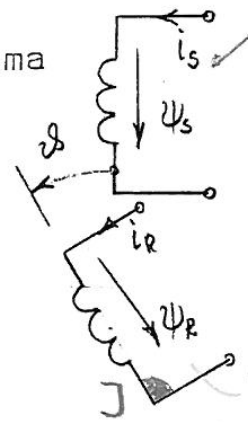
1.10. Stationäre Zustände. Rotierende magnetische Wandlersysteme

1.10.1. Grundsystem

Schema



STATOR (steht fest)

Rotor (dreht sich)

Der magnetische Kreis enthält i.a. Eisenteile

Flußverkettungen:

$$\left.\begin{aligned}\psi_s &= \psi_s(i_s, i_R; \vartheta)\\ \psi_R &= \psi_R(i_s, i_R; \vartheta)\end{aligned}\right\}$$

2-Wicklungs-maschine (3 Wicklungen im Ständer oder 2: analog) dann keine Pulsationen

kinet. Ergänzungsenergie:

$$W_k^*(i_s, i_R; \vartheta) = \underbrace{\int_0^1 \left[\psi_s(\theta i_s, \theta i_R; \vartheta) i_s + \psi_R(\theta i_s, \theta i_R; \vartheta) i_R\right] d\theta}_{W_k^m} + \frac{1}{2} J \dot{\vartheta}^2 + \underline{W_{k0}^*(\vartheta)}$$

Remanenz ($i_s, i_R = 0$) (hier nicht betrachtet)

Reines Wandlersystem mit eingeprägten Strömen:

$n = 1: \vartheta; \quad \delta A = M \delta\vartheta \qquad (i_s, i_R = \text{const.})$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{\vartheta}}\right) - \frac{\partial W_k^*}{\partial \vartheta} = M \quad : \quad J\ddot{\vartheta} = M_e + M,$$

$\underline{M_e = \partial W_k^m / \partial \vartheta}$ ... elektromechanisch erzeugtes Drehmoment

Ungesättigte Eisenteile: elektrisch lineares System

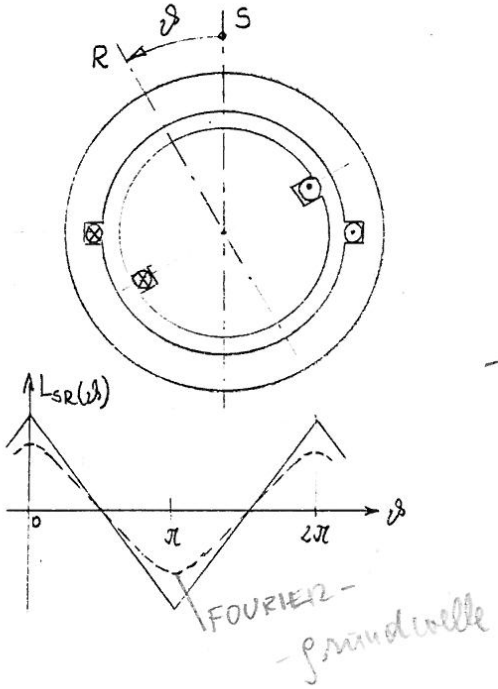
$$\left.\begin{aligned}\psi_S &= L_S(\vartheta)\, i_S + L_{SR}(\vartheta)\, i_R \\ \psi_R &= L_{SR}(\vartheta)\, i_S + L_R(\vartheta)\, i_R\end{aligned}\right\}$$

im folgenden: linear! $L_{SR}(\vartheta) = L_{RS}(\vartheta)$

S, R: beide einphasig!

Wir behandeln zuerst Fälle, wo L_S und L_R nicht von ϑ abhängen. $L_S, L_R \neq f(\vartheta)$!

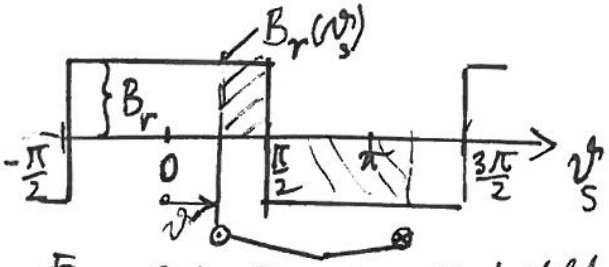
1.10.2. Systeme mit konstantem Luftspalt



Die beiden Wicklungen befinden sich auf je einem zylindrischen, ungesättigten Eisenkörper. Die Eisenkörper seien konzentrisch und durch einen konstanten Luftspalt getrennt. Die Wicklungen sind i.a. verteilt, der Einfluß der Nuten wird nicht berücksichtigt. Ihre Selbstinduktivitäten L_S, L_R *) sind unabhängig von der Stellung des Rotors. Der Verlauf der Gegeninduktivität kann allgemein durch eine Fourierreihe

*) „Streuung" + Luftspaltfeld

Gegeninduktivität zwischen einer Ständer- und einer Läuferspule gleicher Weite in Abhängigkeit des Läuferverdrehwinkels



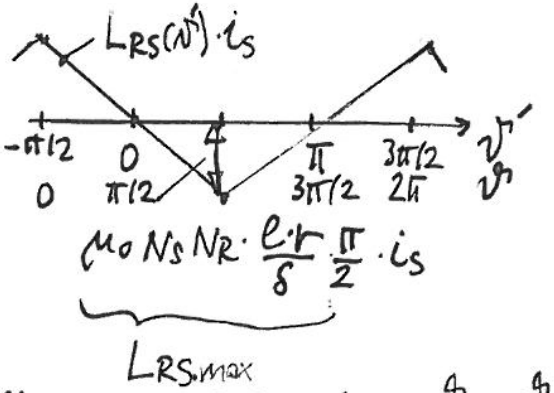
$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{s} = 2\cdot\delta\cdot H_r = \Theta_s \qquad B_r = \mu_0 H_r = \mu_0 \frac{\Theta_s}{2\delta} = \mu_0 \frac{N_s i_s}{2\delta}$$

r ... radial

Φ_{RS} = Rotorfluss d.h. Statorfeld, abhängig von Rotorstellung ϑ'

$$\Phi_{RS} = l\int_{0+\vartheta'}^{\pi+\vartheta'} B_r(\vartheta_s)\cdot r\cdot d\vartheta_s = l\cdot r\cdot B_r\cdot\left[\frac{\pi}{2}-\vartheta'-\left(\pi+\vartheta'-\frac{\pi}{2}\right)\right] = l\cdot r\cdot B_r\cdot(-2\vartheta'), \quad -\frac{\pi}{2}\le\vartheta'\le\frac{\pi}{2}$$

$$\Psi_{RS} = N_R\cdot\Phi_{RS}$$



$$L_{RS} = \frac{\Psi_{RS}}{i_s} = -2 l r \mu_0 \frac{N_s N_R}{2\delta}\cdot\vartheta'$$

Neue Nullwinkelstellung im Folgenden: $\vartheta = \vartheta' + \frac{\pi}{2}$

Bei Tausch von S und R in obiger Rechnung: $L_{RS} = L_{SR}$!

$$L_{SR}(\vartheta) = L_g \cos\vartheta + L_{g3} \cos 3\vartheta + L_{g5} \cos 5\vartheta + \ldots$$

dargestellt werden, wobei nur der erste Term beibehalten werden soll:

$$L_{SR}(\vartheta) = L_g \cos\vartheta \, .$$

bei verteilten Wicklungen (dominierend) „Grundwellentheorie"

Flußverkettungen:

$$\left.\begin{aligned} \psi_s &= L_s i_s + L_g i_R \cos\vartheta \\ \psi_R &= L_g i_s \cos\vartheta + L_R i_R \end{aligned}\right\}$$

magnetischer Anteil der kinet. Ergänzungsenergie:

$$W_k^m = \tfrac{1}{2} L_s i_s^2 + \tfrac{1}{2} L_R i_R^2 + L_g i_s i_R \cos\vartheta \, ;$$

elektromechanisch erzeugtes Drehmoment:

$$M_e = \frac{\partial W_k^m}{\partial \vartheta} = - L_g i_s i_R \sin\vartheta \, .$$

Angenommen, die beiden Wicklungen werden mit Strömen

$$i_s(t) = \hat{I}_s \cos\omega_s t \, , \qquad i_R(t) = \hat{I}_R \cos\omega_R t$$

unterschiedlicher Frequenzen gespeist. Dann ist

$$M_e = - L_g \hat{I}_s \hat{I}_R \cos\omega_s t \cos\omega_R t \sin\vartheta = - L_g \hat{I}_s \hat{I}_R \tfrac{1}{2}\left[\cos(\omega_s-\omega_R)t + \cos(\omega_s+\omega_R)t\right] \sin\vartheta$$

$$= -\tfrac{1}{4} L_g \hat{I}_s \hat{I}_R \left\{ \sin[\vartheta-(\omega_s-\omega_R)t] + \sin[\vartheta+(\omega_s-\omega_R)t] + \sin[\vartheta-(\omega_s+\omega_R)t] + \sin[\vartheta+(\omega_s+\omega_R)t] \right. .$$

Unter welchen Bedingungen ist für dieses System eine stationäre elektromechanische Energieübertragung mit nicht verschwindendem zeitlichen Mittelwert möglich? (zB.:

)

Stationäre Drehung: $\dot{\vartheta} = \omega_M =$ konst., $\vartheta = \omega_M t - \gamma$,

$-\gamma$: Rotorwinkel bei $t=0$

zugeführte mechan. Momentanleistung: $p_M = \omega_M M = -\omega_M M_e$.

$$M_e = -\frac{1}{4} L_0 \hat{I}_s \hat{I}_R \left\{ \sin[(\omega_M - \omega_s + \omega_R)t - \gamma] + \sin[(\omega_M + \omega_s - \omega_R)t - \gamma] + \right.$$
$$\left. + \sin[(\omega_M - \omega_s - \omega_R)t - \gamma] + \sin[(\omega_M + \omega_s + \omega_R)t - \gamma] \right\}.$$

$J\ddot{\vartheta} = M_e + M = 0$

stationär: $\dot{\vartheta} =$ const.

$M_e = -M$

Der zeitliche Mittelwert $\overline{p_M} = -\omega_M \overline{M_e}$ ist nur dann $\neq 0$, wenn einer der Koeffizienten von t in den Argumenten der Kreisfunktionen verschwindet.

Vier Möglichkeiten: $\boxed{\omega_M \pm \omega_s \pm \omega_R = 0}$

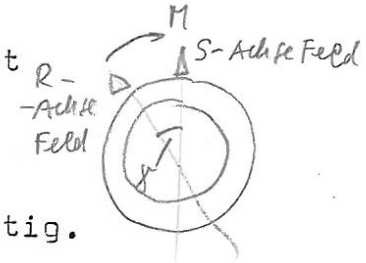
$$\begin{cases} \omega_M - \omega_s + \omega_R = 0 \rightarrow \omega_M = \omega_s - \omega_R \\ \omega_M + \omega_s - \omega_R = 0 \\ \omega_M - \omega_s - \omega_R = 0 \\ \omega_M + \omega_s + \omega_R = 0 \end{cases}$$

Dies ist die grundlegende Frequenzbedingung für die stationäre elektromechanische Energieübertragung in rotierenden Systemen.

Ist irgendeine dieser Bedingungen erfüllt, so gilt

$$\overline{p_M} = -\frac{1}{4}\omega_M L_\varrho \hat{I}_R \hat{I}_s \sin\gamma .$$

γ: „Polrad"-Winkel



Neben der Frequenzbedingung ist also auch $\gamma \neq 0$ nötig.

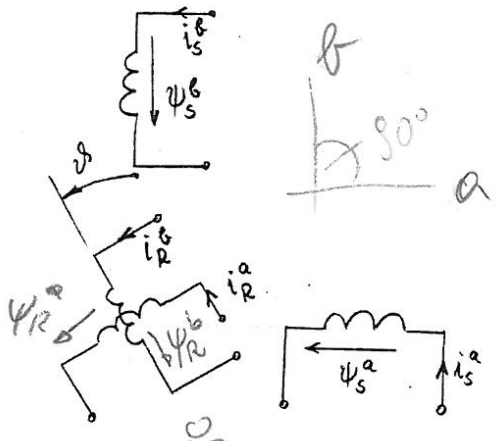
Nachteil dieser Anordnung: Es treten pulsierende Anteile auf.

Z.B. ist für $\omega_M = \omega_s - \omega_R$ (Vgl. PASCHKE/AE2: ASM für 1 Phase erklärt)

$$M_e = \frac{1}{4} L_\varrho \hat{I}_s \hat{I}_R \left[\sin\gamma - \sin(2\omega_M t - \gamma) + \sin(2\omega_R t + \gamma) - \sin(2\omega_s t - \gamma)\right]$$

3 Pulsationen

Abhilfe: Anbringen mehrerer, räumlich versetzter und zeitlich verschoben gespeister Wicklungen, etwa je zweier Wicklungen im Stator und im Rotor: (oder auch 3phasig, 3strängig, ...)



$$\left.\begin{aligned}
\psi_s^a &= L_s i_s^a + L_\varrho i_R^a \cos\vartheta - L_\varrho i_R^b \sin\vartheta \quad *)\ *)\\
\psi_s^b &= L_s i_s^b + L_\varrho i_R^a \sin\vartheta + L_\varrho i_R^b \cos\vartheta\\
\psi_R^a &= L_R i_R^a + L_\varrho i_s^a \cos\vartheta + L_\varrho i_s^b \sin\vartheta\\
\psi_R^b &= L_R i_R^b - L_\varrho i_s^a \sin\vartheta + L_\varrho i_s^b \cos\vartheta
\end{aligned}\right\}$$

$$\begin{aligned}
W_k^m &= \frac{1}{2}\left(\psi_s^a i_s^a + \psi_s^b i_s^b + \psi_R^a i_R^a + \psi_R^b i_R^b\right)\\
&= \frac{1}{2} L_s \left(i_s^{a2} + i_s^{b2}\right) + \frac{1}{2} L_R \left(i_R^{a2} + i_R^{b2}\right) +\\
&\quad + L_\varrho \left[\left(i_s^a i_R^a + i_s^b i_R^b\right)\cos\vartheta - \left(i_s^a i_R^b - i_s^b i_R^a\right)\sin\vartheta\right].
\end{aligned}$$

*) $L_\varrho \underset{(R)}{i_s^a} \cdot \underset{(R)}{i_s^b} \cdot \cos 90° = 0$: Ständerwicklungen entkoppelt, ebenso Rotorwicklungen

Damit ist das elektrisch erzeugte Drehmoment

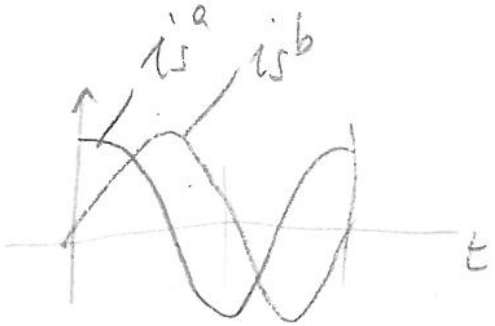
$$M_e = \frac{\partial W_k^m}{\partial \vartheta} = -L_g\left[\left(i_s^a i_R^a + i_s^b i_R^b\right)\sin\vartheta + \left(i_s^a i_R^b - i_s^b i_R^a\right)\cos\vartheta\right]$$

*) $\cos(\vartheta + \frac{\pi}{2}) = -\sin\vartheta$ usw.

Für eine symmetrische Speisung gemäß

$$i_s^a = \hat{I}_s \cos\omega_s t\,, \qquad i_s^b = \hat{I}_s \sin\omega_s t$$

$$i_R^a = \hat{I}_R \cos\omega_R t\,, \qquad i_R^b = \hat{I}_R \sin\omega_R t$$



folgt daraus

$$M_e = -L_g\,\hat{I}_s\hat{I}_R \sin\left[\vartheta - (\omega_s - \omega_R)t\right],$$

sodaß bei stationärer Drehung, $\vartheta = \omega_M t - \gamma$,

$$M_e = -L_g\,\hat{I}_s\hat{I}_R \sin\left[(\omega_M - \omega_s + \omega_R)t - \gamma\right].$$

Stationäres Drehmoment bei stator- und rotorseitiger zweiphasiger Wechselstromstromspeisung

$$\cos(\vartheta + 90°) = \cos\vartheta \underbrace{\cos 90°}_{0} - \sin\vartheta \sin 90° = -\sin\vartheta$$

$$M_e = -L_g \Big[\hat{I}_s \cdot \hat{I}_R \cos\omega_s t \cdot \cos\omega_R t \cdot \sin\vartheta +$$
$$+ \hat{I}_s \hat{I}_R \sin\omega_s t \cdot \sin\omega_R t \cdot \sin\vartheta +$$
$$+ \hat{I}_s \cdot \hat{I}_R \cos\omega_s t \cdot \sin\omega_R t \cos\vartheta -$$
$$- \hat{I}_s \hat{I}_R \sin\omega_s t \cdot \cos\omega_R t \cos\vartheta \Big] = -L_g \hat{I}_s \hat{I}_R \cdot$$

$$\cdot \left\{ \cos((\omega_R - \omega_s)t) \sin\vartheta + \sin((\omega_R - \omega_s)t) \cos\vartheta \right\} =$$

$$= -L_g \hat{I}_s \hat{I}_R \cdot \sin((\vartheta - (\omega_s - \omega_R)t)$$

Stationäre Energieübertragung ist dann möglich, wenn

$$\boxed{\omega_M - \omega_s + \omega_R = 0} \quad .$$

Es treten keine pulsierenden Anteile mehr auf:

$$\bar{p}_M = p_M = -\omega_M M_e = -\omega_M L_\sigma \hat{I}_s \hat{I}_R \sin\gamma \ .$$

$p_M > 0$: aufgenommene Leistung, $\gamma < 0$: VZS: Gen.

