\mu_0}\frac{x}{\ell}\right)i_1 + \beta\left(1-\frac{x}{\ell}\right)i_1^3 - \frac{d}{g}i_2\right]$$

$$\Psi_2(i_1, i_2; x) = L_0\left[\left(1 + \frac{d}{g} + \frac{\mu-\mu_0}{\mu_0}\frac{x-g}{\ell}\right)i_2 + \beta\frac{x-g}{\ell}i_2^3 - \frac{d}{g}i_1\right]$$

$$L_0 = \mu_0 N^2 D\ell/d \qquad \beta = \frac{\mu}{\mu_0}\alpha\left(\frac{N}{d}\right)^2$$

b) Berechnen Sie den magn. Anteil der kinet. Ergänzungsenergie.

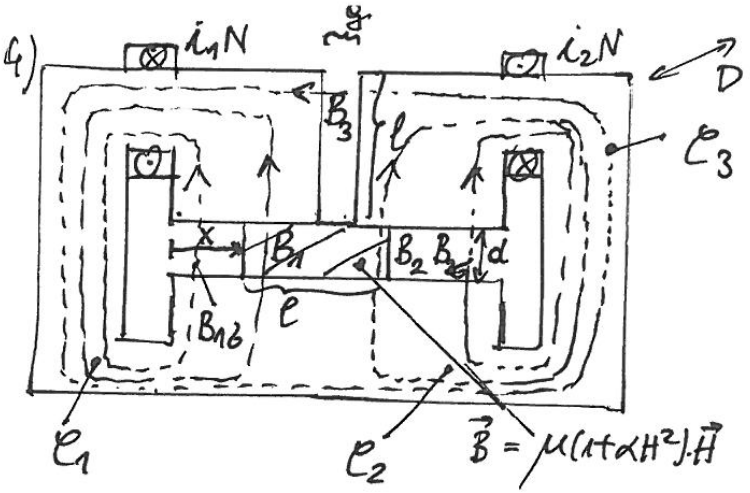
c) Wie groß ist die Kraft magnetischen Ursprungs auf den verschiebbaren Teil?

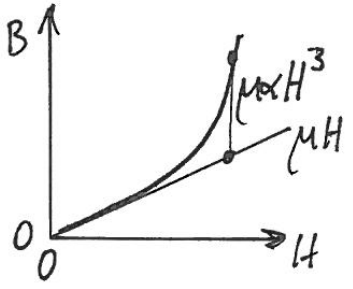
Lösung:

magn. Ergänzungsenergie (daher +)

c) $$F_x = \frac{\partial W_k^m}{\partial x} = \frac{L_0}{2\ell}\left[\frac{\mu-\mu_0}{\mu_0} + \frac{\beta}{2}(i_2^2 + i_1^2)\right](i_2^2 - i_1^2)$$

Lösung: Aufgabe 4)





$\oint_{c_1} \vec{H}\cdot d\vec{s} = Ni_1$

$H_1 = Ni_1/d$

$B_{1\delta} = \mu_0 H_1$

$B_1 = \mu(1+\alpha H_1^2)H_1$

$\oint_{c_2} \vec{H}\cdot d\vec{s} = Ni_2$

$H_2 = Ni_2/d$

$B_{2\delta} = \mu_0 H_2 \quad B_2 = \mu(1+\alpha H_2^2)H_2$

$\oint_{c_3} \vec{H}\cdot d\vec{s} = N(i_1 - i_2) = H_3 \cdot g \Rightarrow B_3 = \mu_0 H_3$

$B_3 = \mu_0 N(i_1 - i_2)/g$

Eisenpfade, die zwischen B_1 und B_2 vertikal im Spalt g endet, sind wegen $g \ll \ell$ vernachlässigt. Wegen $g < x < \ell$ überdeckt Material stets Spalt g.

$\Rightarrow \Phi_1 = D\cdot(xB_{1\delta} + (\ell - x)B_1 + B_3\ell)$

$\Phi_2 = D[(x-g)B_2 + (\ell+g-x)\cdot B_{2\delta} - B_3\ell)$

$2\ell + g - \ell - x = \ell + g - x$

$\ell + x - \ell - g = x - g$

$\psi_1 = N\cdot D\cdot\left(x\cdot\frac{\mu_0 N i_1}{d} + (\ell - x)\mu\left(1+\alpha\left(\frac{Ni_1}{d}\right)^2\right)\cdot\left(\frac{Ni_1}{d}\right) + \frac{g\mu_0 N(i_1 - i_2)}{g}\right)$

$\psi_1 = \underbrace{\frac{\mu_0 N^2 D\ell}{d}}_{L_0}\cdot\left[\underbrace{\left(\frac{x}{\ell} + \frac{\mu}{\mu_0}\cdot\left(1-\frac{x}{\ell}\right) + \frac{d}{g}\right)}_{\frac{\mu}{\mu_0} + \frac{d}{g} - \frac{x}{\ell}\frac{\mu-\mu_0}{\mu_0}} i_1 + \left(1-\frac{x}{\ell}\right)\underbrace{\frac{\mu}{\mu_0}\cdot\alpha\frac{N^2}{d^2}}_{\beta} i_1^3 - \frac{d}{g} i_2\right]$

$\psi_1 = L_0\cdot\left[\left(\frac{\mu}{\mu_0} + \frac{d}{g} - \frac{x}{\ell}\cdot\frac{\mu-\mu_0}{\mu_0}\right) i_1 + \left(1-\frac{x}{\ell}\right)\cdot\beta\, i_1^3 - \frac{d}{g} i_2\right]$

$$\psi_2 = N \cdot D \cdot \left[(l+g-x) \frac{\mu_0 N i_2}{d} + (x-g) \mu \left(1+\alpha \left(\frac{N i_2}{d}\right)^2\right) \frac{N i_2}{d} - \frac{l \mu_0 N}{g} (i_1 - i_2) \right]$$

$$\psi_2 = \underbrace{\frac{\mu_0 N^2 D l}{d}}_{L_0} \cdot \left[\left(1 + \frac{g}{l} - \frac{x}{l} + \frac{\mu}{\mu_0} \cdot \left(\frac{x}{l} - \frac{g}{l}\right) + \frac{d}{g}\right) \cdot i_2 + \left(\frac{x-g}{l}\right) \cdot \underbrace{\frac{\mu}{\mu_0} \alpha \left(\frac{N}{d}\right)^2}_{\beta} i_2^3 - \frac{d}{g} i_1 \right]$$

$$\psi_2 = L_0 \cdot \left[\left(1 + \frac{d}{g} + \frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} \cdot \frac{x-g}{l}\right) i_2 + \beta \cdot \frac{x-g}{l} \cdot i_2^3 - \frac{d}{g} i_1 \right]$$

2 Freiheitsgrade $Q_1, Q_2 \Rightarrow W_k^m = \int_0^1 \underset{\sim}{\Psi} \cdot \underset{\sim}{i} \, d\nu = \int_0^1 (\psi_1 i_1 + \psi_2 i_2) \, d\nu =$

$\underset{\sim}{\Psi} = (\psi_1, \psi_2)$, $\underset{\sim}{i} = (i_1, i_2)$

$$= \int_0^1 \left[\psi_1 (\nu i_1, \nu i_2) \cdot i_1 + \psi_2 (\nu i_1, \nu i_2) \cdot i_2 \, d\nu \right] =$$

$$= \int_0^1 \left[(A \cdot \nu i_1 + B \nu^3 i_1^3 + C \cdot \nu i_2) i_1 + (D \cdot \nu i_2 + E \nu^3 i_2^3 + C \nu i_1) i_2 \right] \cdot d\nu =$$

$$= A \frac{i_1^2}{2} + B \frac{i_1^4}{4} + C \frac{i_1 i_2}{2} + D \frac{i_2^2}{2} + E \frac{i_2^4}{4} + C \frac{i_1 i_2}{2}$$

$$W_k^m(i_1,i_2) = L_0 \cdot \left[\left(\frac{\mu}{\mu_0} + \frac{d}{g} - \frac{x}{e} \cdot \frac{\mu-\mu_0}{\mu_0} \right) \frac{i_1^2}{2} + \left(1-\frac{x}{e}\right) \beta \cdot \frac{i_1^4}{4} + \left(-\frac{d}{g}\right) \cdot i_1 i_2 + \right.$$
$$\left. + \left(1 + \frac{d}{g} + \frac{\mu-\mu_0}{\mu_0} \cdot \left(\frac{x-g}{e}\right)\right) \frac{i_2^2}{2} + \frac{x-g}{e} \cdot \beta \cdot \frac{i_2^4}{4} \right]$$