$p_M < 0$: abgegebene Leistung, $\gamma > 0$: VZS: Mot.

Spezielle Fälle:

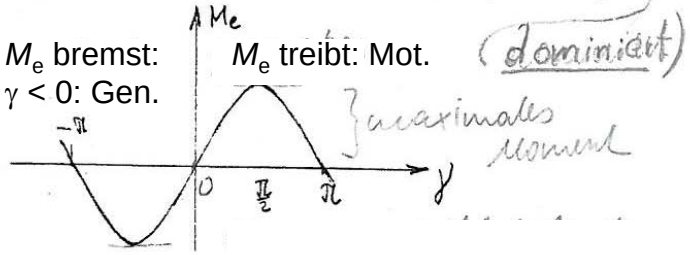
a) Vollpol-Synchronmaschine (δ = const.) (Wichlg. im Stator u. Rotor so verteilt, daß Fourier-Grundwelle dominiert)

In unserem Modell wird ein Rotorstrang mit Gleichstrom gespeist, der andere ist stromlos.

$$\omega_R = 0, \quad i_R^a = I_R = \text{konst.}, \quad i_R^b = 0 \ .$$

Frequenzbedingung: $\boxed{\omega_M = \omega_s}$ *)

γ ist der "Polradwinkel".



Abgegebene mechanische Leistung: $-p_M = \omega_s M_e$,

$$M_e = L_\sigma \hat{I}_s I_R \sin\gamma \ .$$

Gleichstrom

Strom gesperrte Synchronmaschine ($\hat{I}_s$ gegeben)

*) Bei $p > 1$: $\omega_M = \frac{\omega_s}{p}$ (höherpolig)

Stromgespeiste zweiphasige Synchron-Vollpolmaschine:

$$i_R^a = I_R, \quad i_R^b = 0, \quad \hat{I}_s \cos\omega_s t = i_s^a, \quad \hat{I}_s \sin\omega_s t = i_s^b$$

$$M_e = -L_g\left[\left(i_s^a \cdot i_R^a\right)\cdot \sin\vartheta - i_s^b i_R^a \cos\vartheta\right] =$$

$$= -L_g \hat{I}_s \cdot I_R\left[\cos\omega_s t \sin\vartheta - \sin\omega_s t \cos\vartheta\right] =$$

$$= -L_g \hat{I}_s \cdot I_R\left[\sin(\vartheta - \omega_s t)\right] =$$

$$\vartheta = \omega_M t - \mu$$

$$= -L_g \hat{I}_s I_R \sin\left((\omega_M - \omega_s)t - \mu\right) =$$

$$= +L_g \hat{I}_s I_R \cdot \sin\mu \qquad \omega_M = \omega_s$$

Doppeltgespeiste Asynchronmaschine als rotierender frequenzwandelnder Transformator (1):

$$\boxed{\omega_M - \omega_s + \omega_R = 0}$$

Wirkleistungsfluss: $P_S = P_\delta = (1-s)\cdot P_\delta + s\cdot P_\delta = P_m + P_R$

- Im Stator und Rotor je ein dreisträngiges Wicklungssystem. Rotorfrequenz plus Drehfrequenz entsprechen der Statorfrequenz.

- **Anwendung:**
  Kopplung zweier geringfügig asynchroner Netze: Netz 1: f_S, Netz 2: f_R.
  z. B.: f_S = 60.1 Hz, f_R = 60.0 Hz, sechspolige Wicklung: $2p = 6$
  Rotordrehzahl: $n = (f_S - f_R)/p$ = (60.1 – 60.0)/3 = 0.033/s = 2/min,
  Schlupf $s = f_R/f_S$ = 60/60.1 = 99.8336%, P_S = 100 MW, $P_R = s\cdot P_S$ = 99.833 MW
  $P_m = (1-s)\cdot P_S$ = 166.4 kW = $2\pi n\cdot M$, M = 794.5 kNm

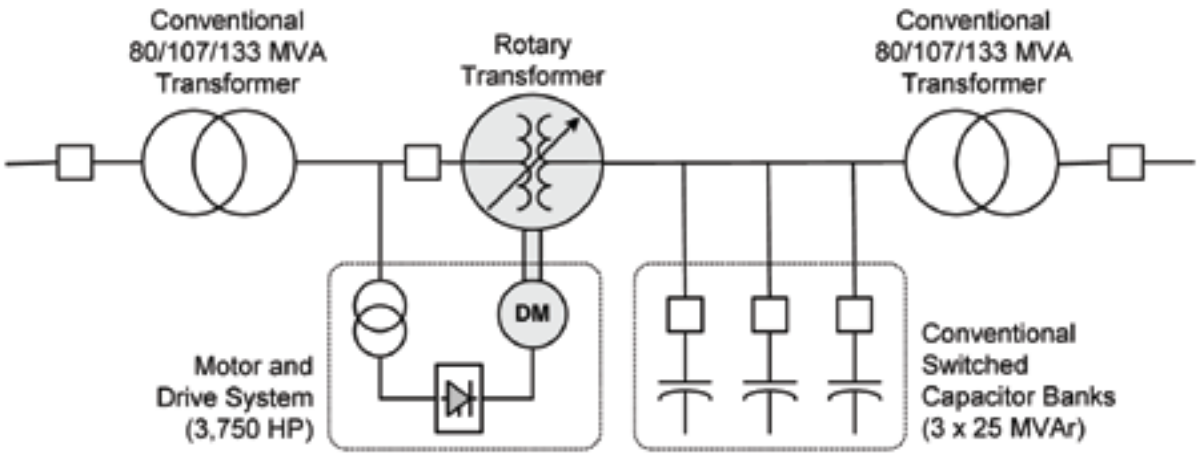
- Falls Statorfrequenz KLEINER als Rotorfrequenz: negative Drehzahl des rotierenden Transformators.

- Ein um die Drehzahl Null drehzahlveränderbarer Antriebsmotor treibt den Läufer:
  Positives Drehmoment M: Wirkleistungsfluss vom Stator zum Rotor
  Negatives Drehmoment M: Wirkleistungsfluss vom Rotor zum Stator

- Der Blindleistungsfluss ergibt sich aus der Differenz von Stator- und Rotorspannung und der Transformator-(Serien)-Kurzschlussreaktanz wie bei konventionellen Transformatoren (T-Ersatzschaltbild)

Rotierender Frequenzwandler: **Ausführungsbeispiel:**

Kopplung der östlichen Netzbereiche von Canada und USA in der Kopplungsstation *Langlois* bei *Montreal/Quebec*, *Canada*



100 MW, 17 kV rotary transformer
3750 HP DC motor & variable speed drive system
3x25 MVAr switched shunt capacitor banks
2x120kV/17 kV conventional step-up transformers.

- Der Antriebsmotor muss nur für die sehr kleine mech. Leistung bemessen sein. Die Drehzahl ist sehr niedrig.

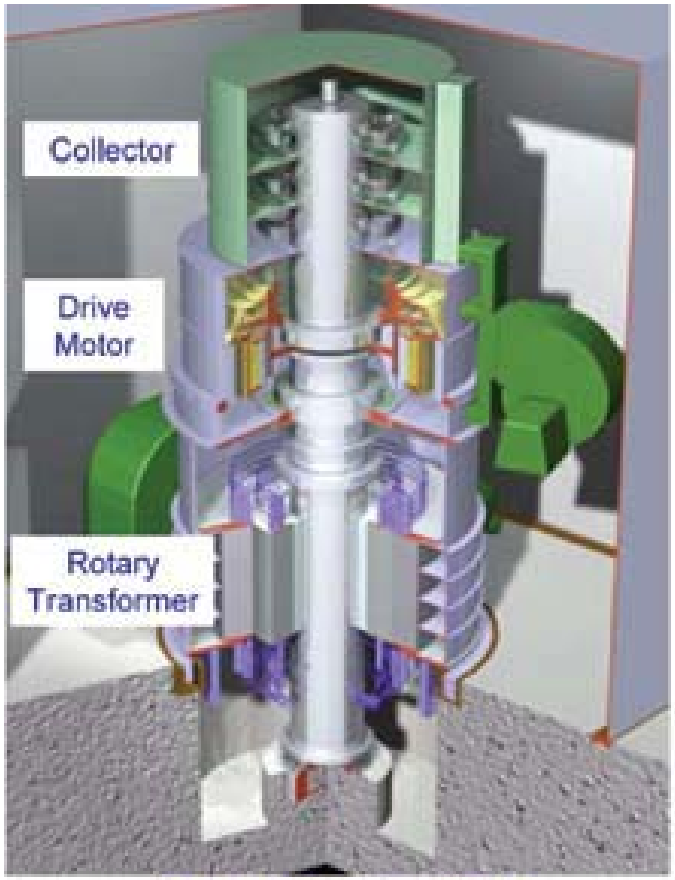
- Wirk- und Blindleistungsfluss werden geregelt eingestellt.

- Anders als bei statischen Frequenzumformern treten keine Strom- und Spannungsharmonischen auf.

Quelle: Larsen, E.; Piwko, R.; McLaren, D.: Variable frequency transformers for asynchronous power transfer, energize magazine, June 2009, 34-38

Rotierender Frequenzwandler: **Ausführungsbeispiel:**

Kopplung der östlichen Netzbereiche von Canada und USA in der Kopplungsstation *Langlois* bei *Montreal/Quebec*, *Canada*



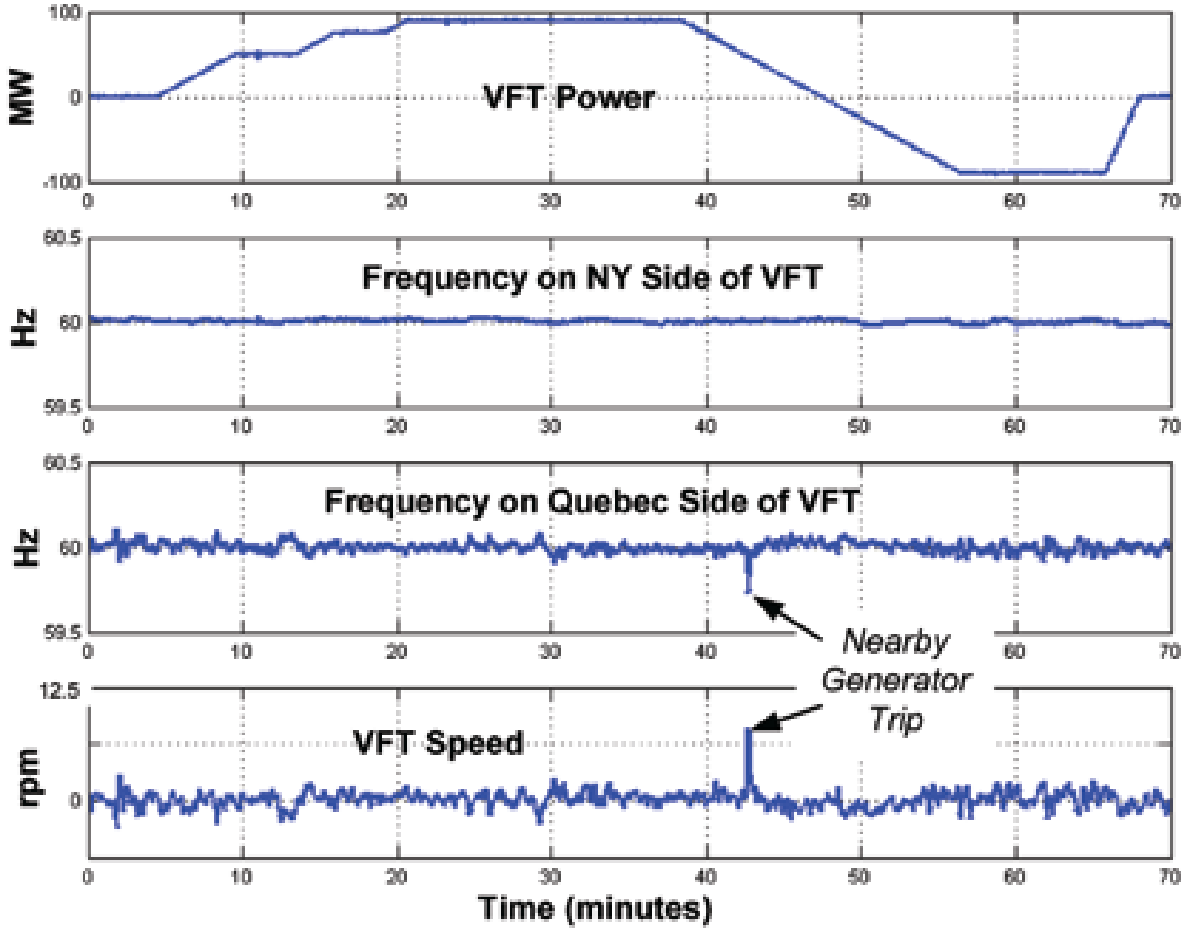
Cut-away Drawing of VFT

Photograph of Langlois 100 MW VFT

Quelle: Larsen, E.; Piwko, R.; McLaren, D.: Variable frequency transformers for asynchronous power transfer, energize magazine, June 2009, 34-38

Rotierender Frequenzwandler: **Ausführungsbeispiel:**

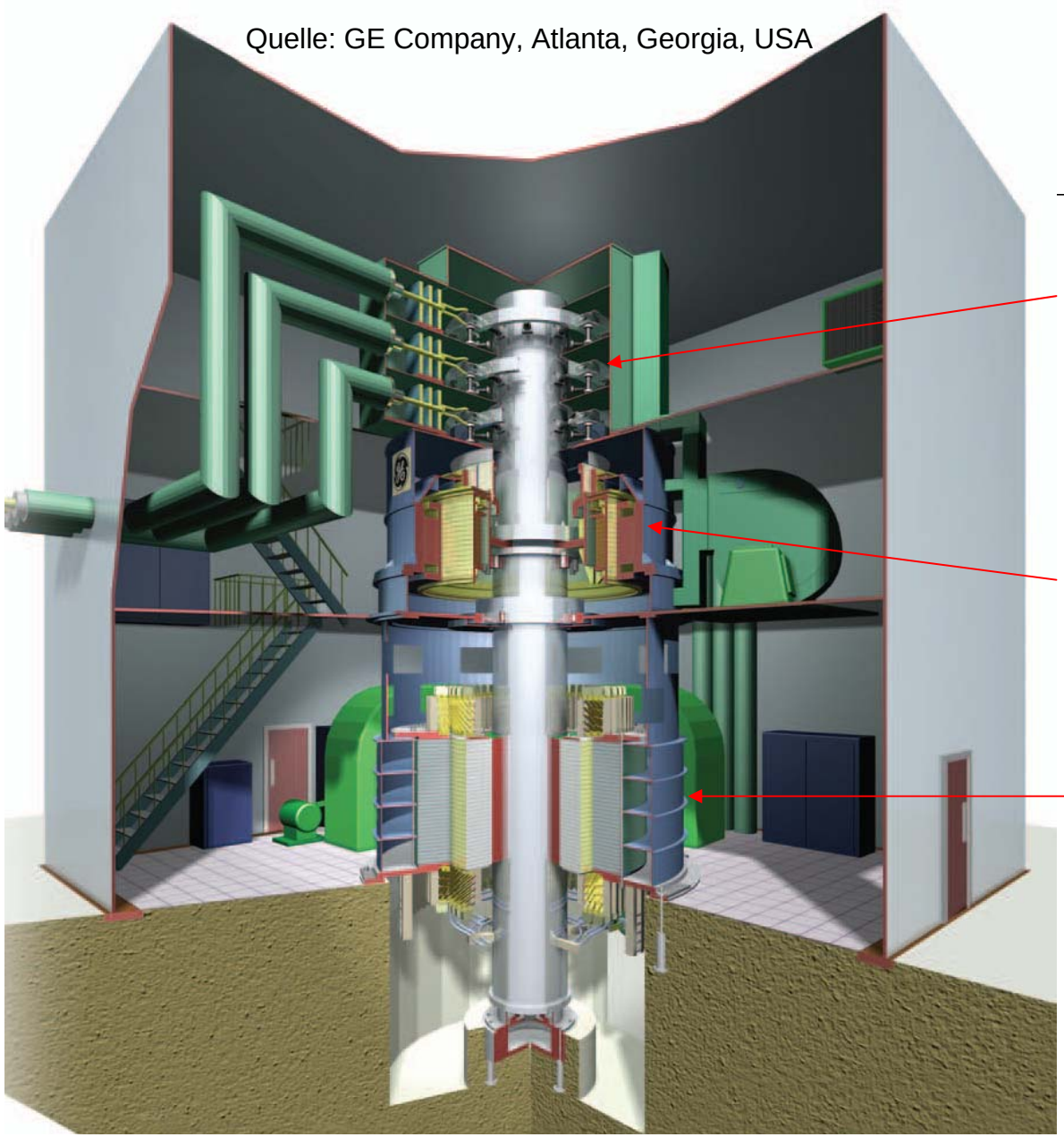
Kopplung der östlichen Netzbereiche von Canada und USA in der Kopplungsstation *Langlois* bei *Montreal/Quebec*, *Canada*