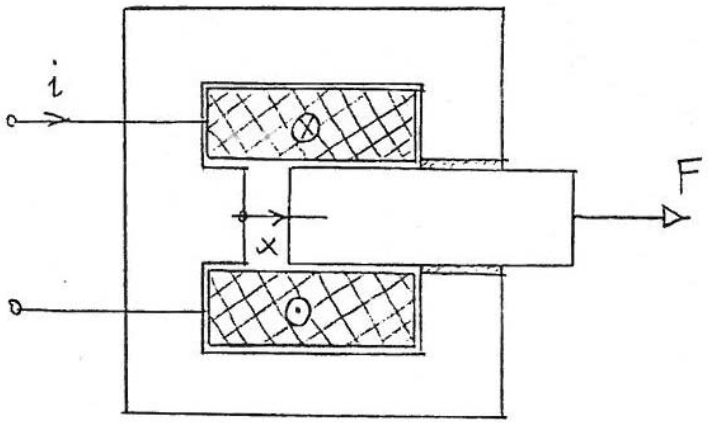
$$F_x = \frac{\partial W_k^m}{\partial x} = L_0 \cdot \left[-\frac{\mu-\mu_0}{e \cdot \mu_0} \frac{i_1^2}{2} - \frac{\beta}{e} \frac{i_1^4}{4} + \frac{\mu-\mu_0}{\mu_0} \frac{1}{e} \frac{i_2^2}{2} + \frac{\beta}{e} \frac{i_2^4}{4} \right]$$

$$F_x = L_0 \cdot \frac{i_2^2 - i_1^2}{2e} \cdot \left[\frac{\mu-\mu_0}{\mu_0} + \frac{\beta}{2} \cdot (i_2^2 + i_1^2) \right]$$

Kraft in x-Achse!

- Wenn $i_1 = i_2 \Rightarrow$ kein resultierendes Magnetfeld $\Rightarrow F_x = 0$
- Wenn Stoff amagnetisch ($\mu = \mu_0, \alpha = 0$) $\Rightarrow F_x = 0$

5) ✓

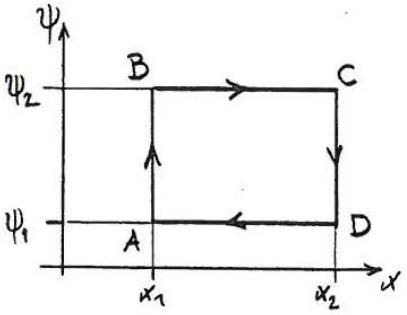


Der skizzierte magnetische Wandler kann als verlustfreies, elektrisch lineares System mit der Flußverkettung

$$\psi(i,x) = L_0 i/(1+x/a)$$

behandelt werden (L_0 und a sind positive Konstanten).

a) Bestimmen Sie die Kraft F für Gleichgewicht bei einer Verschiebung x und einem gegebenen Wert ψ der Flußverkettung.



b) Wie groß ist die elektromechanisch übertragene Energie (Richtung?), wenn das System einen Zyklus ABCDA gemäß der Skizze durchläuft? Diskutieren Sie den zugehörigen Verlauf der Kraft F und des Stroms i.

Lösung:

a) $F(\psi;x) = \frac{\psi^2}{2aL_0}$, b) $W_{\square} = \frac{x_2-x_1}{2aL_0}(\psi_2^2-\psi_1^2)$, mechanisch zugeführt

Lösung: Aufgabe 5)

Anordnung identisch mit Aufgabe 3), daher $\psi(i,x) = L_0 \cdot i/(1+x/a)$ identisch.

$$W_k^* = \int_0^1 \psi(\vartheta i)\, i\, d\vartheta = \int_0^1 [L_0 \vartheta i/(1+x/a)] \cdot i\, d\vartheta = L_0 \frac{i^2}{2} \cdot 1/(1+x/a)$$

$n = 2$, Q, x als Koordinaten

$$W_k^*(\underset{\sim}{v}; \underset{\sim}{x}) = \int_0^1 \underset{\sim}{F}^{(i)}(\underset{\sim}{Q}; \vartheta \underset{\sim}{x}) \cdot \underset{\sim}{v}\, d\vartheta + \int_0^1 \underset{\sim}{g}(\vartheta \underset{\sim}{v}; \underset{\sim}{x}) \cdot \underset{\sim}{v}\, d\vartheta$$

gleichgewichtet: x fest: Q variabel

$\underset{\sim}{F}^{(i)}(\underset{\sim}{Q}; \underset{\sim}{x}) = 0$ $\quad v_1 = \dot{Q} = i = 0 \Rightarrow F^{(i)} = 0$

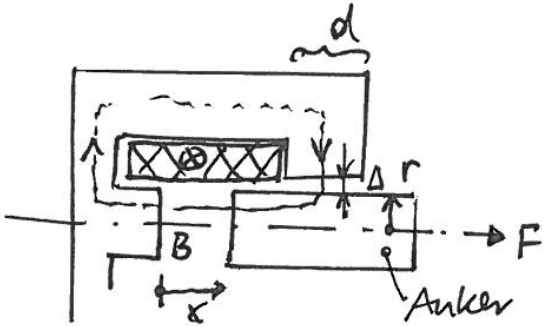
$g_1 = \psi$, $v_1 = i$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial W_{ke}^*}{\partial x} + \frac{\partial W_p}{\partial x} + f_\xi^{el} = f$$

$= 0$ $\quad W_p = 0$ $\quad f^{el} = 0$

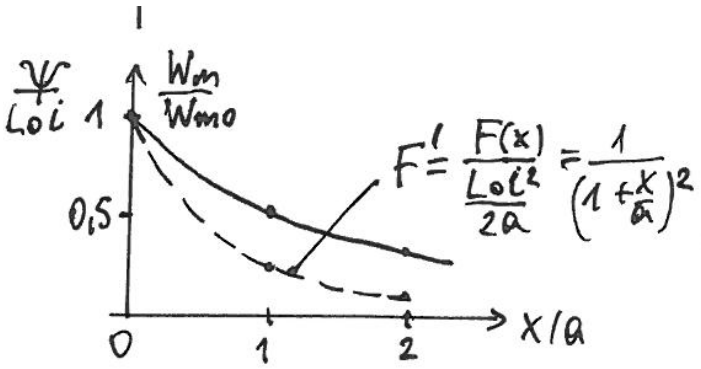
$$f = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{L_0 i^2}{2} \frac{1}{1+\frac{x}{a}} = \frac{L_0 i^2}{2a} \cdot \frac{1}{(1+\frac{x}{a})^2} = F$$

$$F = \frac{L_0^2 i^2}{(1+\frac{x}{a})^2} \cdot \frac{1}{2aL_0} = \frac{\psi^2(i,x)}{2aL_0}$$



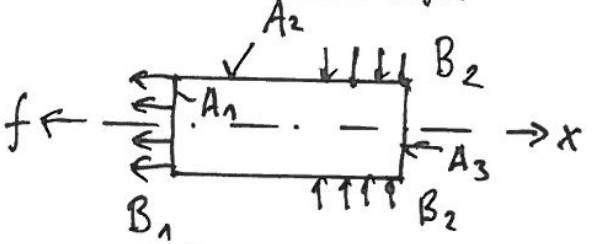
- $\psi \sim i$: Magnetisches lineares System: $W_k^* = W_m$

  W_m: magn. Energie ($W_{m0} = L_0 i^2/2$)
- Magnetkraft „zieht" Anker gegen x!



$$F' = \frac{F(x)}{\frac{L_0 i^2}{2a}} = \frac{1}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^2}$$

- Magnetkraft „zieht" Luft gegen x !
- Haltekraft F muss in x-Richtung gegenhalten!
- Mit steigendem x nimmt F(x) bei i = konst.
- Feldbetrachtung: Maxwell'sche Zugspannungen



$$\vec{F} = \oint_A \vec{\sigma} \cdot d\vec{A}$$

$$\sigma_1 = \frac{B_1^2}{2\mu_0} \qquad \sigma_2 = \frac{B_2^2}{2\mu_0}$$

y-Richtung: $\int_{A_2} \sigma_2 \cdot dA = 0$

x-Richtung: $\int_{A_1} \sigma_1 \, dA + \int_{A_3} 0 \cdot dA = F$

- Aus Def. p. 3):

$$B_1 = \frac{\mu_0 N i}{x + \frac{\Delta r}{2\Delta}} = \frac{\mu_0 N i}{x+a}$$

$$f = \frac{\mu_0^2 N^2 i^2}{2\mu_0} \cdot \frac{1}{(x+a)^2} =$$

$$= \underbrace{\frac{\mu_0 N^2 2r\pi d}{\Delta}}_{L_0} \cdot i^2 \cdot \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{L_0 i^2}{2a} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{x}{a}\right)^2}$$

identisch mit Lagrange-Ergebnis.

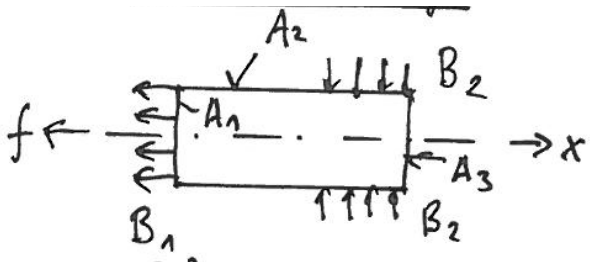
Magnetische Energie aus Feldbegriff: (siehe Aufg. 3): $B_2 = \frac{1}{\det(\mu)} \cdot \begin{vmatrix} x & \mu_0 N i \\ r^2\pi & 0 \end{vmatrix} = \frac{\mu_0 N i \cdot \frac{r}{2d}}{x + \frac{\Delta r}{2d}}$

$$W_m = \int_{V_1} \frac{B_1^2}{2\mu_0} dV + \int_{V_2} \frac{B_2^2}{2\mu_0} dV = \frac{B_1^2}{2\mu_0} V_1 + \frac{B_2^2}{2\mu_0} V_2 = \frac{1}{2\mu_0} \cdot \frac{(\mu_0 N i)^2}{\left(x + \frac{\Delta r}{2d}\right)^2} \cdot \underbrace{\left[x \cdot r^2\pi + \left(\frac{r}{2d}\right)^2 \cdot 2r\pi d\Delta \right]}_{r^2\pi \cdot \left(x + \frac{\Delta r}{2d}\right)} =$$

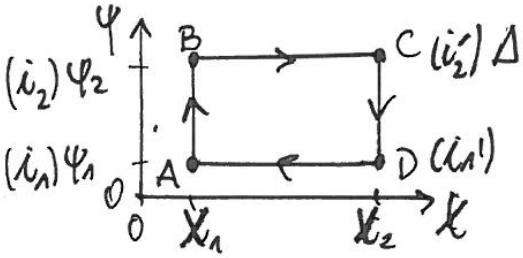
$V_1 = x \cdot r^2\pi \qquad V_2 = 2r\pi d\Delta$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0 N^2 i^2}{\left(x + \frac{\Delta r}{2d}\right)^2} \cdot r^2\pi =$$

$$= \underbrace{\mu_0 N^2 \frac{2r\pi d}{\Delta}}_{L_0} \cdot \frac{i^2}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x}{\frac{\Delta r}{2d}}} = \underbrace{\frac{i^2}{2} \cdot L_0 \cdot \frac{1}{1 + \frac{x}{a}}}_{\text{identisch mit Lagrange-Ergebnis}} = W_m$$



$i_1 \to i_2 \gtrless i_1 \to i_2' \gtrless i_2 \to i_1' < i_2' \to i_1 < i_1'$



$\Delta W_{k\,AB}^{*}\Big|_{x=\text{konst.}(=x_1)} = \frac{\Psi_2^2-\Psi_1^2}{2L_0}\cdot\left(1+\frac{x_1}{a}\right) = \Delta W_{k\,AB}^{*} \Rightarrow$ Erhöhung der magn. Energie $\Delta W_{m\,AB} > 0$

$\Delta A_{BC} = \int_{x_1}^{x_2} F\,dx\Big|_{\Psi=\Psi_2} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\Psi_2^2}{2aL_0}\,dx = (x_2-x_1)\cdot\frac{\Psi_2^2}{2aL_0}$ Arbeit gegen die Magnetkraft

$W_k^{*} = L_0\frac{i^2}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{a}} = \frac{\Psi^2}{2L_0}\cdot\left(1+\frac{x}{a}\right)$

$\Delta W_{k\,CD}^{*}\Big|_{x=x_2} = \frac{\Psi_1^2-\Psi_2^2}{2L_0}\cdot\left(1+\frac{x_2}{a}\right) \Rightarrow$ Abnahme der magn. Energie: $\Delta W_{m\,CD} < 0$

$\Delta A_{DA} = \int_{x_2}^{x_1} F\,dx\Big|_{\Psi=\Psi_1} = \int_{x_2}^{x_1} \frac{\Psi_1^2}{2aL_0}\cdot dx = (x_1-x_2)\cdot\frac{\Psi_1^2}{2aL_0} < 0$: Magnetkraft leistet Arbeit

Es wird während B→C mehr Arbeit von außen zugeführt, als während D→A vom System selbst geleistet wird: $\Delta A_{BC}+\Delta A_{DA} = (x_2-x_1)\frac{\Psi_2^2}{2aL_0} - (x_2-x_1)\frac{\Psi_1^2}{2aL_0} =$

$= (x_2-x_1)\frac{\Psi_2^2-\Psi_1^2}{2aL_0} > 0$

Diese Arbeit wird der Stromquelle i zugeführt, denn von der Stromquelle wurde geleistet:

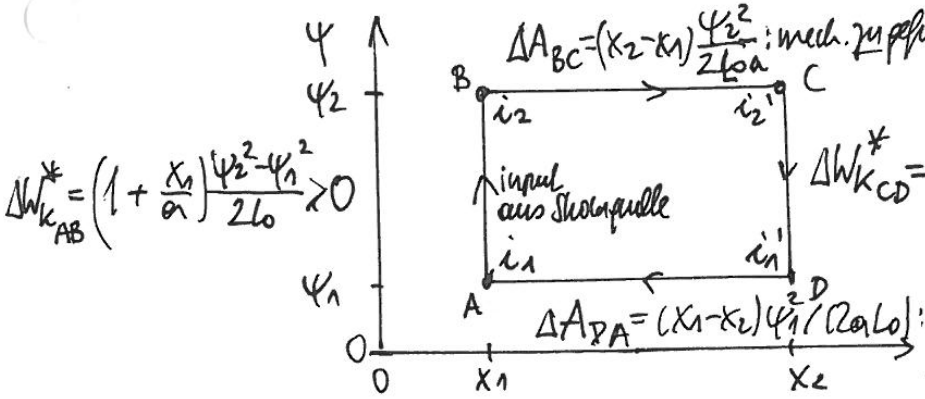
$$\Delta W^*_{k_{AB}} + \Delta W^*_{k_{CD}} = \frac{\psi_2^2-\psi_1^2}{2L_0}\cdot\left(1+\frac{x_1}{a}\right) + \frac{\psi_1^2-\psi_2^2}{2L_0}\cdot\left(1+\frac{x_2}{a}\right) = -\frac{\psi_2^2-\psi_1^2}{2L_0}\cdot\frac{x_2-x_1}{a} < 0$$

Während B→C erfolgte wegen ψ_2 = konst. eine Stromerhöhung $i_2 \to i_2' > i_2$:

$$\psi_2 = \frac{L_0 i_2}{1+\frac{x_1}{a}} = \frac{L_0 i_2'}{1+\frac{x_2}{a}} \Rightarrow \Delta W_{m_{BC}} = \frac{\psi_2^2}{2L_0}\cdot\left(1+\frac{x_2}{a}-1-\frac{x_1}{a}\right) = \frac{\psi_2^2}{2L_0}\left(\frac{x_2-x_1}{a}\right)$$: Erhöhung der magn. Energie