Betrieb des rotierenden Frequenzwandlers als Netzkupplung bei positivem und dann negativem Wirkleistungsfluss

Kopplung der Netze des Bundesstaats *New York/USA* und der Provinz *Quebec/Canada* in *Langlois*

Quelle: Larsen, E.; Piwko, R.; McLaren, D.: Variable frequency transformers for asynchronous power transfer, energize magazine, June 2009, 34-38



TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Rotierender Schleifringsystem

Gleichstrom-Antriebsmotor

Rotierender Transformator

Rotierender Frequenzwandler in der Kopplungsstation *Langlois* bei *Montreal/Quebec*, *Canada*

Komponenten des rotierenden Frequenzwandlers in der Kopplungsstation *Langlois* bei *Montreal/Quebec*, *Canada*

Schleifringherstellung

Rotor mit dreisträngiger Drehfeldwicklung

Quelle: GE Company, Atlanta, Georgia, USA

b) Asynchronmaschine

Die Statorwicklungen seien stromgespeist, die Rotorwicklungen werden über Widerstände R kurzgeschlossen. Die Rotorströme definieren dann verallgemeinerte Ladungskoordinaten. Mit dem Rotorträgheitsmoment J gilt $(i_R^a = \dot{Q}_R^a,\ i_R^b = \dot{Q}_R^b)$

$$W_k^* = \frac{1}{2}J\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}L_s(i_s^{a2}+i_s^{b2}) + \frac{1}{2}L_R(i_R^{a2}+i_R^{b2}) + L_g\left[(i_s^a i_R^a + i_s^b i_R^b)\cos\vartheta - (i_s^a i_R^b - i_s^b i_R^a)\sin\vartheta\right],$$

$$\delta V = R i_R^a \delta Q_R^a + R i_R^b \delta Q_R^b, \quad \delta A = M\delta\vartheta.$$

ϑ, Q_R^a, Q_R^b als $n=3$ verallg. Koord.

Wir haben also die $n=3$ Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W_k^*}{\partial\dot{\vartheta}}\right) - \frac{\partial W_k^*}{\partial\vartheta} = M, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W_k^*}{\partial i_R^a}\right) + R i_R^a = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W_k^*}{\partial i_R^b}\right) + R i_R^b = 0$$

oder

$$J\ddot{\vartheta} + L_g\left[(i_s^a i_R^a + i_s^b i_R^b)\sin\vartheta + (i_s^a i_R^b - i_s^b i_R^a)\cos\vartheta\right] = M, \quad \text{mech. Gleichg.}$$

$$L_R\frac{di_R^a}{dt} + L_g\frac{d}{dt}\left[i_s^a\cos\vartheta + i_s^b\sin\vartheta\right] + R i_R^a = 0, \quad L_R\frac{di_R^b}{dt} + L_g\frac{d}{dt}\left[i_s^b\cos\vartheta - i_s^a\sin\vartheta\right] + R i_R^b = 0.$$

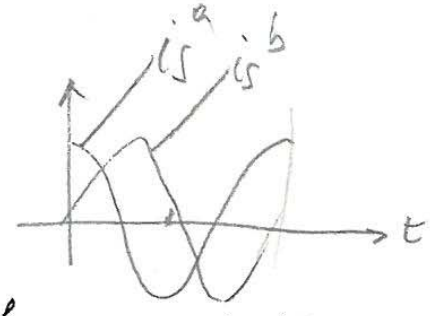
2 el. Gleichgew.

Für symmetrische Statorspeisung

$$I_s\cdot\{\cos\omega_s t\cos\vartheta + \sin\omega_s t\sin\vartheta\} = I_s(\cos(\vartheta - \omega_s t))$$

Stromgespeiste ASM: $S_k = \frac{R_R}{\omega_s L_R} = \frac{R_R}{X_R}$

(Ständerwiderstandsfehlerwirkung spielt keine Rolle)



$$i_s^a = \hat{I}_s \cos\omega_s t, \qquad i_s^b = \hat{I}_s \sin\omega_s t$$

gilt dann

DGL. 1. Ordnung

$$L_R \frac{di_R^a}{dt} + R\, i_R^a = -L_\varrho \hat{I}_s \frac{d}{dt}\left[\cos(\vartheta - \omega_s t)\right], \quad L_R \frac{di_R^b}{dt} + R\, i_R^b = L_\varrho \hat{I}_s \frac{d}{dt}\left[\sin(\vartheta - \omega_s t)\right],$$

was bei stationärer Drehung, $\vartheta = \omega_M t - \gamma$, auf die eingeschwungenen Lösungen

$$i_R^a = \frac{\omega_R L_\varrho}{Z_R} \hat{I}_s \sin(\omega_R t + \gamma - \varphi_R), \quad i_R^b = -\frac{\omega_R L_\varrho}{Z_R} \hat{I}_s \cos(\omega_R t + \gamma - \varphi_R)$$

mit

$2p=2$: $\omega_R = \omega_s - \omega_M$, $Z_R = \sqrt{R^2 + (\omega_R L_R)^2}$, $\varphi_R = \operatorname{arctg} \frac{\omega_R L_R}{R}$

führt.

$$L_R \dot{i}_R^a + R i_R^a = -L_g \hat{I}_s \frac{d}{dt}\left[\cos(\underbrace{\omega_M - \omega_S}_{-\omega_R})t - \mu\right] = L_g \hat{I}_s \omega_R \cdot \sin(\overbrace{\omega_R t + \mu}^{\alpha})$$

partikuläre Lösung = eingeschwungener Zustand : $i_R^a = A\cos\alpha + B\sin\alpha = C\cdot\sin(\alpha - \varphi_R)$

$$\dot{i}_R^a = -\omega_R A \sin\alpha + \omega_R B \cos\alpha$$

Koeffizientenvergleich:

$\sin\alpha$: $-\omega_R A L_R + B R = \omega_R L_g \hat{I}_s$

$\cos\alpha$: $\omega_R B L_R + R A = 0 \rightarrow A = -\frac{\omega_R L_R}{R} \cdot B \Rightarrow \begin{cases} B = \frac{R \cdot \omega_R L_g \hat{I}_s}{R^2 + (\omega_R L_R)^2} \\ A = -\frac{\omega_R L_R \omega_R L_g \hat{I}_s}{R^2 + (\omega_R L_R)^2} \end{cases}$

$$A = -C\sin\varphi_R,\ B = C\cdot\cos\varphi_R \Rightarrow C = (A^2 + B^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{\omega_R L_g \hat{I}_s}{Z_R}$$

$$Z_R = (R^2 + (\omega_R L_R)^2)^{1/2}$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi_R = \frac{\sin\varphi_R}{\cos\varphi_R} = -\frac{A}{B} \Rightarrow \varphi_R = \mathrm{arctg}\left(\frac{\omega_R L_R}{R}\right)$$

$$\Rightarrow i_R^a(t) = \frac{\omega_R L_g \hat{I}_s}{Z_R} \cdot \sin(\omega_R t + \mu - \varphi_R)$$

<u>analoge</u> Herleitung für $i_R^b(t)$!

Das elektromechanisch erzeugte Drehmoment ergibt sich zu

$$M_e = \frac{\partial W_k^m}{\partial \vartheta} = \frac{\omega_R}{Z_R}(L_\sigma \hat{I}_s)^2 \cos\varphi_R = \frac{(L_\sigma \hat{I}_s)^2}{L_R}\,\frac{\omega_R L_R R}{R^2+(\omega_R L_R)^2}.$$

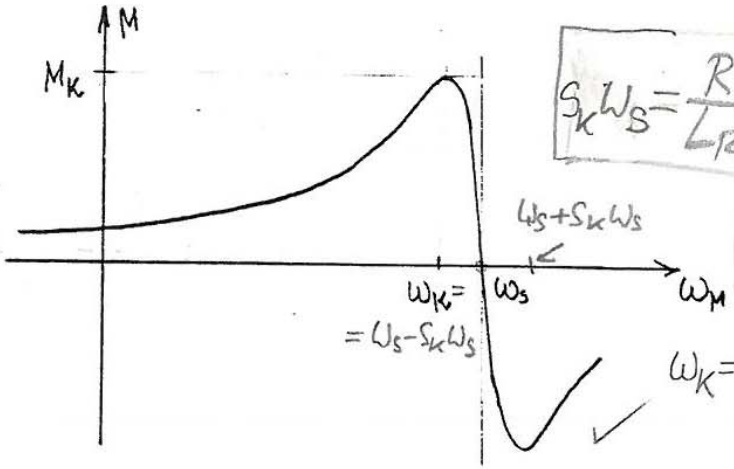
Kipp-Drehzahl

Rotorwid.

Rotorstreu = induktiv.

Setzen wir noch zu Abkürzung $M_K = (L_\sigma \hat{I})^2/(2L_R)$, $\omega_K = \omega_s - R/L_R$, so (Rs-Längsw. = 0!) folgt für die Abhängigkeit des Drehmoments von der mechanischen Winkelgeschwindigkeit ω_M

$$M = M_K\, 2 \Big/ \left[\frac{\omega_s-\omega_M}{\omega_s-\omega_K} + \frac{\omega_s-\omega_K}{\omega_s-\omega_M}\right] = \frac{2M_K}{\frac{s}{s_K}+\frac{s_K}{s}}$$



$$s_K\omega_s = \frac{R}{L_R} = \frac{R_R}{L_R} = \frac{R_2'}{X_2'}$$

$$\omega_K = \omega_s(1-s_K)$$

$$\cos\varphi_R = \cos\Big(\underbrace{\arctan\frac{\omega_R L_R}{R}}_{x}\Big) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_R L_R}{R}\right)^2}}$$

$$\frac{\omega_s-\omega_M}{\omega_s} = s$$

$$M_e = -L_g \cdot \left\{ \left[\frac{\omega_R L_g \hat{I}_s^2}{Z_R} \cdot \cos\omega_s t \cdot \sin(\omega_R t + \mu - \varphi_R) - \frac{\omega_R L_g \hat{I}_s^2}{Z_R} \cdot \sin\omega_s t \cdot \cos(\omega_R t + \mu - \varphi_R) \right] \cdot \sin\vartheta + \right.$$

$$\left. + \left[-\frac{\omega_R L_g \hat{I}_s^2}{Z_R} \cdot \cos\omega_s t \cdot \cos(\omega_R t + \mu - \varphi_R) - \frac{\omega_R L_g \hat{I}_s^2}{Z_R} \cdot \sin\omega_s t \cdot \sin(\omega_R t + \mu - \varphi_R) \right] \cdot \cos\vartheta \right\} =$$

$$= -L_g \cdot \frac{\omega_R L_g \hat{I}_s^2}{Z_R} \cdot \left\{ \sin((\omega_R - \omega_s)t + \mu - \varphi_R) \cdot \sin\vartheta - \cos((\omega_R - \omega_s)t + \mu - \varphi_R) \cdot \cos\vartheta \right\} =$$

$$= L_g \cdot \frac{\omega_R L_g \hat{I}_s^2}{Z_R} \cdot \left\{ \cos((\omega_R - \omega_s)t + \mu - \varphi_R + \vartheta) \right\} = \frac{\omega_R}{Z_R} \cdot (L_g \hat{I}_s)^2 \cdot \cos\varphi_R$$

$$\omega_M t - \mu = (\omega_s - \omega_R)t - \mu$$

Mit $\cos\varphi_R = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\varphi_R}} = \frac{R}{(R^2 + \omega_R^2 L_R^2)^{1/2}}$ folgt:

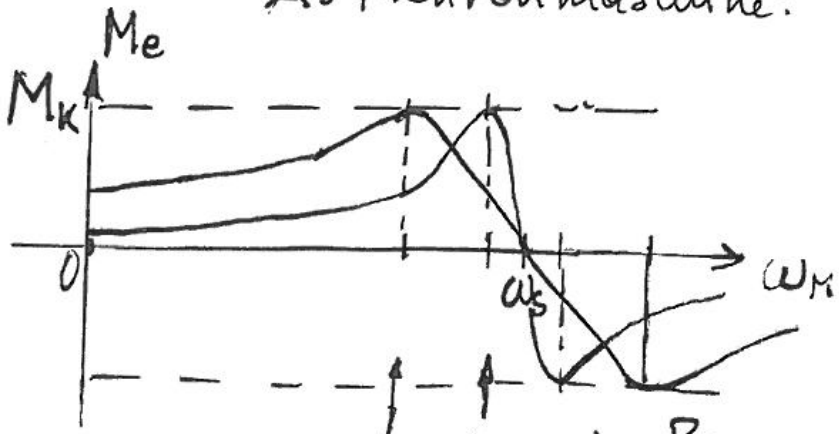
$$M_e = \frac{\omega_R L_R R}{R^2 + \omega_R^2 L_R^2} \cdot \underbrace{\frac{(L_g \hat{I}_s)^2}{L_R}}_{2M_k} = 2M_k \cdot \frac{1}{\frac{R/L_R}{\omega_R} + \frac{\omega_R}{R/L_R}} = \frac{2M_k}{\frac{s_k}{s} + \frac{s}{s_k}}$$

$$\omega_R = \omega_s - \omega_M = s \cdot \omega_s$$

s: Schlupf, $\omega_s s_k = R/L_R$: Kippschlupf: s_k

Vergleich der stationären Momenten-Drehzahl-Kennlinie der strom- und spannungsgespeisten Asynchronmaschine

Asynchronmaschine:



$R = R_R$!

$\omega_K = \omega_S - \frac{R_R}{L_R}$ stromgespeist $M_K \sim \hat{I}_S^2$

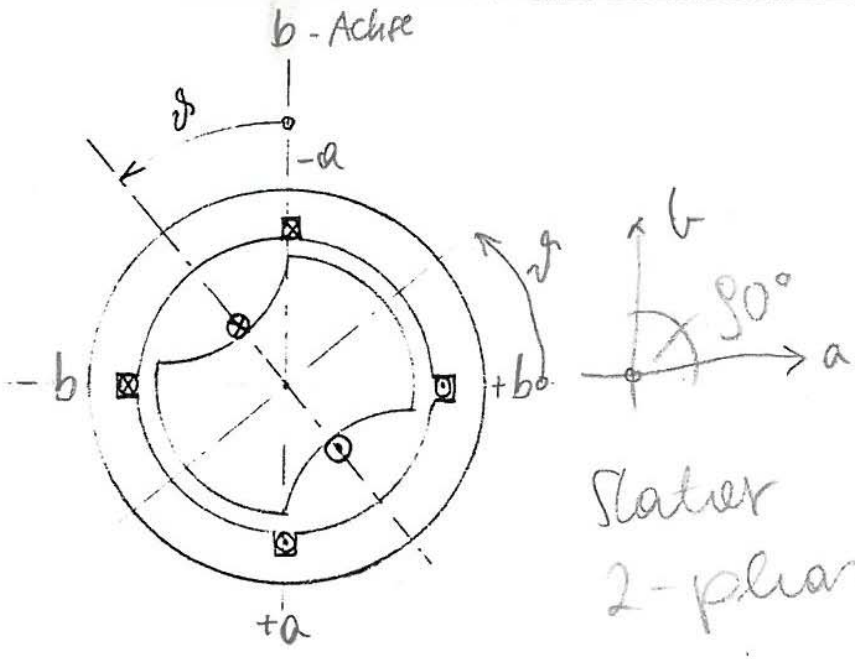
$\omega_K = \omega_S - \frac{R_R}{\sigma L_R}$ spannungsgespeist $M_K \sim \hat{U}_S^2$

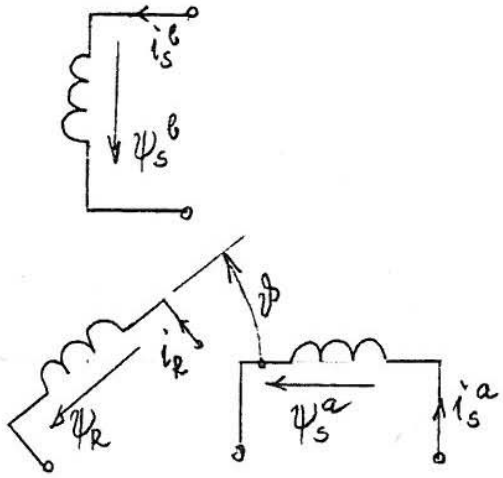
$0 \leq \sigma \leq 1$

($R_S = 0$ angenommen)

aber Streufelder $\sim \sigma$ berücksichtigt

1.10.3. Systeme mit variablem Luftspalt



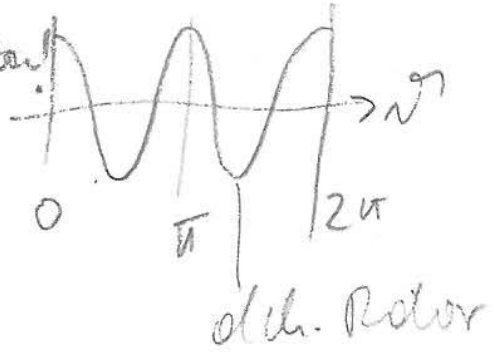


Rotor-Selbstinduktivität von Rotorstellung unabhängig (Stator ungepreßt), jedoch Stator-Selbstind. abhängig von ϑ, ebenso Gegenind.

Wir betrachten ein System mit zwei Strängen im Stator und einem Strang im Rotor. Die Selbstinduktivität der Rotorspule ist von der Stellung ϑ unabhängig, nicht aber die Selbst- und Gegeninduktivitäten der Statorspulen. Beschränkung auf die wesentlichen Glieder der Fourierentwicklung:

Kopplung zwischen a u. b im Stator

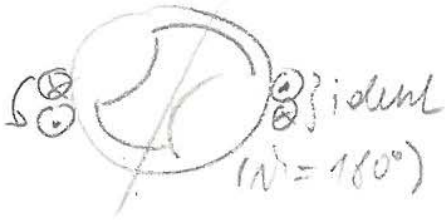
$$\left.\begin{aligned}
\psi_s^a &= (L_0 + L_2 \cos 2\vartheta)\, i_s^a + L_2 \sin 2\vartheta\, i_s^b + L_\varrho \cos\vartheta\, i_R \\
\psi_s^b &= (L_0 - L_2 \cos 2\vartheta)\, i_s^b + L_2 \sin 2\vartheta\, i_s^a + L_\varrho \sin\vartheta\, i_R \\
\psi_R &= L_R\, i_R + L_\varrho \cos\vartheta\, i_s^a + L_\varrho \sin\vartheta\, i_s^b
\end{aligned}\right\}$$



$$W_k^m = \frac{1}{2}\left(\psi_s^a i_s^a + \psi_s^b i_s^b + \psi_R i_R\right)$$

$$= \frac{1}{2} L_0 \left(i_s^{a\,2} + i_s^{b\,2}\right) + \frac{1}{2} L_R i_R^2 + L_\varrho \left(i_s^a i_R \cos\vartheta + i_s^b i_R \sin\vartheta\right) +$$

$$+ L_s \left[\frac{1}{2}\left(i_s^{a\,2} - i_s^{b\,2}\right)\cos 2\vartheta + i_s^a i_s^b \sin 2\vartheta\right].$$

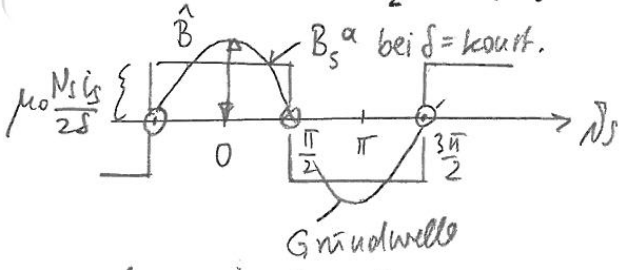


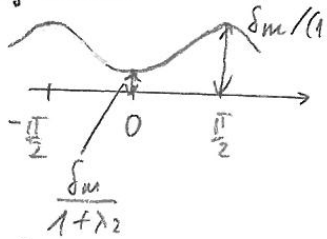
Gegeninduktivität zweier um 90°el. versetzter Ständerwicklungsstränge bei variablem Luftspalt (1)

$B_s^a(\vartheta_s, \vartheta)$ = Grundwelle, moduliert mit variablem Luftspalt

$$\delta(\vartheta_s, \vartheta) = \frac{\delta_m}{1 + \lambda_2 \cdot \cos(2(\vartheta_s - \vartheta))}$$: variabler Luftspalt.

ϑ_s : Statorumfangskoordinate





ϑ_s $(\vartheta = 0)$

Bei Rotorverdrehung um ϑ ⇒
⇒ $\vartheta_s - \vartheta$ als Argument

$$\hat{B} = \frac{4}{\pi} \mu_0 \frac{N_s i_s}{2\delta}, \quad \hat{B} \cdot \cos\vartheta_s \longrightarrow \hat{B} \cdot \cos\vartheta_s \cdot \frac{\delta}{\delta(\vartheta_s, \vartheta)} = \hat{B} \cos\vartheta_s (1 + \lambda_2 \cos(2\vartheta_s - 2\vartheta)) =$$

$\delta_m = \delta$

$$= \hat{B} \cos\vartheta_s + \frac{\lambda_2}{2} \hat{B} [\cos(\vartheta_s - 2\vartheta) + \cos(3\vartheta_s - 2\vartheta)]$$

hier: Nur Grundwelle $\sim \cos\vartheta_s$ betrachten → $\cos(3\vartheta_s - 2\vartheta)$ vernachlässigt!

Luftspalt-Feld der a-Wicklung: $B_s^a(\vartheta_s, \vartheta) \approx \mu_0 \frac{4}{\pi} \frac{N_s i_s^a}{2\delta_m} \cdot \left[\cos\vartheta_s + \frac{\lambda_2}{2} \cos(\vartheta_s - 2\vartheta)\right]$

b-Wicklung im Stator um $\pi/2$ im 2-Phasensystem versetzt: $\hat{B} \cdot \sin\vartheta_s$ als Grundwelle bei δ = const.

$$\hat{B} \cdot \sin\vartheta_s \longrightarrow \hat{B} \cdot \sin\vartheta_s \cdot \frac{\delta}{\delta(\vartheta_s, \vartheta)} = \hat{B} \cdot \sin\vartheta_s \cdot (1 + \lambda_2 \cos(2\vartheta_s - 2\vartheta)) =$$

$$= \hat{B} \cdot \sin\vartheta_s + \hat{B} \cdot \frac{\lambda_2}{2} \cdot [\sin(\vartheta_s - 2\vartheta) + \sin(3\vartheta_s - 2\vartheta)]$$

Luftspalt-Feld der b-Wicklung: $B_s^b(\vartheta_s, \vartheta) \cong \mu_0 \frac{4}{\pi} \cdot \frac{N_s i_s^b}{2\delta_m} \cdot \left[\sin\vartheta_s - \frac{\lambda_2}{2} \sin(\vartheta_s - 2\vartheta)\right]$

nur Grundwelle $\sim \sin\vartheta_s$

Gegeninduktivität zweier um 90°el. versetzter Ständerwicklungsstränge bei variablem Luftspalt (2)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Flussverkettung der Wicklung a bei unerregtem Rotor ($i_R = 0$):

$$\psi_s^{aa} + \psi_s^{ab} = N_s \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[B_s^a(\vartheta_s, \vartheta) + B_s^b(\vartheta_s, \vartheta) \right] \cdot l \cdot r \cdot d\vartheta_s =$$

$$= N_s l r \mu_0 \frac{2}{\pi} N_s \frac{1}{\delta_m} \cdot \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} i_s^a \left[\cos\vartheta_s + \frac{\lambda_2}{2} \cos(\vartheta_s - 2\vartheta) \right] + i_s^b \cdot \left[\sin\vartheta_s - \frac{\lambda_2}{2} \sin(\vartheta_s - 2\vartheta) \right] \right] d\vartheta_s =$$

$$= \mu_0 \frac{2 l r}{\pi \delta_m} N_s^2 \cdot \left[i_s^a \cdot \left[2 + \frac{\lambda_2}{2} \cdot 2\cos 2\vartheta \right] + i_s^b \cdot \left[0 + \frac{\lambda_2}{2} \cdot \sin 2\vartheta \right] \right]$$

$$\psi_s^{aa} + \psi_s^{ab} = \underbrace{\mu_0 \frac{4 l r}{\pi \delta_m} N_s^2}_{L_0} i_s^a + \underbrace{\frac{\lambda_2 L_0}{2}}_{L_2} i_s^a \cos 2\vartheta + \underbrace{\frac{\lambda_2 L_0}{2}}_{L_2} \sin 2\vartheta \cdot i_s^b$$

$$\psi_s^{aa} + \psi_s^{ab} = L_0 i_s^a + L_2 \cos 2\vartheta \, i_s^a + L_2 \sin 2\vartheta \cdot i_s^b$$

Flussverkettung der Wicklung a bei erregtem Rotor ($i_R \neq 0$):

Seite 28: $i_R = i_R^a$, $i_R^b = 0$ (einphasig erregter Rotor):

$$\psi_s^a = (L_0 + L_2 \cos 2\vartheta) i_s^a + L_2 \sin 2\vartheta \cdot i_s^b + L_\delta i_R \cdot \cos\vartheta$$

Flussverkettung für Wicklung b bei unerregtem Rotor ($i_R = 0$):

$$\psi_s^{ba} + \psi_s^{bb} = N_s l r \mu_0 \frac{2}{\pi} \frac{N_s}{\delta_m} \left[\int_0^{\pi} i_s^a \left[\cos\vartheta_s + \frac{\lambda_2}{2} \cos(\vartheta_s - 2\vartheta) \right] + i_s^b \left[\sin\vartheta_s - \frac{\lambda_2}{2} \sin(\vartheta_s - 2\vartheta) \right] \cdot d\vartheta_s \right]$$

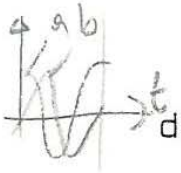
$$= N_s l r \mu_0 \frac{2}{\pi} \frac{N_s}{\delta_m} \cdot \left[i_s^a \cdot \left[0 + \frac{\lambda_2}{2} \cdot 2 \cdot \sin 2\vartheta \right] + i_s^b \left[2 - \frac{\lambda_2}{2} \cdot 2 \cos 2\vartheta \right] \right]$$

bei erregtem Rotor: $i_R \neq 0$: $\psi_s^b = (L_0 - L_2 \cos 2\vartheta) i_s^b + L_2 \sin 2\vartheta \, i_s^a + L_\delta i_R \cdot \sin\vartheta$

Für das elektromechanisch erzeugte Drehmoment

$$M_e = \frac{\partial W_k^m}{\partial \vartheta} = -L_\varphi i_R \left(i_s^a \sin\vartheta - i_s^b \cos\vartheta\right) - \underbrace{L_2\left[\left(i_s^{a2} - i_s^{b2}\right)\sin 2\vartheta - 2 i_s^a i_s^b \cos 2\vartheta\right]}_{\text{unabhängig von } i_R\,!}$$

folgt daraus bei Stromspeisung gemäß



$$i_s^a = \hat{I}_s \cos\omega_s t\,, \quad i_s^b = \hat{I}_s \sin\omega_s t\,, \quad i_R = \hat{I}_R \cos\omega_R t$$

der Ausdruck

$$M_e = -L_\varphi \hat{I}_s \hat{I}_R \sin(\vartheta - \omega_s t)\cos\omega_R t - L_2 \hat{I}_s^2 \sin 2(\vartheta - \omega_s t)\,,$$

und für Drehung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω_M, $\vartheta = \omega_M t - \gamma$:

$$M_e = -L_\varphi \hat{I}_s \hat{I}_R \sin\left[(\omega_M - \omega_s)t - \gamma\right]\cos\omega_R t - L_s \hat{I}_s^2 \sin 2\left[(\omega_M - \omega_s)t - \gamma\right]$$

$$= \frac{1}{2} L_\varphi \hat{I}_s \hat{I}_R \left\{\sin\left[\gamma - (\omega_M - \omega_s + \omega_R)t\right] + \sin\left[\gamma - (\omega_M - \omega_s - \omega_R)t\right]\right\} + L_2 \hat{I}_s^2 \sin 2\left[\gamma - (\omega_M - \omega_s)t\right].$$

$$M_e = -L_g \hat{I}_R \cos\omega_R t \cdot \hat{I}_S \overbrace{(\cos\omega_S t \sin\vartheta - \sin\omega_S t \cdot \cos\vartheta)}^{\sin(\vartheta - \omega_S t)} -$$

$$-L_2 \Big[\hat{I}_S^2 \cdot \cos 2\omega_S t \cdot \sin 2\vartheta - \hat{I}_S^2 \cdot \sin 2\omega_S t \cos 2\vartheta \Big] \Rightarrow$$

$$\hat{I}_S^2 \cdot \sin(2(\vartheta - \omega_S t))$$

$$\Rightarrow M_e = -L_g \hat{I}_S \hat{I}_R \cdot \sin(\vartheta - \omega_S t) \cdot \cos\omega_R t -$$

$$- L_2 \hat{I}_S^2 \sin 2(\vartheta - \omega_S t))$$

$$\sin[(\omega_M - \omega_S)t - \mu] \cos\omega_R t = \frac{1}{2}\Big[\sin((\omega_M - \omega_S)t - \mu + \omega_R t) +$$

$$+ \sin((\omega_M - \omega_S)t - \mu - \omega_R t)\Big]$$

$$\underbrace{\sin(\mu - \omega_R t)}_{\sin\mu\cos\omega_R t - \cos\mu\sin\omega_R t} + \underbrace{\sin(\mu + \omega_R t)}_{\sin\mu\cos\omega_R t + \cos\mu\sin\omega_R t} = 2\sin\mu\cos\omega_R t$$

Stationäre elektromechanische Energieübertragung ist also unter den Bedingungen 1) $\omega_M - \omega_S \pm \omega_R = 0$,

oder 2) $\omega_M - \omega_S = 0$

möglich, wobei

pulsieren

1) $M_e = \frac{1}{2} L_g \hat{I}_S \hat{I}_R \left[\sin\gamma + \sin(\gamma \pm 2\omega_R t)\right] + L_2 \hat{I}_S^2 \sin 2(\gamma \pm \omega_R t)$, doppelt-gespeiste Maschinen (Stabilität!)

2) $M_e = L_g \hat{I}_S \hat{I}_R \sin\gamma \cos\omega_R t + L_s \hat{I}_s^2 \sin 2\gamma$

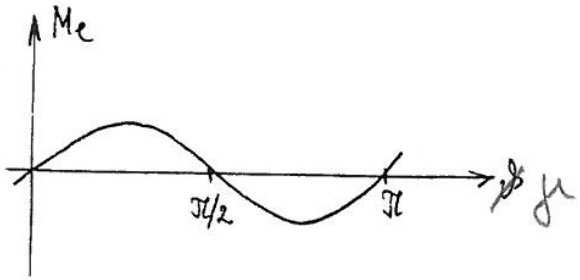
pulsiert

Dem konstanten Drehmoment sind pulsierende Anteile der Kreisfrequenz $2\omega_R$ bzw. ω_R überlagert, die für $\hat{I}_R = 0$ oder, wenn $\hat{I}_R \neq 0$, für $\omega_R = 0$ verschwinden. Beide Fälle sind technisch bedeutsam:

a) <u>Reluktanzmaschine</u> (magn. Widerstand = Reluktanz)

Der Rotor ist unbewickelt, es gilt also $\hat{I}_R = 0$ und damit

$$M_e = L_2 \hat{I}_s^2 \sin 2\gamma \,, \quad \omega_M = \omega_s$$

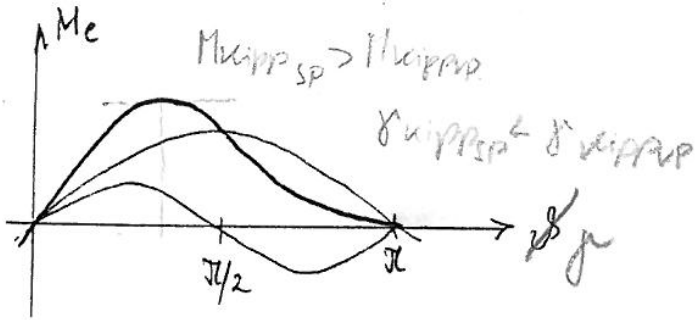


b) <u>Schenkelpol-Synchronmaschine</u>

$$i_R = I_R = \text{konst.},$$

$$M_e = L_\varphi \hat{I}_s I_R \sin\gamma + L_s \hat{I}_s^2 \sin 2\gamma$$

Gleichstrom



1.11. Übungsaufgaben

1) Die mathematische Untersuchung rotierender magnetischer Wandler läßt sich in vielen Fällen, insbesondere auch bei der Behandlung nichtstationärer Vorgänge, durch die Verwendung der Raumzeigerrechnung erheblich vereinfachen.

a) Für ein System mit konstantem Luftspalt und je zwei um 90° versetzt angeordnete Stränge im Stator und im Rotor seien komplexe Raumzeiger der Stator-und Rotorströme und der Stator- und Rotorflußverkettungen gemäß

$$\underline{i}_s = i_s^a + j\, i_s^b, \qquad \underline{\psi}_s = \psi_s^a + j\, \psi_s^b$$

$$\underline{i}_R = i_R^a + j\, i_R^b, \qquad \underline{\psi}_R = \psi_R^a + j\, \psi_R^b$$

erklärt. Zeigen Sie, daß sich damit die Ausdrücke für die Flußverkettungen und das elektromechanisch erzeugte Drehmoment (Seite 28) in der Form

$$\underline{\psi}_s = L_s\, \underline{i}_s + L_\varrho\, \underline{i}_R\, e^{j\vartheta}, \qquad \underline{\psi}_R = L_R\, \underline{i}_R + L_\varrho\, \underline{i}_s\, e^{-j\vartheta},$$

$$M_e = \mathrm{Im}\left\{ L_\varrho\, \underline{i}_s\, \underline{i}_R^*\, e^{-j\vartheta} \right\}$$

Im 3-phasigen Fall haben sowohl L_s, L_ϱ (Drehstromwicklung) um $(\frac{3}{2})^2$ zu [illegible]

schreiben lassen. Liegen die Stator-und Rotorstränge mit Widerstän-

den R_s bzw. R_R an Spannungen u_s^a, u_s^b bzw. u_R^a, u_R^b beliebigen Zeitverlaufs, so gelten mit

$$\underline{u}_s = u_s^a + j\,u_s^b, \qquad \underline{u}_R = u_R^a + j\,u_R^b$$

überdies die Gleichungen

$$\dot{\underline{\psi}}_s + R_s \underline{i}_s = \underline{u}_s, \quad \dot{\underline{\psi}}_R + R_R \underline{i}_R = \underline{u}_R, \quad J\ddot{\vartheta} = M_e + M .$$

b) Leiten Sie für das in Abschnitt 1.10.3 behandelte System mit veränderlichem Luftspalt (zwei versetzte Stränge im Stator, eine Rotorwicklung) die analogen Beziehungen

$$\underline{\psi}_s = L_0 \underline{i}_s + L_2 \underline{i}_s^* e^{j2\vartheta} + L_g i_R e^{j\vartheta}, \quad \psi_R = L_R i_R + \mathrm{Re}\{L_g \underline{i}_s e^{-j\vartheta}\},$$

$$M_e = \mathrm{Im}\{L_g i_R \underline{i}_s e^{-j\vartheta} + L_2 \underline{i}_s^2 e^{-j2\vartheta}\}, \quad J\ddot{\vartheta} = M_e + M,$$

$$\dot{\underline{\psi}}_s + R_s \underline{i}_s = \underline{u}_s, \quad \dot{\psi}_R + R_R i_R = u_R$$

ab.