Während D→A erfolgte wegen ψ_1 = konst. eine Stromabsenkung: $i_1' \to i_1 < i_1'$

$$\psi_1 = \frac{L_0 i_1'}{1+\frac{x_2}{a}} = \frac{L_0 i_1}{1+\frac{x_1}{a}} \Rightarrow \Delta W_{m_{DA}} = \frac{\psi_1^2}{2L_0}\cdot\left(1+\frac{x_1}{a}-1-\frac{x_2}{a}\right) = -\frac{\psi_1^2}{2L_0}\cdot\left(\frac{x_2-x_1}{a}\right)$$: Absenkung der magn. Energie



$\Delta A_{BC} = (x_2-x_1)\frac{\psi_2^2}{2L_0 a}$: mech. zugeführte Arbeit erhöht magn. Energie $\Delta W_{m_{BC}}$

$\Delta W^*_{k_{AB}} = \left(1+\frac{x_1}{a}\right)\frac{\psi_2^2-\psi_1^2}{2L_0} > 0$

$\Delta W^*_{k_{CD}} = \frac{\psi_1^2-\psi_2^2}{2L_0}\cdot\left(1+\frac{x_2}{a}\right) < 0$: Lieferung an Stromquelle aus erhöhter magn. Energie

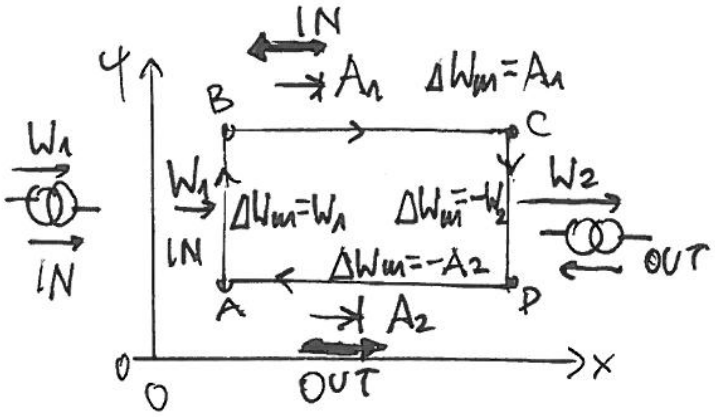
$\Delta A_{DA} = (x_1-x_2)\psi_1^2/(2aL_0)$: Arbeit am externen mech. System, weitere Absenkung der magn. Energie $\Delta W_{m_{DA}}$

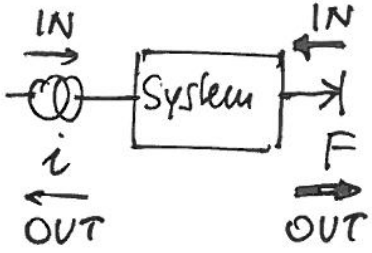
$\Delta A_{BC} + \Delta A_{DA} = (x_2 - x_1) \frac{\psi_2^2 - \psi_1^2}{2 a L_0}$: vom externen System zugeführte Arbeit, um

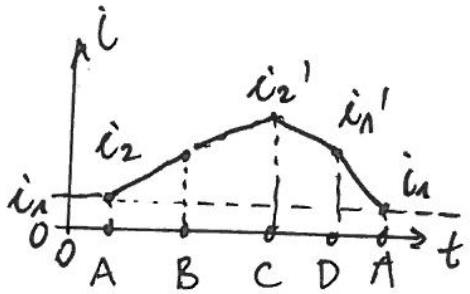
der Stromquelle als $\Delta W_{kAB} + \Delta W_{mBC} + \Delta W_{kCD} + \Delta W_{mDA} \stackrel{!}{=} (\Delta A_{BC} + \Delta A_{DA}) =$

$= - (x_2 - x_1)(\psi_2^2 - \psi_1^2)/(2 a L_0)$ gespeichert

Die mechanische Arbeit „Herausziehen" des Ankers bei großem Feld (= gegen große Magnetkraft) und „Hineinziehen-Lassen" bei kleinem Feld (= mit kleiner Magnetkraft) ergibt netto eine mechanisch zugeführte Arbeit, die über das magnetische System als magn. Energie der Stromquelle zugeführt wird.







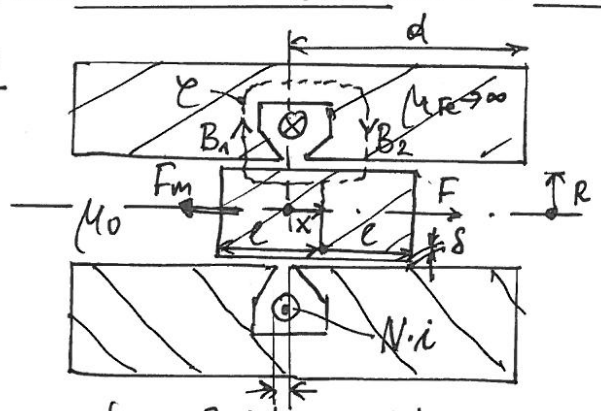
- Totale Änderung der magn. Energie im Zyklus ABCDA: $\Delta W_m = W_1 + A_1 - W_2 - A_2 = 0$
- Von der Stromquelle zugeführt dem System: $W_1 - W_2 < 0$ = der Stromquelle netto zugeführt
- Von der externen Kraft zugeführt dem System: $A_1 - A_2 > 0$: $A_1 - A_2 = -(W_1 - W_2) > 0$ =
  = VON der Kraft über das Kopplersystem der Stromquelle zugeführt

Zur Frage des korrekten Feldbilds für die Magnetkraft-Berechnung (gilt analog auch für elektrische Felder):

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Zur Frage des korrekten Feldbilds bei der Kraftberechnung:

Beispiel:



$b \ll l, \; -(l-\frac{b}{2}) \le x \le l-\frac{b}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \; -l \le x \le l$

$2l < d$

$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \delta H_1 + \delta H_2 = Ni$

$B_1 = \mu_0 H_1, \; B_2 = \mu_0 H_2$

$\Phi = 2R\pi (l-x) B_1 = 2R\pi (l+x) B_2$

$$\begin{pmatrix} \delta & \delta \\ 2R\pi(l-x) & -2R\pi(l+x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_0 Ni \\ 0 \end{pmatrix}$$

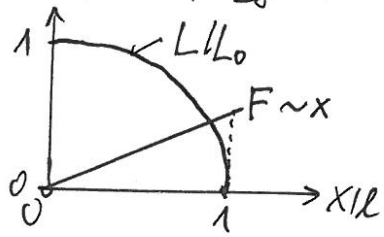
$\mathcal{M}$

$$B_1 = \frac{1}{\det(\mathcal{M})} \cdot \begin{vmatrix} \mu_0 Ni & \delta \\ 0 & -2R\pi(l+x) \end{vmatrix} = \frac{-\mu_0 Ni \, 2R\pi(l+x)}{\delta 2R\pi(-l-x-l+x)}$$

$B_1 = \frac{\mu_0 Ni}{2\delta} \cdot \left(1+\frac{x}{l}\right), \; B_2 = \frac{\mu_0 Ni}{2\delta} \cdot \left(1-\frac{x}{l}\right)$

$L = \frac{\Psi}{i} = \frac{1}{i} 2R\pi(l-x) B_1 =$

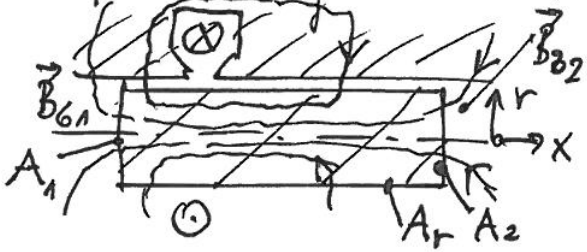
$= \underbrace{\mu_0 N^2 \frac{R\pi l}{\delta}}_{L_0} \cdot \left(1-\left(\frac{x}{l}\right)^2\right) = L_0 \cdot \left(1-\left(\frac{x}{l}\right)^2\right) = L(x)$



$W_k^* = L(x) \cdot i^2/2, \; F = -\frac{\partial W_k^*}{\partial x} = 2 \cdot x \cdot \mu_0 N^2 \cdot \frac{R\pi}{\delta l}$

ziehende Kraft für gleichgewicht $\Rightarrow F_m = F$

Kraftberechnung über Maxwell-Spannungen muss Streufeld berücksichtigen!



$$F_r = \int_{A_r} \sigma_r \cdot dA = \int_{A_{r1}} B_1^2 \frac{1}{2\mu_0} dA + \int_{A_{r2}} B_2^2 \frac{1}{2\mu_0} dA = 0$$

A_{r1}: $B_{\sigma 1} \sim B_1 \sim 1 + \frac{x}{\ell}$ — $A_{r1} = (\ell - x) 2R\pi$ — $\rightarrow 0$

A_{r2}: $B_{\sigma 2} \sim B_2 \sim 1 - \frac{x}{\ell}$ — $A_{r2} = (\ell + x) 2R\pi$ — $\rightarrow 0$

$B_{\sigma 1} > B_{\sigma 2}$

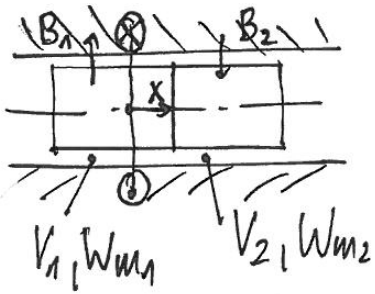
$$F_x = \int_{A_1} B_{\sigma 1}^2 \frac{1}{2\mu_0} dA - \int_{A_2} B_{\sigma 2}^2 \frac{1}{2\mu_0} dA > 0, \quad B_{\sigma 1} > B_{\sigma 2}$$

Gleichgewicht:

$F_x = F_m \longleftarrow o \longrightarrow F$

$F_x = F_m$

Obwohl W_k^* nicht B_δ erfasst, wird F „richtig" berechnet, denn über $F = -\partial W_k^*/\partial x$ wird berücksichtigt, dass $W_{m1} > W_{m2}$ ist auch bei rein radialem Feld B_1, B_2. Daraus ergibt sich F_m nach links.



$$W_{m1} = \frac{B_1^2}{2\mu_0} V_1 \sim (l+x)^2(l-x)$$
$$W_{m2} = \frac{B_2^2}{2\mu_0} V_2 \sim (l-x)^2(l+x)$$

$W_{m1} > W_{m2}$, denn $(l+x)^2(l-x) > (l-x)^2(l+x)$

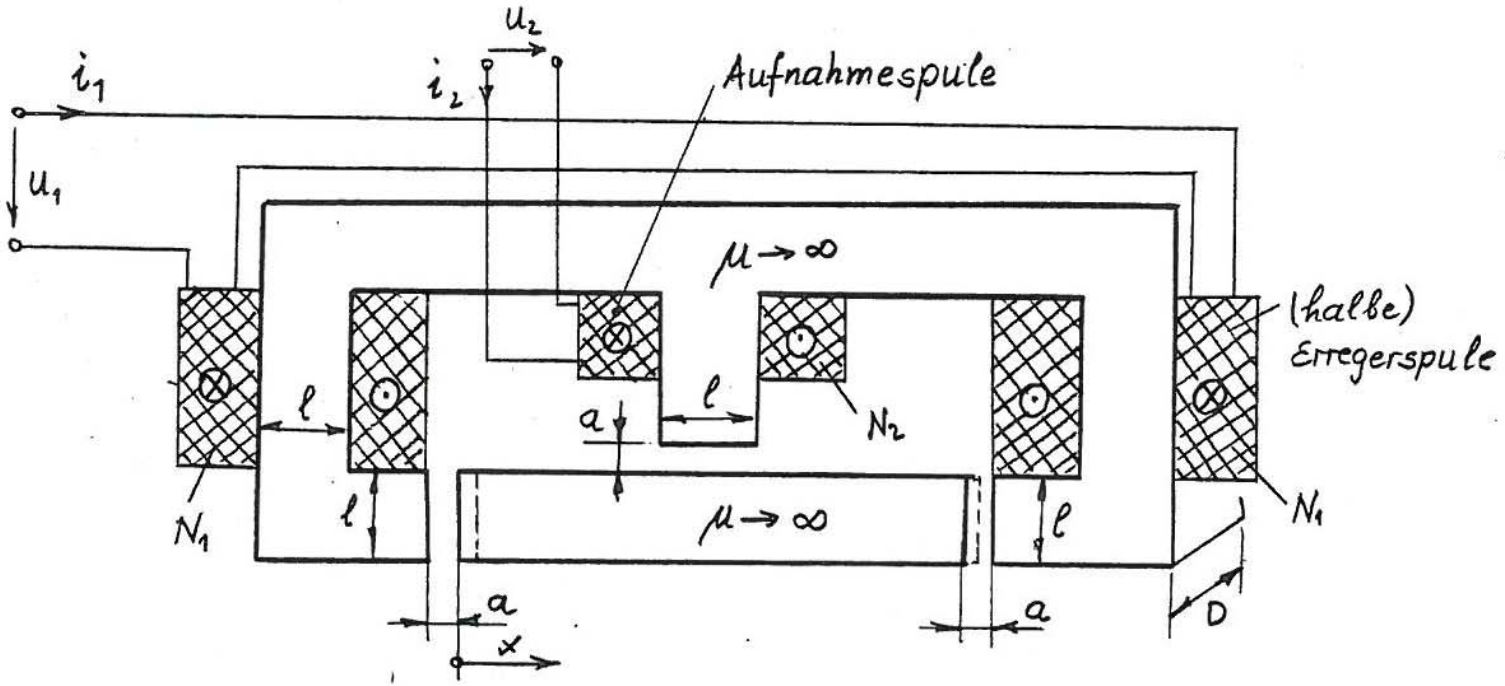
$l+x > l-x$!

$V_1 = 2R\pi\delta(l-x) \quad V_2 = 2R\pi\delta(l+x)$

Bei Berücksichtigung von B_δ ergibt sich wegen $B_{\delta 1} > B_{\delta 2}$ und $W_{m1\delta} \sim B_{\delta 1}^2$, $W_{m2\delta} \sim B_{\delta 2}^2$ dann falls $W_{m1} + W_{m1\delta} > W_{m2} + W_{m2\delta}$ für $0 \le x \le l$.

Kraft aus $\partial W_k^*/\partial x = \partial W_m/\partial x$. Da $\partial W_m/\partial x \approx (\partial W_m + \partial W_{m\delta})/\partial x$ bei virtueller Verschiebung δx, stimmt das Ergebnis der Kraftberechnung aus der virtuellen Verschiebung selbst bei B_δ-Vernachlässigung in etwa mit der Kraftformel aus den Maxwell-Spannungen.

6)



Die Skizze zeigt das Modell eines Differentialwandlers zur Aufnahme kleiner mechanischer Verschiebungen. Der bewegliche Teil ist in x-Richtung verschiebbar.

a) Berechnen Sie die Flußverkettungen für die Erregerspule und für die Aufnahmespule $[\Psi_1(i_1, i_2; x),\ \Psi_2(i_1, i_2; x)]$.

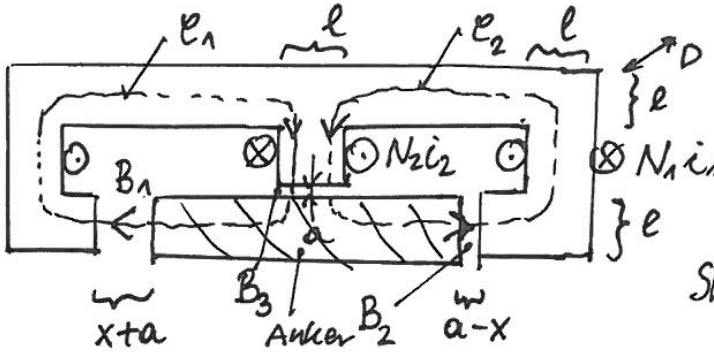
b) Die Erregerspule werde durch eine Stromquelle mit $i_1 = \hat{I}_1 \cos \omega t$ gespeist, das System arbeite im eingeschwungenen Zustand. Berechnen Sie die Amplitude und den Phasenwinkel der induzierten Spannung u_2 als Funktion der Verschiebung x, $-a < x < a$

Lösung:

a) $\Psi_1 = \frac{L_0}{3-(x/a)^2}\left(3\frac{N_1}{N_2} i_1 + \frac{x}{a} i_2\right)$, $\Psi_2 = \frac{L_0}{3-(x/a)^2}\left(\frac{x}{a} i_1 + \frac{N_2}{N_1} i_2\right)$, $L_0 = 2\mu_0 \frac{\ell}{a} D N_1 N_2$

b) $\hat{U}_2 = \underline{Z}\, \hat{I}_1$, $Z = \frac{|x/a|}{3-(x/a)^2}\omega L_0$, $\arg \underline{Z} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \frac{x}{a}$