Lösung: Aufgabe 1)

a) $\underline{\Psi}_S(t) = \Psi_S^a(t) + j\Psi_S^b(t) = L_s \cdot \overbrace{(i_S^a + j\, i_S^b)}^{\underline{i}_S(t)} + L_g \cdot \overbrace{(i_R^a + j i_R^b)}^{\underline{i}_R(t)} \cos\vartheta + L_g \overbrace{(i_R^a \cdot j - i_R^b)}^{j \cdot \underline{i}_R(t)} \sin\vartheta =$

$= L_s \cdot \underline{i}_s + L_g (\cos\vartheta + j \sin\vartheta) \cdot \underline{i}_R = L_s \underline{i}_s + L_g \underline{i}_R e^{j\vartheta}$

$\underline{\Psi}_R(t) = \Psi_R^a(t) + j\Psi_R^b(t) = L_R \cdot \underbrace{(i_R^a + j i_R^b)}_{\underline{i}_R} + L_g \underbrace{(i_S^a + j i_S^b)}_{\underline{i}_s} \cdot \cos\vartheta + L_g \underbrace{(-j i_S^a + i_S^b)}_{-j\underline{i}_s} \sin\vartheta =$

$= L_R \cdot \underline{i}_R + L_g \cdot \underline{i}_s \cdot (\cos\vartheta - j \sin\vartheta)$

$= L_R \underline{i}_R + L_g \cdot \underline{i}_s \cdot e^{-j\vartheta}$

$M_e = \mathrm{Im}\{L_g \underline{i}_s \underline{i}_R^* \cdot e^{-j\vartheta}\} = \mathrm{Im}\{L_g \overbrace{(i_S^a + j i_S^b)(i_R^a - j i_R^b)}^{i_S^a i_R^a + i_S^b i_R^b + j(-i_S^a i_R^b + i_S^b i_R^a) = I_a + j I_b} \cdot (\cos\vartheta - j \sin\vartheta)\} =$

$= L_g \cdot \mathrm{Im}\{I_a \cos\vartheta - I_a j \sin\vartheta + j I_b \cos\vartheta + I_b \sin\vartheta\} = L_g \{I_b \cos\vartheta - I_a \sin\vartheta\}$

$M_e = L_g \cdot [(-i_S^a i_R^b + i_S^b i_R^a)\cos\vartheta - (i_S^a i_R^a + i_S^b i_R^b)\sin\vartheta]$

$M_e = \mathrm{Im}\{L_g \underline{i}_s (\underline{i}_R \cdot e^{j\vartheta})^*\}$

Transformation des Rotor-Strom-Raums zeigen in das Ständer-Koordinatensystem (KOS)

Mit $u_S^a = R_s i_S^a + \dot{\Psi}_S^a$, $u_S^b = R_s i_S^b + \dot{\Psi}_S^b$ $\Big\} \times j$ $\Big\}$ + $\Rightarrow \underline{u}_s = u_S^a + j u_S^b = R_s \underline{i}_s + \underline{\dot{\Psi}}_s$

$u_R^a = R_R i_R^a + \dot{\Psi}_R^a$, $u_R^b = R_R i_R^b + \dot{\Psi}_R^b$ $\Big\} \times j$ $\Big\}$ + $\Rightarrow \underline{u}_R = u_R^a + j u_R^b = R_R \underline{i}_R + \underline{\dot{\Psi}}_R$

b) $\underline{\psi}_s(t) = \psi_s^a(t) + j\psi_s^b(t) = L_0 \underbrace{(i_s^a + j i_s^b)}_{\underline{i}_s} + L_2 \underbrace{(i_s^a - j i_s^b)}_{\underline{i}_s^*} \cos 2\vartheta + L_2 \underbrace{(j i_s^a + i_s^b)}_{j \cdot \underline{i}_s^*} \sin 2\vartheta + L_g i_R \underbrace{(\cos\vartheta + j \sin\vartheta)}_{e^{j\vartheta}} =$

$= L_0 \underline{i}_s + L_2 \underline{i}_s^* \cdot e^{j2\vartheta} + \underbrace{L_g i_R e^{j\vartheta}}$ ← Raumzeiger im Rotor-KOS

Rotor-Raumzeiger, transformiert in Ständer-KOS

$\underline{\psi}_R(t) = \psi_R^a(t) + j\psi_R^b(t) = \psi_R = L_R i_R + L_g \cdot \mathrm{Re}\{\underbrace{\underline{i}_s \cdot e^{-j\vartheta}}\} = L_R \cdot i_R + L_g \cdot (i_s^a \cos\vartheta + i_s^b \sin\vartheta)$

$\mathrm{Re}\{(i_s^a + j i_s^b)(\cos\vartheta - j \sin\vartheta)\} = i_s^a \cos\vartheta + i_s^b \sin\vartheta$

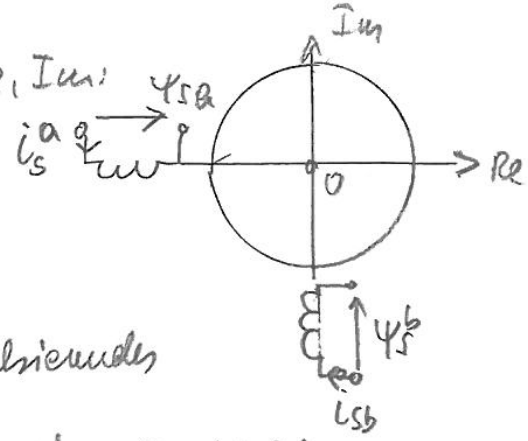
$\psi_R = L_R i_R + L_g \mathrm{Re}\{\underline{i}_s e^{-j\vartheta}\}$

$$\left.\begin{array}{l} u_{sa} = R_s i_s^a + \dot{\psi}_s^a \\ u_{sb} = R_s i_s^b + \dot{\psi}_s^b \quad \times j \end{array}\right\} + \Rightarrow u_{sa} + j u_{sb} = \underline{u}_s = R_s \underline{i}_s + \dot{\underline{\psi}}_s$$

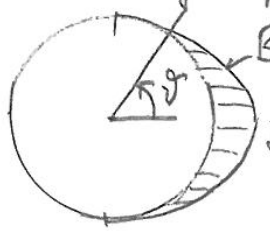
$u_R = R_R i_R + \dot{\psi}_R$

c) Physikalische Bedeutung der Raumzeiger:

Querschnittsebene der Maschine = komplexe Koordinaten Re, Im:



- Ein Strang erregt → Grundwellentheorie: Feldgrundwelle:

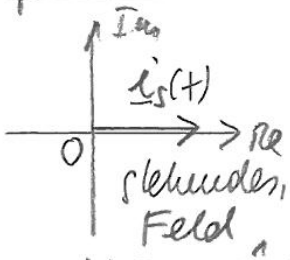


$B(\vartheta,t) = \hat{B}(t)\cdot\cos\vartheta$

$i_s^a(t)$ → Re

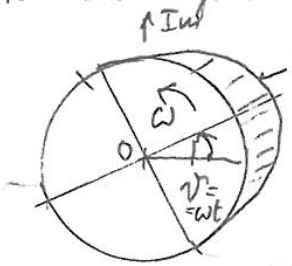
→ $\psi_s^a(t)$

$\underline{i}_s = i_s^a(t)$



stehendes, pulsierendes Feld

- Beide Stränge erregt z.B.: MIT $i_s^a(t) = \hat{I}_s\cos\omega t$, $i_s^b(t) = \hat{I}_s\sin\omega t$ → Drehfeld

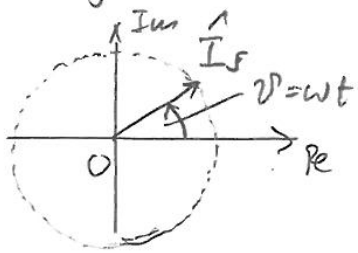


$B(\vartheta,t) = \hat{B}\cos(\vartheta - \omega t)$

$\underline{i}_s = \hat{I}_s\cos\omega t + j\hat{I}_s\sin\omega t = \hat{I}_s e^{j\omega t}$: Raumzeiger rotiert mit ω, Amplitude ist konstant = Drehfeld mit ω und $\hat{B}$ = konst.

$\hat{I}_s \sim \hat{B}$

stets räumlich (ϑ) nur Grundwelle vorausgesetzt!



Raumzeiger-Formalismus für *m*-phasige Systeme

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Raumzeiger im dreiphasigen System (*m* = 3):

$$\underline{I}(t) = \frac{2}{3} \cdot \left[I_U(t) + \underline{a} \cdot I_V(t) + \underline{a}^2 \cdot I_W(t) \right] \qquad \underline{a} = e^{j2\pi/3}$$

Raumzeiger im *m*-phasigen System (*m* = ungerade):

$$\underline{I}(t) = \frac{2}{m} \cdot \left[I_{ph1}(t) + \underline{b} \cdot I_{ph2}(t) + \underline{b}^2 \cdot I_{ph3}(t) + \ldots + \underline{b}^{m-1} \cdot I_{ph,m}(t) \right] \qquad \underline{b} = e^{j2\pi/m}$$

Raumzeiger im *m*-phasigen System (*m* = gerade):

$$\underline{I}(t) = \frac{2}{m} \cdot \left[I_{ph1}(t) + \underline{b} \cdot I_{ph2}(t) + \underline{b}^2 \cdot I_{ph3}(t) + \ldots + \underline{b}^{m-1} \cdot I_{ph,m}(t) \right] \qquad \underline{b} = e^{j\pi/m}$$

Raumzeiger im *2*-phasigen System (*m* = 2: gerade):

$$\underline{I}(t) = \frac{2}{2} \cdot \left[I_a(t) + \underline{b} \cdot I_b(t) \right] = I_a(t) + j \cdot I_b(t) \qquad \underline{b} = e^{j\pi/2} = j$$

$$\underline{u}_s = u_s^a + j\, u_s^b, \qquad \underline{u}_R = u_R^a + j\, u_R^b$$

Raumzeiger-Formeln: Vergleich zur Vorlesung „Energy Converters“

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Statorfest:

$$\dot{\underline{\psi}}_s + R_s \underline{i}_s = \underline{u}_s$$

Rotorfest:

$$\dot{\psi}_R + R_R i_R = u_R$$

Hier: Rotorlagewinkel: ϑ

In der Vorlesung „Energy Converters“: γ

Statorfest (S):

$$\underline{u}_{s(S)}(\tau) = r_s \cdot \underline{i}_{s(S)}(\tau) + \frac{d\underline{\psi}_{s(S)}(\tau)}{d\tau}$$

Rotorfest (R):

$$\underline{u}'_{r(R)}(\tau) = r'_r \cdot \underline{i}'_{r(R)}(\tau) + \frac{d\underline{\psi}'_{r(R)}(\tau)}{d\tau}$$

$$\underline{V}_{(R)} = \underline{V}_{(S)} \cdot e^{-j\gamma}$$

Rotorgleichung im statorfesten Koordinatensystem (S):

$$\underline{u}'_{r(S)} = \underline{u}'_{r(R)} \cdot e^{j\gamma} = r'_r \cdot \underline{i}'_{r(R)} \cdot e^{j\gamma} + \frac{d\underline{\psi}'_{r(R)}}{d\tau} \cdot e^{j\gamma} = r'_r \cdot \underline{i}'_{r(S)} + \frac{d\underline{\psi}'_{r(S)}}{d\tau} - j \cdot \frac{d\gamma}{d\tau} \cdot \underline{\psi}'_{r(S)}$$

$$\frac{d\left(\underline{\psi}_r(\tau) \cdot e^{j\gamma(\tau)}\right)}{d\tau} = e^{j\gamma(\tau)} \cdot \frac{d\underline{\psi}_r(\tau)}{d\tau} + \underline{\psi}_r(\tau) \cdot \frac{d\left(e^{j\gamma(\tau)}\right)}{d\tau} = e^{j\gamma(\tau)} \cdot \frac{d\underline{\psi}_r(\tau)}{d\tau} - j \cdot \underline{\psi}_r(\tau) \cdot e^{j\gamma(\tau)} \cdot \frac{d(\gamma(\tau))}{d\tau}$$

Raumzeiger-Formeln: Vergleich zur Vorlesung „Energy Converters“

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Flussverkettungsgleichungen:

Statorgrößen: Statorfest

$$\underline{\Psi}_s = L_s \underline{i}_s + L_g \underline{i}_R e^{j\vartheta},$$

Rotorgrößen: Rotorfest

$$\underline{\Psi}_R = L_R \underline{i}_R + L_g \underline{i}_s e^{-j\vartheta},$$

Hier: Rotorlagewinkel: ϑ

In der Vorlesung „Energy Converters“: γ

Alle Größen statorfest:

$$\underline{\psi}_{s(S)} = x_s \cdot \underline{i}_{s(S)} + x_h \cdot \underline{i}'_{r(S)} \qquad \underline{\psi}'_{r(S)} = x_h \cdot \underline{i}_{s(S)} + x'_r \cdot \underline{i}'_{r(S)} \qquad \underline{V}_{(R)} = \underline{V}_{(S)} \cdot e^{-j\gamma}$$

Statorgrößen: Statorfest

$$\underline{\psi}_{s(S)} = x_s \cdot \underline{i}_{s(S)} + x_h \cdot \underline{i}'_{r(R)} e^{j\gamma}$$

Rotorgrößen: Rotorfest

$$\underline{\psi}'_{r(R)} = x_h \cdot \underline{i}_{s(S)} e^{-j\gamma} + x'_r \cdot \underline{i}'_{r(R)}$$

Drehmomentgleichung:

Statorgrößen statorfest, Rotorgrößen rotorfest: $M_e = \mathrm{Im}\{L_g \underline{i}_s \underline{i}_R^* e^{-j\vartheta}\}$

Umrechnung des Rotorstrom-RZ vom stator- ins rotorfeste Koord.system:

$$m_e = \mathrm{Im}\left\{x_h \cdot \underline{i}_{s(S)} \cdot \underline{i}'^*_{r(S)}\right\} = \mathrm{Im}\left\{x_h \cdot \underline{i}_{s(S)} \cdot \underline{i}'^*_{r(R)} \cdot (e^{j\gamma})^*\right\} = \mathrm{Im}\left\{x_h \cdot \underline{i}_{s(S)} \cdot \underline{i}'^*_{r(R)} \cdot e^{-j\gamma}\right\}$$

2) Eine Asynchronmaschine mit Kurzschlußläufer (Modell: rotierendes Wandlersystem mit konstantem Luftspalt, je zwei Stränge in Stator und Rotor, Widerstände R_s bzw. R_R, Rotorstränge kurzgeschlossen) liege an Spannungen

$$u_s^a = -\hat{U}\sin\omega_s t \;, \qquad u_s^b = \hat{U}\cos\omega_s t \;.$$

Verwenden Sie im folgenden die Abkürzungen

$X_s = \omega_s L_s$ ... Statorreaktanz,

$X_R = \omega_s L_R$ ... Rotorreaktanz,

$X_h = \omega_s L_g$ ... Hauptfeldreaktanz,

$\sigma = 1 - L_g^2/(L_s L_R) = 1 - X_h^2/(X_s X_R)$ ... Streukoeffizient,

$s = 1 - \omega_M/\omega_s$ ... Schlupf,

$s_K = R_R/(\sigma X_R)$ ... Kippschlupf für $R_s = 0$.