Lösung: Aufgabe 6)



$0 \le x \le a$

Streuflüsse vernachlässigt

$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = N_2 i_2 - N_1 i_1 =$

$e_1 = \frac{B_3}{\mu_0} a + \frac{B_1}{\mu_0}(x+a)$

$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = N_2 i_2 + N_1 i_1 =$

$e_2 = \frac{B_3}{\mu_0} a + \frac{B_2}{\mu_0}(a-x)$

Gesamtfluss auf Anker $= 0$: $l \cdot D \cdot (B_1 + B_2 - B_3) = 0$

Achtung: Dritter Maschenumlauf $\oint_e \vec{H} \cdot d\vec{s} = -\frac{B_1}{\mu_0}(x+a) + \frac{B_2}{\mu_0}(a-x) = 2 N_1 i_1$ ist redundant!

$$\begin{pmatrix} x+a & 0 & a \\ 0 & a-x & a \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_0 (N_2 i_2 - N_1 i_1) \\ \mu_0 \cdot (N_2 i_2 + N_1 i_1) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_0 \Theta_1 \\ \mu_0 \Theta_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

M

$$B_1 = \frac{1}{\mathrm{Det}(M)} \cdot \begin{vmatrix} \mu_0 \Theta_1 & 0 & a \\ \mu_0 \Theta_2 & a-x & a \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{x^2 - 3a^2} \cdot \left[\mu_0 \Theta_1 (a-x)(-1) + \mu_0 \Theta_2 \cdot a - \mu_0 \Theta_1 a \right]$$

$$\mathrm{Det}(M) = (a+x)(a-x)(-1) - a(a-x) - a(a+x) = -(a^2 - x^2) - 2a^2 = x^2 - 3a^2$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 \cdot [N_1 i_1 (3a - x) + N_2 i_2 \cdot (x - a)]}{x^2 - 3a^2}, \quad B_2 = \frac{1}{x^2 - 3a^2} \cdot \begin{vmatrix} x+a & \mu_0 \textcircled{4}_1 & a \\ 0 & \mu_0 \textcircled{4}_2 & a \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{(x+a)\mu_0 \textcircled{4}_2 (-1) + \mu_0 \textcircled{4}_1 a - \mu_0 \textcircled{4}_2 a}{x^2 - 3a^2}$$

$$B_3 = B_1 + B_2 \Rightarrow$$

$$B_3 = -\frac{2\mu_0}{x^2 - 3a^2} \cdot (x \cdot N_1 i_1 + a \cdot N_2 i_2)$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 \cdot [-N_1 i_1 \cdot (3a + x) - N_2 i_2 \cdot (x + a)]}{x^2 - 3a^2}$$

Sonderfall: $i_2 = 0, x = 0: B_1 = -B_2 = -\frac{\mu_0 N_1 i_1}{a}, B_3 = 0$

$i_2 = 0, x \neq 0: B_3 \sim \frac{-x}{x^2 - 3a^2} \approx \frac{x}{3a^2}$

$x \ll \sqrt{3} \cdot a$

Fazit: Über B_3, das in N_2 eine Spannung induziert, wenn $x(t)$ sich ändert, während $i_1 =$ konst. ist, kann direkt $x \sim B_3 \sim u_{i2}$ gemessen werden.

$$\Psi_1(i_1, i_2, x) = N_1 \cdot (-B_1) \ell D + N_1 \cdot B_2 \ell D = N_1 \ell D (B_1 - B_2) = \frac{N_1 \ell D \mu_0}{x^2 - 3a^2} \cdot [N_1 i_1 \cdot (-6a) + N_2 i_2 [-2x]] =$$

$$= \underbrace{\mu_0 \frac{2 \ell D N_1 N_2}{a}}_{L_0} \cdot \frac{\left[3 \frac{N_1}{N_2} i_1 + \frac{x}{a} i_2\right]}{3 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

$$\Psi_2(i_1, i_2, x) = N_2 \cdot B_3 \ell \cdot D = N_2 \ell D \cdot \frac{(+2\mu_0)/a}{3 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \cdot \left(\frac{x}{a} \cdot N_1 i_1 + N_2 i_2\right) = \underbrace{\mu_0 \frac{2 \ell D N_1 N_2}{a}}_{L_0} \cdot \frac{\left(\frac{x}{a} i_1 + \frac{N_2}{N_1} i_2\right)}{3 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

Fazit: Wird $i_1 = \hat{I}_1 \cos \omega t$ eingeprägt, so kann über die induzierte Spannung $\hat{U}_{i2}$ eine konstante Verschiebung x gemessen werden.

Leerlaufende Spule N_2: $i_2 = 0$: $u_2 + u_{i2} = i_2 R_2 = 0 \Rightarrow u_2 = -u_{i2} = -\left(-\frac{d\psi_2}{dt}\right) = \frac{d\psi_2}{dt} = u_{20}$

$$\underline{\hat{U}}_{20} = j\omega \underline{\hat{\Psi}}_2 = \underbrace{j\omega L_0 \cdot \frac{(x/a)}{3-(\frac{x}{a})^2}}_{\underline{Z}} \cdot \underline{\hat{I}}_1$$

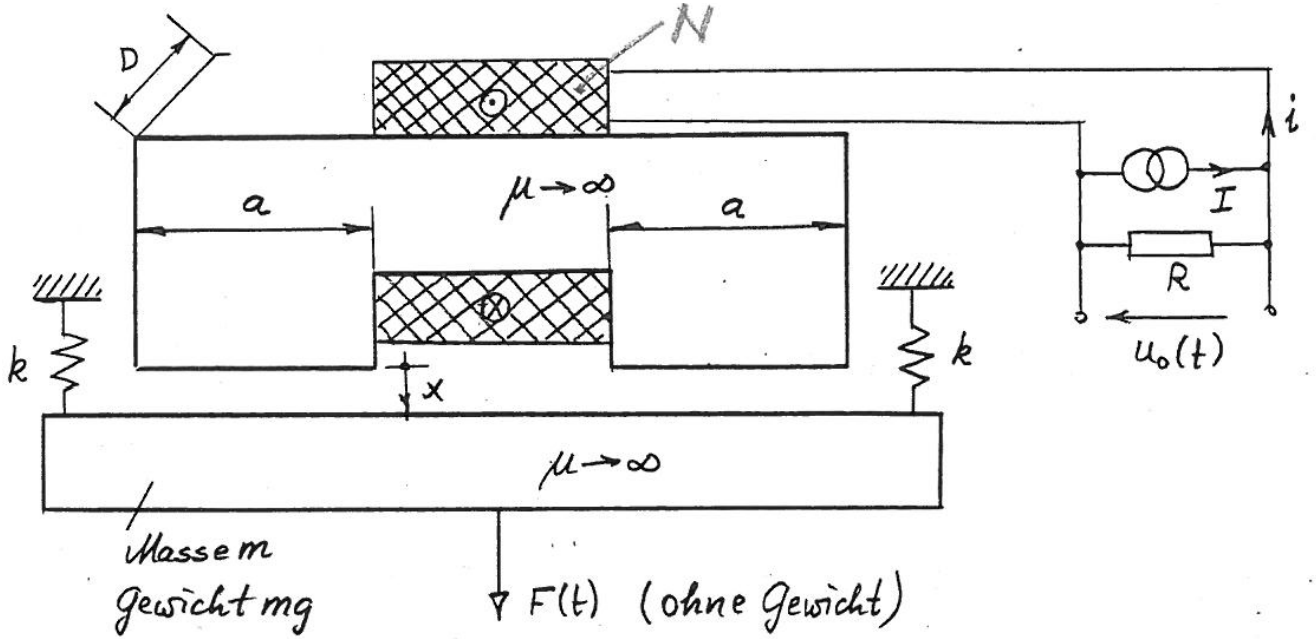
$$\underline{\hat{I}}_1 \Leftrightarrow Re\{\underline{\hat{I}}_1 e^{j\omega t}\} = Re\{\hat{I}_1 e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t}\} \Big|_{\varphi=0} = \hat{I}_1 \cdot \cos\omega t$$

$$|\underline{Z}| = \omega L_0 \cdot \frac{|x|/a}{3-(\frac{x}{a})^2}, \quad \arg(\underline{Z}) = \frac{\pi}{2} \cdot \mathrm{sgn}(x)$$

$-a \le x \le a$

$$\hat{U}_{20} = Z \cdot \hat{I}_1 \sim |x|, \quad |x| \ll a \cdot \sqrt{3}$$

7)



Modell eines Übertragungssystems: Eine Kraft $F(t)$ soll in ein elektrisches Signal $u_o(t)$ umgewandelt werden, das am Widerstand R abfällt. Das System soll in der Umgebung einer Gleichgewichtslage ($F=0$) bei Erregung mit konstantem Strom I linear arbeiten. Der bewegliche Teil ist an zwei Federn aufgehängt, die für $x=0$ entspannt sind.

a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen des Systems auf (zwei Gleichungen für i, x).

b) Bestimmen Sie eine Gleichgewichtslage $x = x_0$ für gegebenen Strom I und $F(t) = 0$. Untersuchen Sie die statische Stabilität. Die Bewegungsgleichungen sind anschließend um die stabile Gleichgewichtslage zu linearisieren.

c) Der Widerstand R wird so groß gewählt, daß der Spannungsabfall über R wesentlich größer als die Selbstinduktionsspannung der Spule ist. Damit wird die elektrische Gleichung vereinfacht. Sei nun $F(t) = \mathrm{Re}\{\hat{F} e^{j\omega t}\}$, $u_0(t) = \mathrm{Re}\{\underline{\hat{u}}_0 e^{j\omega t}\}$. Bestimmen Sie $\underline{\hat{u}}_0/\hat{F}$.

Lösung:

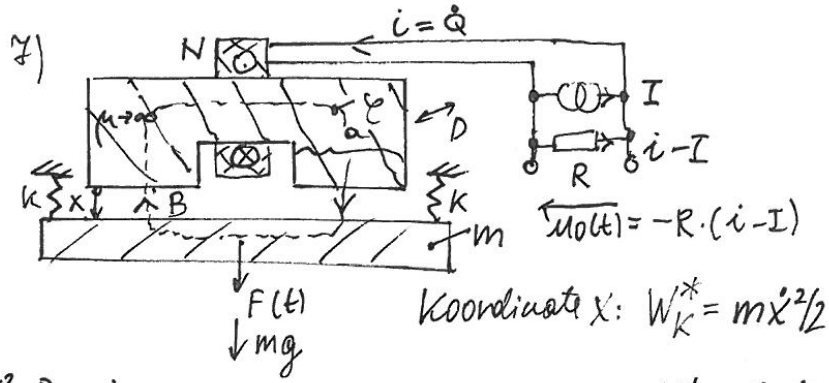
a) $m\ddot{x} + \frac{l_0 i^2}{2x^2} + 2kx = F + mg$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{l_0 i}{x}\right) + R(i - I) = 0$, $l_0 = \mu_0 N^2 \frac{aD}{2}$

b) Skizze! Stat. stab. x_0 ist größte reelle (pos.) Wurzel der kubischen Gleichung

$$2k x_0^3 - mg x_0^2 + l_0 I^2/2 = 0$$

c) $\underline{\hat{u}}_0/\hat{F} = j\omega \frac{l_0 I}{m x_0^2} \Big/ \left[\omega^2 - j\omega \left(\frac{l_0 I}{x_0^2}\right)^2 \frac{1}{Rm} + \frac{l_0 I^2}{m x_0^3} - \frac{2k}{m}\right]$

Lösung: Aufgabe 7)



$\oint \vec{H}\cdot d\vec{s} = 2\frac{B}{\mu_0}x = N\cdot i$

$B = \frac{\mu_0 N i}{2x}$

$\Psi = N\cdot B\cdot a\cdot D =$

$= \frac{\mu_0 N^2 a D}{2x}\cdot i = \underbrace{\frac{\mu_0 N^2 a D}{2}}_{l_0}\cdot\frac{i}{x}$ $\quad \eta = 2 : X, Q$

Koordinate x: $W_K^* = m\dot{x}^2/2 + \frac{l_0}{x}\cdot\frac{i^2}{2}$

$W_p = 2\cdot\frac{k}{2}\cdot x^2$ $\quad (x - x_0 = x,$ entspannt bei $x_0 = 0)$

a):

(1) $m\ddot{x} + \frac{l_0}{x^2}\cdot\frac{i^2}{2} + 2kx = F(t) + m\cdot g$

$\Leftarrow \begin{cases} \frac{\partial W_K^*}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \frac{\partial W_K^*}{\partial x} = -\frac{l_0}{x^2}\cdot\frac{i^2}{2}, \frac{\partial W_p}{\partial x} = 2kx \\ \delta A = F\cdot\delta x + m\cdot g\cdot\delta x \end{cases}$

Koordinate Q: $\frac{\partial W_K^*}{\partial \dot{Q}} = \frac{l_0}{x}\cdot i, \frac{\partial W_K^*}{\partial Q} = 0, \frac{\partial W_p}{\partial Q} = 0$

$\delta A = 0, \delta V = R\cdot(i - I)\cdot\delta Q$

$(\delta Q = i\,\delta t$, I: eingeprägt)

I: wird bei $\delta\ldots$ nicht erfasst

(2) $\frac{d}{dt}\left(\frac{l_0}{x}i\right) + R\cdot(i - I) = 0$ $\quad \Leftarrow$ { }

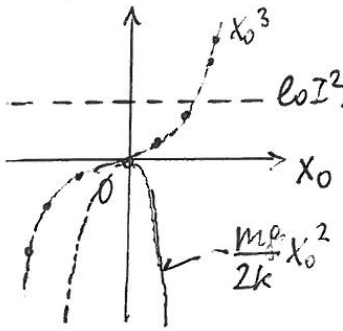
b): Gleichgewicht bei $F(t) = 0$: $\frac{d}{dt}\ldots = 0 \Rightarrow \ddot{x} = 0, \dot{x} = 0$

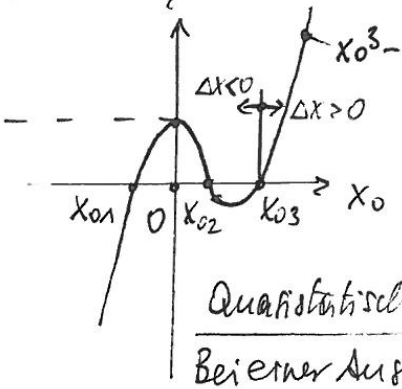
„mechan. Gleichgewicht"

(1)': $\frac{l_0}{x_0^2}\cdot\frac{i^2}{2} + 2kx_0 = mg$ $\quad$ (2)': $R\cdot(i - I) = 0 \Rightarrow i = I$, $\frac{l_0 I^2}{x_0^2\cdot 2} + 2kx_0 = mg$

$2kx_0^3 - mg\cdot x_0^2 + l_0 I^2/2 = 0 \qquad x_0^3 - \frac{mg}{2k}x_0^2 + \frac{l_0 I^2}{4k} = 0 \quad (3)$

Sonderfall: $I=0$: $x_0 = \frac{mg}{2k}$: Masse hängt in den beiden Federn





Magnetkraft F_M Federkraft F_F

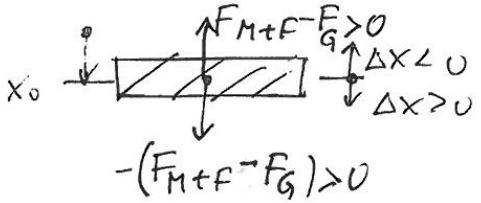
$x_0^3 - \frac{mg}{2k}\cdot x_0^2 + \frac{l_0 I^2}{4k} := \frac{l_0 I^2}{x_0^2} + 2kx_0 - mg$ Gravitation F_G

$x_{01}<0$: unphysikalisch, $x_0>0$!

$x_{02}, x_{03}>0$: Welche Lage ist stabil?

Quasistatische Stabilität bzgl. x, wenn $i=I$:

Bei einer Auslenkung Δx aus x_0 für $\Delta x>0$ muß eine nach oben gerichtete Rückstellkraft $-F_G + F_M + F_F > 0$ wirken, bei $\Delta x<0$ muß $-F_G + F_{M+F} < 0$ sein.