Spannungsgespeiste ASM: $s_K = \frac{R_R}{\sigma X_R}$

Unterschied zu S 30

im 3-phasigen Fall: $\sigma = 1 - \frac{X_h^2}{X_s X_R} \neq 1 - \frac{L_g^2}{L_s L_R}$

m=3: $L_h = (3/2)\cdot L_{ph}$

a) Finden Sie für den stationären Betrieb ($\vartheta = \omega_M t - \gamma$; ω_M, γ ... konst.) die expliziten Ausdrücke der Raumzeigergleichungen

$$\dot{\underline{\Psi}}_s + R_s \underline{i}_s = \underline{u}_s \;, \qquad \dot{\underline{\Psi}}_R + R_R \underline{i}_R = \underline{u}_R$$

durch Einsetzen der Flußverkettungen aus Beispiel 1a) und der Stator- und Rotorspannungen.

b) Lösen Sie die Gleichungen durch Eintragen der komplexen Ansätze

$$\underline{i}_s = \hat{\underline{I}}_s e^{j\omega_s t}, \quad \underline{i}_R = \hat{\underline{I}}_R e^{j\omega_R t}, \quad \omega_R = \omega_s - \omega_M = s\,\omega_s,$$

drücken Sie die komplexen Amplituden $\hat{\underline{I}}_s, \hat{\underline{I}}_R$ unter Vernachlässigung des Statorwiderstandes ($R_s = 0$) aus und skizzieren Sie die Ortskurven $\hat{\underline{I}}_s(s)$, $\hat{\underline{I}}_R'(s)^{(*)}$ mit dem Schlupf s als Lastparameter. Markieren Sie insbesondere die Punkte zu $s=0$ (synchroner Lauf), $s=1$ (Stillstand), $s=\infty$ (ideller Kurzschluß) und $\pm s_K$ (Kippschlupf, max. |Drehmoment|) z.B. für $\sigma = 0{,}1$, $s_K = 0{,}2$. Welche Bereiche auf den Ortskurven gehören zu einem generatorischen, welche zu einem motorischen Betriebszustand? $\left(^{(*)}\ \underline{I}_R' = \hat{\underline{I}}_R\, e^{-j\vartheta} X_h/X_s\right)$ [illegible]

c) Zeigen Sie, daß für das elektromechanisch erzeugte Drehmoment der Ausdruck ($R_s = 0$)

$$M_e = \mathrm{Im}\left\{L_\sigma \underline{i}_s \underline{i}_R^* e^{-j\vartheta}\right\} = M_K \frac{2}{s/s_K + s_K/s}, \quad M_K = \frac{1-\sigma}{2\sigma}\frac{\hat{U}^2}{\omega_s X_s}$$

gilt und skizzieren Sie den Verlauf über der mechanischen Winkelgeschwindigkeit.

<u>Lösung</u>: b) $\hat{\underline{I}}_s = \frac{\hat{U}}{X_s} \frac{1}{\sigma} \frac{j\sigma s_k - s}{j s_k - s}$, $\hat{\underline{I}}_R = \frac{\hat{U}}{X_h} \frac{1-\sigma}{\sigma} \frac{s}{j s_k - s} e^{j\gamma}$

Die Ortskurven sind Kreise mit Mittelpunkten $\frac{1+\sigma}{2\sigma} \frac{\hat{U}}{X_s}$ bzw. $-\frac{1-\sigma}{2\sigma} \frac{\hat{U}}{X_s}$

und Radien $\frac{1-\sigma}{2\sigma} \frac{\hat{U}}{X_s}$.

$$\sigma X_R = X_R - \frac{X_h^2}{X_s}$$

$$s_k = \frac{R_R}{X_R - \frac{X_h^2}{X_s}}$$

Lösung: Aufgabe 2)

a) $\underline{u}_s = R_s \underline{i}_s + \dot{\underline{\psi}}_s = R_s \underline{i}_s + L_s \dot{\underline{i}}_s + L_g \dot{\underline{i}}_R e^{j\vartheta} + L_g \underline{i}_R \cdot e^{j\vartheta} \cdot j\dot{\vartheta} = -\hat{U} \sin\omega_s t + j\hat{U}\cos\omega_s t$

$\underline{u}_R = R_R \underline{i}_R + \dot{\underline{\psi}}_R = R_R \underline{i}_R + L_R \dot{\underline{i}}_R + L_g \dot{\underline{i}}_s e^{-j\vartheta} - L_g \underline{i}_s \cdot j\dot{\vartheta} \cdot e^{-j\vartheta} = 0 + j0 = 0$

$\dot{\vartheta} = \frac{d}{dt}(\omega_M t - \varphi) = \omega_M, \quad e^{j\vartheta} = e^{j\omega_M t} e^{-j\varphi}$

$$\left.\begin{aligned} &(1)\ R_s \underline{i}_s + L_s \dot{\underline{i}}_s + L_g \dot{\underline{i}}_R e^{j\omega_M t} e^{-j\varphi} + j\omega_M L_g \underline{i}_R e^{j\omega_M t} \cdot e^{-j\varphi} = j\hat{U} e^{j\omega_s t} \\ &(2)\ R_R \underline{i}_R + L_R \dot{\underline{i}}_R + L_g \dot{\underline{i}}_s e^{-j\omega_M t} \cdot e^{j\varphi} - j\omega_M L_g \underline{i}_s e^{-j\omega_M t} \cdot e^{+j\varphi} = 0 \end{aligned}\right\} \text{Unbekannte } \underline{i}_s(t), \underline{i}_R(t)$$

b) Ansatz für (1), (2): stationäre Lösung: $\underline{i}_s = \hat{\underline{I}}_s e^{j\omega_s t}$, $\underline{i}_R = \hat{\underline{I}}_R e^{j\omega_R t}$, $\omega_R = \omega_s - \omega_M = s \cdot \omega_s$

$\omega_M = \omega_s - \omega_R = (1-s)\omega_s$

- Einschaltvorgang (homogene Lösung) vernachlässigt!
- Spannungsfall $R_s \underline{i}_s$ vernachlässigt!

(1) $L_s \cdot j\omega_s \hat{\underline{I}}_s e^{j\omega_s t} + L_g \cdot j\omega_R \hat{\underline{I}}_R e^{j\omega_R t} \cdot e^{j\omega_M t} e^{-j\varphi} + j\omega_M L_g \hat{\underline{I}}_R e^{j\omega_R t} \cdot e^{j\omega_M t} \cdot e^{-j\varphi} = j\hat{U} e^{j\omega_s t}$

stationäre Lösung nur bei $\omega_R + \omega_M = \omega_s$, dann entfällt $e^{j\omega_s t}$ aus (1)

$j\omega_s L_s \hat{\underline{I}}_s + js \cdot \omega_s L_g \hat{\underline{I}}_R e^{-j\varphi} + j(1-s)\omega_s L_g \hat{\underline{I}}_R e^{-j\varphi} = j\hat{U}$

(2) $R_R \hat{\underline{I}}_R e^{j\omega_R t} + j\omega_R L_R \hat{\underline{I}}_R e^{j\omega_R t} + j\omega_s L_g \hat{\underline{I}}_s \underbrace{e^{j\omega_s t} e^{-j\omega_M t}}_{e^{j\omega_R t}} e^{j\varphi} - j\omega_M L_g \hat{\underline{I}}_s \underbrace{e^{j\omega_s t} e^{-j\omega_M t}}_{e^{j\omega_R t}} e^{+j\varphi} = 0$

$R_R \hat{\underline{I}}_R + js\omega_s L_R \hat{\underline{I}}_R + j\omega_s L_g \cdot \hat{\underline{I}}_s e^{j\varphi} - j(1-s) \cdot \omega_s \cdot L_g \hat{\underline{I}}_s e^{j\varphi} = 0$

$$(1):\ jX_s \hat{\underline{I}}_s + jX_h \hat{\underline{I}}_R e^{-j\kappa} = j\hat{U} \qquad (2):\ (R_R + jsX_R)\hat{\underline{I}}_R + jsX_h \hat{\underline{I}}_s e^{j\kappa} = 0$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} jX_s & jX_s \\ js(1-\sigma)X_R & R_R + jsX_R \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} \hat{\underline{I}}_s \\ \hat{\underline{I}}_R' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j\hat{U} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Det}(M) = jX_s\left[R_R + jsX_R - js(1-\sigma)X_R\right]$$

$$\hat{\underline{I}}_s = \begin{vmatrix} j\hat{U} & jX_s \\ 0 & R_R + jsX_R \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{\mathrm{Det}(M)} = \frac{j\hat{U}\cdot(R_R + jsX_R)}{\mathrm{Det}(M)}$$

$$\hat{\underline{I}}_R' = \begin{vmatrix} jX_s & j\hat{U} \\ js(1-\sigma)X_R & 0 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{\mathrm{Det}(M)} = \frac{-j\hat{U}\,js(1-\sigma)X_R}{\mathrm{Det}(M)}$$

$$(1)':\ jX_s \hat{\underline{I}}_s + jX_s \underbrace{\frac{X_h}{X_s}\hat{\underline{I}}_R e^{-j\kappa}}_{\hat{\underline{I}}_R'} = j\hat{U}$$

$$(2)':\ (R_R + jsX_R)\cdot \underbrace{\frac{X_h}{X_s}\hat{\underline{I}}_R e^{-j\kappa}}_{\hat{\underline{I}}_R'} + js\underbrace{\frac{X_h^2}{X_s}}\hat{\underline{I}}_s = 0$$

$$\frac{X_h^2}{X_s} = \underbrace{\frac{X_h^2}{X_s X_R}}_{1-\sigma} X_R = X_R\cdot(1-\sigma)$$

$$\hat{\underline{I}}_s = -j\hat{U}\cdot\frac{R_R + jsX_R}{jX_s\cdot(R_R + js\sigma X_R)}$$

$$\hat{\underline{I}}_R' = \hat{U}\cdot\frac{s\cdot(1-\sigma)X_R}{jX_s\cdot(R_R + js\sigma X_R)}$$

Übersetzungsverhältnis:

$\hat{\underline{I}}_R' = \hat{\underline{I}}_R e^{-j\kappa}\cdot\frac{X_h}{X_s}$, $\ddot{u} = \frac{X_s}{X_h}$, Phasendrehung $e^{-j\kappa}$

Schlupf $s = \omega_R/\omega_s = 1 - \omega_M/\omega_s$

Kippschlupf $s_k = R_R/(\sigma X_R)$

$$\underline{\hat{U}} = j\hat{U} \quad \begin{cases} \hat{\underline{I}}_s = \hat{U}\,\dfrac{\frac{R_R}{X_R} + js}{\sigma X_s(s_k + js)} = \dfrac{\hat{U}}{\sigma X_s}\cdot\dfrac{\sigma s_k + js}{s_k + js} \\[2ex] \hat{\underline{I}}_R' = \dfrac{\hat{U}}{j\sigma X_s}\cdot\dfrac{s\cdot(1-\sigma)}{s_k + js} \\[2ex] \hat{\underline{I}}_R = \dfrac{\hat{U}}{j\sigma X_h}\cdot\dfrac{s\cdot(1-\sigma)}{s_k + js}\cdot e^{j\kappa} \end{cases}$$

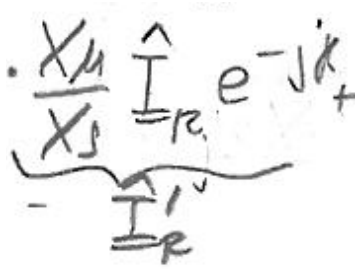
$s_k = 0{,}2,\ \sigma = 0{,}1$: $\hat{\underline{I}}_s = \frac{\hat{U}}{\sigma X_s}\cdot 0\cdot\frac{0{,}02 + js}{0{,}2 + js}$

$$\hat{\underline{I}}_R' = \frac{\hat{U}}{\sigma X_s}\cdot\frac{1}{j}\cdot\frac{9s}{0{,}2 + js}$$

$s = 0$: $\hat{\underline{I}}_{s0} = \frac{\hat{U}}{X_s}$, $\hat{\underline{I}}_{R0}' = 0$ $\quad s\to\infty$: $\hat{\underline{I}}_{s\infty} = \frac{\hat{U}}{\sigma X_s} = 10\cdot\hat{\underline{I}}_{s0}$, $\hat{\underline{I}}_{R\infty}' = \left(\frac{1-\sigma}{j}\right)\frac{\hat{U}}{j\sigma X_s} = -\left(\frac{1}{\sigma} - 1\right)\cdot\frac{\hat{U}}{X_s} = -9\hat{\underline{I}}_{s0}$

Rotorstromumrechung auf die Statorseite:

<u>Achtung:</u> hier: Rotorstromumrechung so, dass der Magnetisierungsstrom I_m unabhängig vom Schlupf KONSTANT ist.

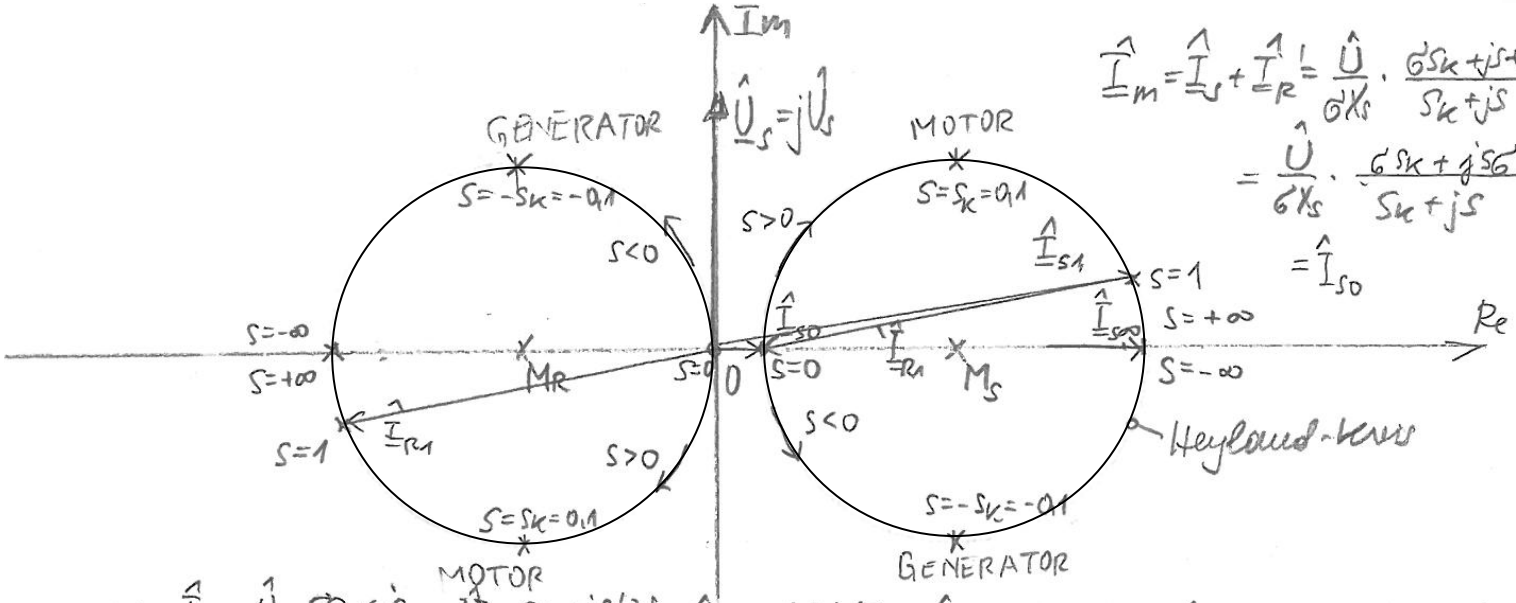


$$\underline{I}'_r e^{j\gamma} = \frac{X_h}{X_s}\underline{I}_r = \frac{X_h}{(1+\sigma_s)\cdot X_h \cdot (N_S/N_R)}\underline{I}_r = \frac{\underline{I}_r/\ddot{u}}{1+\sigma_s}$$

$$X_h \sim L_g \sim N_S N_R \qquad X_S \sim L_S \sim N_S N_S$$

<u>Klassische Rotorstromumrechung</u> über das Übersetzungsverhältnis; dann ist der Magnetisierungsstrom I_m vom Schlupf abhängig und beschreibt als Ortskurve ebenfalls einen Kreis!