Bei x_{02}: $\Delta x<0$: $F_{M+F}-F_G>0$: INSTABIL

$\Delta x>0$: $F_{M+F}-F_G<0$: INSTABIL

Bei x_{03}: $\Delta x<0$: $F_{M+F}-F_G<0$: STABIL

$\Delta x>0$: $F_{M+F}-F_G>0$: STABIL

Fazit: Die größte positive Wurzel von (3) ist die stabile Gleichgewichtslage.

$$x_0 = x_{03}$$

Dynamisches Verhalten im Gleichgewicht bei kleinen Änderungen:

$x(t) = x_0 + \Delta x(t)$, $i(t) = I + \Delta i(t)$, $\frac{\Delta x}{x_0} \ll 1$, $\frac{\Delta i}{I} \ll 1 \Rightarrow \xi(t) \ll 1$, $\eta(t) \ll 1$

$\frac{x(t)}{x_0} = 1 + \frac{\Delta x}{x_0} = 1 + \xi$, $\frac{i(t)}{I} = 1 + \frac{\Delta i}{I} = 1 + \eta$

(1)'' $m\frac{\ddot{x}}{x_0} + \frac{l_0}{(x/x_0)^2}\cdot\frac{1}{x_0^2}\cdot\left(\frac{i}{I}\right)^2 \cdot I^2 \cdot \frac{1}{2} + 2k\frac{x}{x_0} = \frac{F + mg}{x_0}$ (2)'' $\frac{d}{dt}\left(\frac{l_0}{x/x_0}\cdot\frac{1}{x_0}\cdot\frac{i}{I}\right) + R\cdot\left(\frac{i}{I} - 1\right) = 0$

$m\left(\underbrace{\ddot{1}}_{=0} + \ddot{\xi}\right) + \frac{l_0}{(1+\xi)^2}\cdot\frac{1}{x_0^3}\cdot(1+\eta)^2\cdot\frac{I^2}{2} + 2k(1+\xi) = \frac{F}{x_0} + \frac{mg}{x_0}$ $\frac{d}{dt}\left(\frac{l_0}{1+\xi}\frac{1}{x_0}(1+\eta)\right) + R\cdot\eta = 0$

Gleichgewichtsbedingungen kürzen sich: $\frac{l_0}{x_0^2}\cdot\frac{1}{x_0}\cdot\frac{I^2}{2} + 2k = \frac{mg}{x_0}$)

mit $\xi^2, \eta^2, \xi\cdot\eta \ll 1 \Rightarrow$, $m\ddot{\xi} + \frac{l_0 I^2}{2}\cdot\frac{1}{x_0^3}\cdot(1 - 2(\xi - \eta)) + 2k + 2k\xi = \frac{F}{x_0} + \frac{mg}{x_0}$

$\frac{1}{(1+\xi)^2}(1+\eta)^2 \simeq 1 - 2(\xi - \eta)$

$\frac{1+\eta}{1+\xi} \simeq 1 + \eta - \xi$

$m\ddot{\xi} - \frac{l_0 I^2}{x_0^3}\cdot(\xi - \eta) + 2k\xi = \frac{F(t)}{x_0}$ (3) $F(t)$: kleine Störkraft

$\frac{d}{dt}\left[\frac{l_0}{x_0}\cdot(1 + \eta - \xi)\right] + R\cdot\eta = 0 \Rightarrow \dot{\eta} - \dot{\xi} + \frac{x_0}{l_0}R\eta = 0$ (4)

Stabilitätsuntersuchung: $\dot{\eta} + \frac{x_0}{\ell_0} R \cdot \eta = \dot{\xi}$ → homogene Differentialgleichung: Störung $\Delta\eta_0 = \eta(0)$

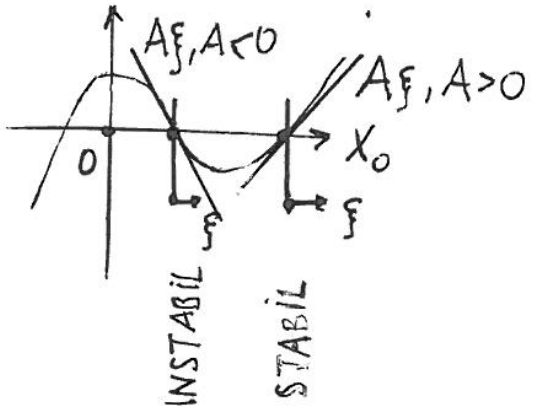
$x_0 > 0$: $\dot{\eta} + \underbrace{\frac{x_0}{\ell_0}}_{>0} R\eta = 0$: $\eta(t) = \Delta\eta_0 \cdot e^{-\frac{x_0}{\ell_0} Rt}$ klingt ab = elektrisch stabil

$$m\ddot{\xi} + \left(2k - \frac{\ell_0 I^2}{x_0^3}\right) f = \frac{F(t)}{x_0} - \frac{\ell_0 I^2}{x_0^3}\eta$$ → homogene DGL: Störung $\Delta f_0 = f(0)$

$$\ddot{\xi} + \underbrace{\frac{2k - \frac{\ell_0 I^2}{x_0^3}}{m}}_{A} \cdot f = 0 \Rightarrow f(t) = \Delta f_0 (\sin\omega_0 t + \cos\omega_0 t) = \Delta f_0 \cdot \cos\omega_0 t$$

$A > 0$, damit stabil

$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k - \ell_0 I^2/x_0^3}{m}}$ Schwingt ungedämpft, aber stabil



bei $A < 0$: $f(t) = \Delta f_0 \cdot \left[e^{\sqrt{A'}t} + e^{-\sqrt{A'}\cdot t} \right] \cdot \frac{1}{2}$

$A' = -A > 0$ $\quad e^{\sqrt{A'}\cdot t} \to \infty,\ t \to \infty$: INstabil

© : $m\Delta\ddot{x} - \frac{\ell_0 I^2}{x_0^3}\cdot\Delta x + 2k\cdot\Delta x + \frac{\ell_0 I^2}{x_0^2}\cdot\frac{\Delta i}{I} = F(t)$ (3)'

$u_0(t) = -R(i-I) = -R\cdot\Delta i(t)$

$\Delta\dot{i} - \Delta\dot{x}\cdot\frac{I}{x_0} + \frac{x_0}{\ell_0}R\Delta i = 0$ (4)' mit $\frac{\ell_0}{x_0}\Delta\dot{i} \ll R\Delta i \Rightarrow -\Delta\dot{x}\frac{I}{x_0} + \frac{x_0}{\ell_0}R\Delta i = 0$

$\Delta x(t) = Re\{\Delta\hat{x}\, e^{j\omega t}\}$, $\Delta i(t) = Re\{\Delta\hat{i}\, e^{j\omega t}\} \Rightarrow +j\omega\Delta\hat{x}\cdot\frac{I}{x_0^2}\cdot\ell_0 = -\hat{U}_0$ ($-u_0$)

und $j\omega\Delta\hat{x}\cdot\frac{I}{x_0^2}\frac{\ell_0}{R} = \Delta\hat{i}$

$-m\omega^2\Delta\hat{x} + \left(2k - \frac{\ell_0 I^2}{x_0^3} + \frac{\ell_0 I^2}{x_0^2}\cdot j\omega\frac{\ell_0}{Rx_0^2}\right)\cdot\Delta\hat{x} = \hat{F}$

$Re\{\hat{F}e^{j\omega t}\} = F(t)$

$u_0(t) = Re\{\hat{U}_0 e^{j\omega t}\}$

$\hat{U}_0 = -j\omega\frac{I\ell_0}{x_0^2}\cdot\frac{\hat{F}}{-m\omega^2 + 2k - \frac{\ell_0 I^2}{x_0^3} + j\omega\left(\frac{\ell_0 I}{x_0^2}\right)^2\cdot\frac{1}{R}}$

$\frac{\hat{U}_0}{\hat{F}} = j\omega\frac{\ell_0 I}{mx_0^2}\Big/\left[\omega^2 - j\omega\left(\frac{\ell_0 I}{x_0^2}\right)^2\cdot\frac{1}{Rm} + \frac{\ell_0 I^2}{mx_0^3} - \frac{2k}{m}\right]$