$$\underline{I}_r e^{j\omega_r t} = I_r \cdot e^{j(-2\pi\cdot n\cdot p+\omega_s)t} \cdot e^{-j\gamma_{r0}} \qquad \underline{I}'_r = \frac{\underline{I}_r}{\ddot{u}_I} = \left.\frac{\underline{I}_r}{\ddot{u}_U}\right|_{m_S=m_R} = \frac{\underline{I}_r}{\ddot{u}}$$



$$\hat{I}_m = \hat{I}_s + \hat{I}_R = \frac{\hat{U}}{\sigma X_s} \cdot \frac{\sigma s_k + js + (\sigma - 1)js}{s_k + js} = \frac{\hat{U}}{\sigma X_s} \cdot \frac{\sigma s_k + js\sigma}{s_k + js} = \frac{\hat{U}}{X_s} = \hat{I}_{s0}$$

$s = \pm s_k$:

$$\hat{I}_{sk} = \frac{\hat{U}}{\sigma X_s} \cdot \frac{\sigma s_k + js}{s_k + js} = \frac{\hat{U}}{X_s} \cdot \frac{s_k + js/\sigma}{s_k + js}\Bigg|_{s = \pm s_k} = \hat{I}_{s0} \cdot \frac{1 \pm j/\sigma}{1 \pm j \cdot 1} = \hat{I}_{s0} \cdot \frac{1 \pm 10j}{1 \pm j} = \hat{I}_{s0} \cdot \frac{(1 \pm 10j)(1 \mp j)}{2} = \hat{I}_{s0} \cdot (11 \pm 9j) \cdot \frac{1}{2}$$

$$\hat{I}_{sk} = \hat{I}_{s0}(5{,}5 \pm 4{,}5j)$$

$$\hat{I}'_{Rk} = \frac{\hat{U}}{jX_s} \cdot \frac{s \cdot (\frac{1}{\sigma} - 1)}{s_k + js} = -j\,\hat{I}_{s0} \cdot \frac{s(\frac{1}{\sigma} - 1)}{s_k + js}\Bigg|_{s = \pm s_k} = -j\,\hat{I}_{s0} \cdot \frac{9 \cdot (\pm 0{,}1)}{0{,}1(1 \pm j)} = -j\,\hat{I}_{s0} \frac{\pm 9}{1 \pm j} = \begin{cases} -j\,\hat{I}_{s0} \cdot 4{,}5(1 - j) \\ +j\,\hat{I}_{s0}\, 4{,}5 \cdot (1 + j) \end{cases}$$

$$\hat{I}'_{Rk} = \hat{I}_{s0} \cdot 4{,}5(-1 \mp j)$$

$s = 1$:

$$\hat{I}_{s1} = \hat{I}_{s0} \cdot \frac{s_k + j/\sigma}{s_k + j} = \hat{I}_{s0} \cdot \frac{0{,}2 + j10}{0{,}2 + j} = \hat{I}_{s0} \frac{10{,}04 + j1{,}8}{1{,}04} = \hat{I}_{s0}(9{,}65 + j1{,}73)$$

$$\hat{I}_{R1} = \hat{I}_{s0} \cdot \frac{1}{j} \cdot \frac{(1 - 6)/\sigma}{s_k + j}\Bigg|_{s=1} = -j\,\hat{I}_{s0} \cdot \frac{9}{0{,}2 + j} = \hat{I}_{s0} \cdot (-8{,}65 - j1{,}73)$$

Da bei $R_S = 0$ der Magnetisierungsstrom unabhängig von s konstant der Leerlaufstrom $I_m = I_{S0}$ ist, gilt einfach $\underline{\hat{I}}_R = \underline{\hat{I}}_S - \underline{\hat{I}}_{S0}$; daher beschreiben beide Ortskurven kreise den selben Radius: $2R = \hat{I}_{S\infty} - \hat{I}_{S0} = \frac{\hat{U}}{X_S} \cdot \left(\frac{1}{\sigma} - 1\right) \Rightarrow R = \frac{\hat{U}}{X_S} \cdot \frac{1-\sigma}{2\sigma}$.

$$R = \hat{I}_{S0} \cdot \frac{1-0{,}1}{2 \cdot 0{,}1} = 4{,}5\,\hat{I}_{S0}$$

Lage der Kreismittelpunkte: $\overline{OM_S} \mathrel{\hat{=}} \hat{I}_{S0} + R = \hat{I}_{S0}\left(1 + \frac{1-\sigma}{2\sigma}\right) = \hat{I}_{S0} \cdot \left(\frac{1+\sigma}{2\sigma}\right) = 5{,}5 \cdot \hat{I}_{S0}$

$$\overline{OM_R} \mathrel{\hat{=}} -\hat{I}_{R\infty}/2 = -\left(\frac{1-\sigma}{2\sigma}\right)\hat{I}_{S0} = -4{,}5\,\hat{I}_{S0}$$

Der Zeiger $\hat{I}_R$ ist gegenüber $\hat{I}_R'$ um γ nacheilend. Dieser Winkel ist durch die Lage des Läufers bei Stillstand ($\vartheta = \omega_M t + \gamma = \gamma$ ($\omega_M = 0$)) bzw. bei Stromvorgabe ($\vartheta = \omega_M t + \gamma$, $t = 0$) bestimmt und hat auf die relative Lage von Ständer- zu Läuferfeld KEINEN Einfluß. Bei der Synchronmaschine wird er zum <u>Polradwinkel</u>.

c)

$$M_e = \mathrm{Im}\left\{L_h \cdot \underline{i}_s \cdot \underline{i}_R^* e^{-j\gamma}\right\} = \mathrm{Im}\left\{L_h \cdot \underline{\hat{I}}_s \cdot e^{j\omega_s t} \cdot \underline{\hat{I}}_R^* \cdot e^{-j\omega_R t} \cdot e^{-j(\omega_M t - \gamma)}\right\} =$$

$$= \mathrm{Im}\left\{L_h \underline{\hat{I}}_s \underline{\hat{I}}_R^* \cdot e^{j\underbrace{(\omega_s - \omega_R - \omega_M)}_{0}t} \cdot e^{j\gamma}\right\} = \mathrm{Im}\left\{L_h \frac{\hat{U}}{\sigma X_s} \cdot \frac{\sigma s_k + js}{s_k + js} \cdot \frac{\hat{U}}{\sigma X_s} \cdot \frac{js(1-\sigma)}{s_k - js} \cdot \frac{X_s}{X_h} \cdot \underbrace{e^{-j\gamma} \cdot e^{j\gamma}}_{1}\right\} =$$

$$= \mathrm{Im}\left\{L_h \left(\frac{\hat{U}}{\sigma X_s}\right)^2 \cdot \frac{-s^2 + js\sigma s_k}{s_k^2 + s^2} \cdot \frac{X_s}{X_h}(1-\sigma)\right] = \omega_s L_h \frac{\hat{U}^2}{\sigma^2 X_s^2} \cdot \frac{1}{\omega_s} \cdot \frac{X_s}{X_h}(1-\sigma) \cdot \frac{s \cdot \sigma s_k}{s_k^2 + s^2} = \underbrace{\frac{1-\sigma}{\sigma \cdot 2} \frac{\hat{U}^2}{\omega_s X_s}}_{M_k} \cdot \underbrace{\frac{s \cdot s_k}{s_k^2 + s^2} \cdot 2}_{\frac{2}{\frac{s_k}{s} + \frac{s}{s_k}}}$$

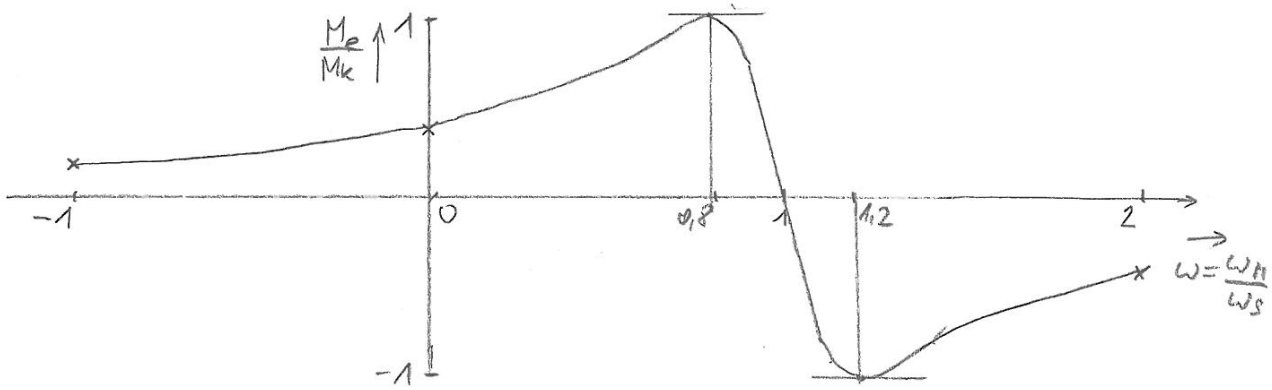
$$M_e = M_k \cdot \frac{2}{\frac{s_k}{s} + \frac{s}{s_k}}$$ klass'sche Beziehung

$$M_e / M_k = \frac{2 s s_k}{s_k^2 + s^2} = \frac{2 s_k (1-\omega)}{s_k^2 + 1 - 2\omega + \omega^2}$$

$\omega_M = \omega_s - \omega_R = (1-s)\omega_s \Rightarrow s = 1 - \omega_M/\omega_s = 1 - \omega$

$\omega = 0$: $M_e/M_k = \frac{2 s_k}{s_k^2 + 1} = \frac{2 \cdot 0{,}2}{0{,}04 + 1} = 0{,}38$

$\omega = 0{,}8$: $M_e = M_k$ $\quad \omega = 1{,}2$: $M_e = M_k$

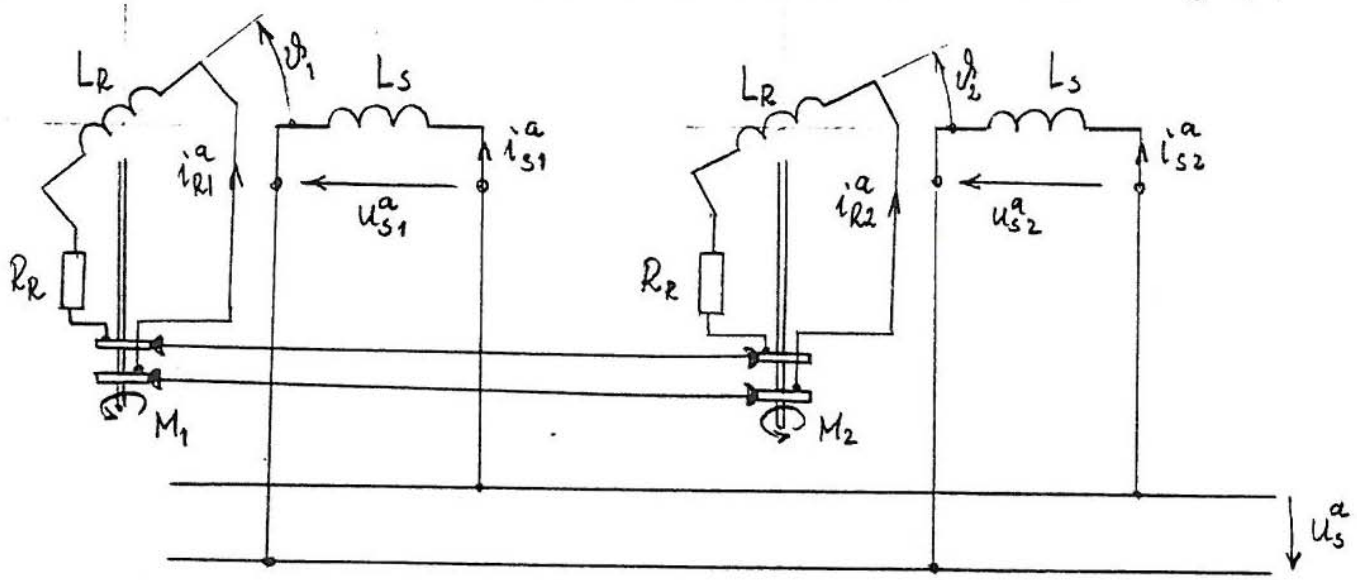


$\omega = 2$: $M_e/M_k = -0{,}4$

$\omega = -1$: $M_e/M_k = 0{,}198$

3) Die Grundausführung einer sogenannten elektrischen Welle besteht aus zwei gleichen Asynchronmaschinen, deren Ständerstränge am gleichen speisenden Netz liegen und deren Rotorstränge über Schleifringe und Bürsten zusammengeschaltet sind.

Schema (analog für die dazu räumlich versetzten Stränge):



Im stationären Betrieb drehen sich beide Maschinen mit der gleichen Drehzahl, $\omega_M = \omega_{M1} = \omega_{M2}$. In bezug auf die mechanischen Anschlüsse (Wellenenden) wirkt die Anordnung ähnlich einer mechanischen Welle: Sie entwickelt zunächst kein resultierendes Drehmoment, erzeugt aber bei einer relativen Verdrehung $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ der beiden Wellenenden gegeneinander ein Ausgleichsmoment $M_{e1} - M_{e2}$. Vorteil: Abstand und relative Lage der beiden Wellenenden belanglos.

a) Lösen Sie die Raumzeigergleichungen beider Maschinen (Modell mit je zwei Strängen) für stationären Betrieb mit

$$\left.\begin{aligned} u_{s1}^a &= u_{s2}^a = -\hat{U}\sin\omega_s t, \\ u_{s1}^b &= u_{s2}^b = \hat{U}\cos\omega_s t, \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} i_{R1}^a &= -i_{R2}^a \\ i_{R1}^b &= -i_{R2}^b \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \vartheta_1 &= \omega_M t - \gamma_1 \\ \vartheta_2 &= \omega_M t - \gamma_2 \end{aligned}\right\}$$

unter Verwendung der Abkürzungen aus Beispiel 2) und Vernachlässigung der Statorwiderstände ($R_s = 0$) über die Ansätze

$$\underline{i}_{s1} = \underline{\hat{I}}_{s1} e^{j\omega_s t}, \quad \underline{i}_{s2} = \underline{\hat{I}}_{s2} e^{j\omega_s t}, \quad \underline{i}_R = \underline{i}_{R1} = -\underline{i}_{R2} = \underline{\hat{I}}_R e^{j\omega_R t}$$

nach den Strömen auf und berechnen Sie die Ausdrücke für das Summenmoment $M_{e1} + M_{e2}$ und das Differenzmoment $M_{e1} - M_{e2}$. Diskutieren Sie die Abhängigkeit von der gemeinsamen mechanischen Winkelgeschwindigkeit ω_M und vom relativen Verdrehwinkel $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$.

b) Die beiden Statoren sollen nun nicht parallel, sondern in Serie an ein speisendes Netz doppelter Spannung gelegt werden:

$$u_{s1}^a + u_{s2}^a = u_s^a = -2\hat{U}\sin\omega_s t,$$

$$u_{s1}^b + u_{s2}^b = u_s^b = 2\hat{U}\cos\omega_s t.$$

Berechnen Sie $M_{e1}+M_{e2}$ und $M_{e1}-M_{e2}$ und vergleichen Sie die Ausdrücke mit dem Ergebnis für die Parallelschaltung anhand einer Skizze.

Die Momente bei Reihenschaltung sind nur etwa 1/10 der Momente bei Ill.-Sch.

Lösung:

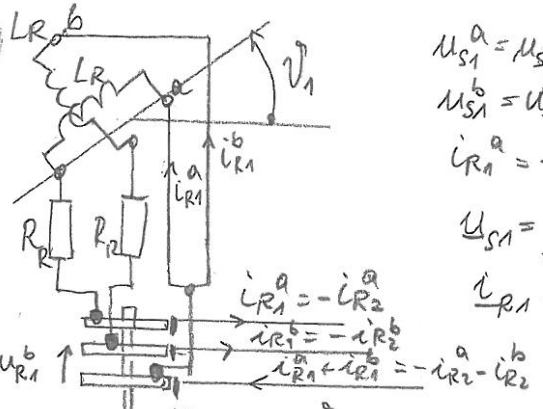
a) $M_{e1}-M_{e2} = 2M_K \dfrac{\sin\gamma}{1+(s_K/s)^2}$, $M_{e1}+M_{e2} = 2M_K \dfrac{1-\cos\gamma}{s/s_K+s_K/s}$, mit $M_K = \dfrac{1-\sigma}{2\sigma}\dfrac{\hat{U}^2}{\omega_s X_s}$

b) $M_{e1}-M_{e2} = 2M_K \dfrac{\sigma\sin\gamma}{\left(\frac{\sigma s_K}{s}\right)^2+\left[1-\frac{1-\sigma}{2}(1-\cos\gamma)\right]^2}$, $M_{e1}+M_{e2} = 2M_K \dfrac{\sigma^2\frac{s_K}{s}(1-\cos\gamma)}{\left(\frac{\sigma s_K}{s}\right)^2+\left[1-\frac{1-\sigma}{2}(1-\cos\gamma)\right]^2}$

Lösung: Aufgabe 3) a)

Lösung: Aufgabe 3)

Maschinen 1 und 2 mit den Strängen:
Stator: a, b (S)
Rotor: a, b (R)



$u_{S1}^a = u_{S2}^a = -\hat{U} \sin \omega_s t \qquad R_S = 0$

$u_{S1}^b = u_{S2}^b = \hat{U} \cos \omega_s t$

$i_{R1}^a = -i_{R2}^a \qquad i_{R1}^b = -i_{R2}^b, \; u_{R1}^a = u_{R2}^a, \; u_{R1}^b = u_{R2}^b$

$\underline{u}_{S1} = j\hat{U} e^{j\omega_s t} = \underline{u}_{S2} \Rightarrow \underline{u}_{S1} = \dot{\underline{\Psi}}_{S1} = \underline{u}_{S2} = \dot{\underline{\Psi}}_{S2} = \underline{u}_S$

$\underline{i}_{R1} = i_{R1}^a + j i_{R1}^b = -i_{R2}^a - j i_{R2}^b = -\underline{i}_{R2}$

$$\left.\begin{aligned} \dot{\underline{\Psi}}_{R1} + R_R \underline{i}_{R1} &= \underline{u}_{R1} \\ \dot{\underline{\Psi}}_{R2} + R_R \underline{i}_{R2} &= \underline{u}_{R2} \end{aligned}\right\} \underline{u}_{R1} = \underline{u}_{R2}$$

$$\dot{\underline{\Psi}}_{R1} + R_R \underline{i}_{R1} = \dot{\underline{\Psi}}_{R2} - R_R \underline{i}_{R1}$$

(b) Berechnung der Ströme:

1. Maschine: Stator:

Achtung: I.a. ist $\underline{i}_{S1} = i_{S1}^a + j i_{S1}^b \neq \underline{i}_{S2} = i_{S2}^a + j i_{S2}^b$

(1): $L_s \cdot \dot{\underline{i}}_{S1} + L_g \cdot \dot{\underline{i}}_{R1} \cdot e^{j\vartheta_1} + L_g \cdot \underline{i}_{R1} \cdot e^{j\vartheta_1} \cdot j\dot{\vartheta}_1 = \underline{u}_S$, stationär: $\omega_{M1} = \omega_{M2} = \omega_M$

$\vartheta_1 = \omega_M t - \gamma_1, \; \dot{\vartheta}_1 = \omega_M$

$L_s \cdot j\omega_s \hat{\underline{I}}_{S1} + j\omega_R \cdot L_g \cdot \hat{\underline{I}}_R \cdot e^{-j\gamma_1} + j\omega_M L_g \hat{\underline{I}}_R \cdot e^{-j\gamma_1} = \hat{\underline{U}}_S$

$\underline{u}_S = j\hat{U} e^{j\omega_s t} \Rightarrow \underline{i}_{S1} = \hat{\underline{I}}_{S1} e^{j\omega_s t}, \; \underline{i}_{S2} = \hat{\underline{I}}_{S2} e^{j\omega_s t}$

$j X_s \hat{\underline{I}}_{S1} + j s \cdot \omega_s X_h \hat{\underline{I}}_R e^{-j\gamma_1} + j(1-s)\omega_s X_h \hat{\underline{I}}_R e^{-j\gamma_1} = \hat{\underline{U}}_S$

$\hat{\underline{I}}_{R1} \cdot e^{j\omega_R t} = \underline{i}_{R1} = \hat{\underline{I}}_R e^{j\omega_R t} = -\underline{i}_{R2} = -\hat{\underline{I}}_{R2} e^{j\omega_R t}$

$j X_s \hat{\underline{I}}_{S1} + j X_h \hat{\underline{I}}_R \cdot e^{-j\gamma_1} = j X_s \Big(\hat{\underline{I}}_{S1} + \underbrace{\frac{X_h}{X_s} \hat{\underline{I}}_R e^{-j\gamma_1}}_{\hat{\underline{I}}'_{R1}} \Big) = \hat{\underline{U}}_S$

$\omega_M + \omega_R = \omega_s, \; \hat{\underline{I}}_{R1} = \hat{\underline{I}}_R = -\hat{\underline{I}}_{R2}$

(1)' $j X_s \left(\hat{\underline{I}}_{S1} + \hat{\underline{I}}'_{R1} \right) = \hat{\underline{U}}_S$

(2): analog: 2. Maschine: Stator: $j X_s \left(\hat{\underline{I}}_{S2} + \hat{\underline{I}}'_{R2} \right) = \hat{\underline{U}}_S$

$\hat{\underline{I}}'_{R1} = \frac{X_h}{X_s} \hat{\underline{I}}_R e^{-j\gamma_1}, \quad \hat{\underline{I}}'_{R2} = -\frac{X_h}{X_s} \hat{\underline{I}}_R e^{-j\gamma_2}$

Beide gekoppelte Rotoren:

$$\dot{\Psi}_{R1} - \dot{\Psi}_{R2} + 2R_R \cdot \dot{i}_{R1} = 0$$

$$L_R \dot{i}_{R1} + L_\sigma \dot{i}_{S1} e^{-j\vartheta_1} + L_\sigma \cdot \dot{i}_{S1} \cdot e^{-j\vartheta_1} \cdot (-j\dot{\vartheta}_1) - \left[L_R \dot{i}_{R2} + L_\sigma \dot{i}_{S2} e^{-j\vartheta_2} + L_\sigma \cdot \dot{i}_{S2} \cdot e^{-j\vartheta_2} \cdot (-j\dot{\vartheta}_2)\right] +$$

$$j\omega_R L_R \hat{\underline{I}}_R + j\underbrace{\omega_S}_{\omega_M+\omega_R,\ \omega_R = s\cdot\omega_S} L_\sigma \hat{\underline{I}}_{S1} e^{j\mu_1} - j\omega_M L_\sigma \hat{\underline{I}}_{S1} e^{j\mu_1} - \left[j\omega_R L_R (-\hat{\underline{I}}_R) + j\underbrace{\omega_S}_{\omega_M+\omega_R} L_\sigma \hat{\underline{I}}_{S2} e^{j\mu_2} - j\omega_M L_\sigma \hat{\underline{I}}_{S2} e^{j\mu_2}\right] + 2R_R \dot{i}_{R1} = 0$$

$$+ 2R_R \hat{\underline{I}}_R = 0$$

$$js \cdot X_R \hat{\underline{I}}_R + js X_h \hat{\underline{I}}_{S1} e^{j\mu_1} - \left[-js X_R \hat{\underline{I}}_R + js X_h \hat{\underline{I}}_{S2} e^{j\mu_2}\right] + 2R_R \hat{\underline{I}}_R = 0$$

$$2 \cdot js X_R \hat{\underline{I}}_R + js X_h \left(\hat{\underline{I}}_{S1} e^{j\mu_1} - \hat{\underline{I}}_{S2} e^{j\mu_2}\right) + 2R_R \hat{\underline{I}}_R = 0$$

$$2(R_R + js X_R)\hat{\underline{I}}_R + js X_h \left(\hat{\underline{I}}_{S1} e^{j\mu_1} - \hat{\underline{I}}_{S2} e^{j\mu_2}\right) = 0$$

$$2(R_R + js X_R)\underbrace{\frac{X_h}{X_S}\hat{\underline{I}}_R e^{-j\mu_1}}_{\hat{\underline{I}}'_{R1}} \cdot \frac{X_S}{X_h} e^{j\mu_1} + js X_h \left(\hat{\underline{I}}_{S1} e^{j\mu_1} - \hat{\underline{I}}_{S2} e^{j\mu_2}\right) = 0 \quad ; \; -\hat{\underline{I}}'_{R2} \cdot e^{j(\mu_2-\mu_1)} = \hat{\underline{I}}'_{R1}$$

$$\mu = \mu_1 - \mu_2$$

$$-\hat{\underline{I}}'_{R2} = e^{j\mu} \cdot \hat{\underline{I}}'_{R1}$$

$$(3)': \; 2 \cdot \frac{X_S}{X_h}(R_R + js X_R) \cdot \hat{\underline{I}}'_{R1} + js X_h \left(\hat{\underline{I}}_{S1} - \hat{\underline{I}}_{S2} e^{-j\mu}\right) = 0$$

$$(2)'': \; jX_S \left(\hat{\underline{I}}_{S2} + \hat{\underline{I}}'_{R2}\right) = jX_S \left(\hat{\underline{I}}_{S2} - \hat{\underline{I}}'_{R1} \cdot e^{j\mu}\right) = \underline{0}_S$$

$$(1)': \; jX_S \cdot \hat{\underline{I}}_{S1} + jX_S \hat{\underline{I}}'_{R1} = \underline{U}_S$$

$$(2)'': \; jX_S \hat{\underline{I}}_{S2} - jX_S \hat{\underline{I}}'_{R1} e^{j\mu} = \underline{0}_S$$

$$(3)': \; js X_h \hat{\underline{I}}_{S1} - js X_h \hat{\underline{I}}_{S2} e^{-j\mu} + 2\frac{X_S}{X_h}(R_R + js X_R)\hat{\underline{I}}'_{R1} = 0$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} jX_s & 0 & jX_s \\ 0 & jX_s & -jX_s e^{j\gamma} \\ jsX_h & -jsX_h e^{-j\gamma} & \frac{2X_s}{X_h}(R_R+jsX_R) \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} \hat{\underline{I}}_{s1} \\ \hat{\underline{I}}_{s2} \\ \hat{\underline{I}}'_{R1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\underline{U}}_s \\ \hat{\underline{U}}_s \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\underline{I}}_{s1} = \frac{1}{\mathrm{Det}(M)} \cdot \begin{vmatrix} \hat{\underline{U}}_s & 0 & jX_s \\ \hat{\underline{U}}_s & jX_s & -jX_s e^{j\gamma} \\ 0 & -jsX_h e^{-j\gamma} & \frac{2X_s}{X_h}(R_R+jsX_R) \end{vmatrix}$$

$$\mathrm{Det}(M) = (jX_s)^2 \cdot \left(\frac{2X_s}{X_h}(R_R+jsX_R) - jsX_h - jsX_h \underbrace{e^{j(\gamma-\gamma)}}_{1} \right) = (jX_s)^2 \cdot \left(\frac{2X_s}{X_h}(R_R+jsX_R) - 2jsX_h \right)$$

$$\hat{\underline{I}}_{s1} = \frac{\hat{\underline{U}}_s \cdot jX_s \left(\frac{2X_s}{X_h}(R_R+jsX_R) - jsX_h \cdot (e^{-j\gamma} + e^{j(\gamma-\gamma)}) \right)}{(jX_s)^2 \left(\frac{2X_s}{X_h}(R_R+jsX_R) - 2jsX_h \right)} = \frac{\hat{\underline{U}}_s}{X_s} \cdot \frac{\frac{X_sX_R}{X_h^2}\left(\frac{R_R}{X_R}+js\right) - j\frac{s}{2}(1+e^{-j\gamma})}{\frac{X_sX_R}{X_h^2}\left(\frac{R_R}{X_R}+js\right) - js} =$$

$$= \frac{\hat{\underline{U}}_s}{X_s} \cdot \frac{\frac{1}{1-\sigma}\cdot(\sigma s_k + js) - j\frac{s}{2}(1+e^{-j\gamma})}{\frac{1}{1-\sigma}(\sigma s_k + js) - js} = \frac{\hat{\underline{U}}_s}{2\sigma X_s} \cdot \frac{j2\sigma s_k - s[1+\sigma - (1-\sigma)\cdot e^{-j\gamma}]}{js_k - s}$$

$$\sigma = 1 - \frac{X_h^2}{X_sX_R}, \quad s_k = \frac{R_R}{\sigma X_R}$$

Kurzschluß: Bei $\gamma_1 = \gamma_2 \Rightarrow \gamma = 0$: $\hat{\underline{I}}_{s1} = \frac{\hat{\underline{U}}_s}{X_s} = \hat{\underline{I}}_{s0}$: Leerlaufstrom, denn dann: $i_{R1} = i_{R2} = 0$, $i'_{R1} = -i'_{R2} = 0$

$$(1): jX_s\hat{\underline{I}}_{s1} + jX_s\hat{\underline{I}}'_{R1} = \hat{\underline{U}}_s \Rightarrow jX_s e^{j\gamma}\hat{\underline{I}}_{s1} + jX_s\hat{\underline{I}}'_{R1}e^{j\gamma} = \hat{\underline{U}}_s e^{j\gamma}$$

$$(2): jX_s\hat{\underline{I}}_{s2} - jX_s\hat{\underline{I}}'_{R1}e^{j\gamma} = \hat{\underline{U}}_s \quad +$$

$$\hat{\underline{I}}_{s1} \cdot e^{j\gamma} + \hat{\underline{I}}_{s2} = \frac{\hat{\underline{U}}_s}{jX_s} \cdot (e^{j\gamma}+1)$$

$$\hat{\underline{I}}_{s2} = \frac{\hat{\underline{U}}_s}{X_s}(e^{j\gamma}+1) - \hat{\underline{I}}_{s1}e^{j\gamma} = \frac{\hat{\underline{U}}_s}{2\sigma X_s} \cdot \frac{(js_k - s)\cdot 2\sigma\cdot(1+e^{j\gamma}) - j2\sigma s_k e^{j\gamma} + s[(1+\sigma)e^{j\gamma} - (1-\sigma)]}{js_k - s}$$

$$\hat{\underline{I}}_{s2} = \frac{\hat{\underline{U}}_s}{2\sigma X_s} \cdot \frac{j2\sigma s_k - s\cdot[1+\sigma - (1-\sigma)e^{j\gamma}]}{js_k - s}$$

(1): $\hat{\underline{I}}'_{R_1} = \frac{\hat{U}_s}{X_s} - \hat{\underline{I}}_{s1} = \frac{\hat{U}_s}{2\sigma X_s} \cdot \frac{2\sigma X_s(js_k - s) - j2\sigma s_k + s(1+\sigma) - s(1-\sigma)e^{-j\mu}}{js_k - s} = \frac{\hat{U}_s}{2\sigma X_s} \cdot \frac{s\cdot(1-\sigma)\cdot(1-e^{-j\mu})}{js_k - s} = -\hat{\underline{I}}'_{R2} \cdot e^{-j\mu}$

$\hat{\underline{I}}'_{R_2} = -\frac{X_h}{X_s}\hat{\underline{I}}_{R2} e^{-j\mu_2} = -(\hat{\underline{I}}'_{R_1} e^{j\mu_1}) e^{-j\mu_2} = -\hat{\underline{I}}'_{R_1} \cdot e^{j\mu}$

Kontrolle: a) $\mu = 0 \Rightarrow \hat{\underline{I}}'_{R_1} = 0 \rightarrow \hat{\underline{I}}'_{R_2} = 0$, da $\hat{\underline{U}}_{R_1} = \hat{\underline{U}}_{R_2}$

b) $s = 0$: Leerlauf: $\hat{\underline{I}}'_{R_1} = 0, \hat{\underline{I}}'_{R2} = 0$

Drehmoment:

$M_{e1} = \mathrm{Im}\{L_\sigma \cdot \underline{i}_{s1} \cdot \underline{i}^*_{R1} \cdot e^{-j\mu_1}\} = \mathrm{Im}\{L_\sigma \cdot \hat{\underline{I}}_{s1} e^{j\omega_s t} \cdot \hat{\underline{I}}^*_{R_1} \cdot e^{-j\omega_R t} \cdot e^{-j\omega_M t + \mu_1}\} =$

$= L_\sigma \, \mathrm{Im}\left\{\frac{\hat{U}_s}{2\sigma X_s} \cdot \frac{j2\sigma s_k - s[1+\sigma-(1-\sigma)\cdot e^{-j\mu}]}{js_k - s} \underbrace{\left(\frac{X_s}{X_h} \cdot e^{j\mu_1} \cdot \hat{\underline{I}}'_{R_1}\right)^* \cdot e^{j\mu_1}}_{\frac{X_s}{X_h} \cdot \hat{\underline{I}}'^*_{R_1}}\right\} =$

$= L_\sigma \frac{\hat{U}_s^2}{X_s X_h} \mathrm{Im}\left\{\frac{j2\sigma s_k - s(1+\sigma-(1-\sigma)e^{-j\mu}}{2\sigma(js_k - s)} \cdot \frac{s(1-\sigma)(1-e^{j\mu})}{(-js_k - s)2\sigma}\right\} =$

$= \cancel{\frac{\omega_s L_\sigma}{X_h}} \cdot \underbrace{\frac{\hat{U}_s^2}{\omega_s X_s} \cdot \frac{1-\sigma}{2\sigma}}_{M_k} \cdot \frac{s}{s^2 + s_k^2} \cdot \frac{1}{2\sigma} \underbrace{\mathrm{Im}\{(j2\sigma s_k - s(1+\sigma-(1-\sigma)e^{-j\mu}) \cdot (1-e^{-j\mu})\}}_{2\sigma\cdot(s_k + s\cdot\sin\mu - s_k\cos\mu)} \Rightarrow$

$\Rightarrow M_{e1} = M_k \cdot \frac{s}{s^2 + s_k^2}[s_k(1-\cos\mu) + s\sin\mu]$

$$M_{e2} = \mathrm{Im}\{L_g \cdot \underline{i}_{S2} \cdot \underline{i}_{R2}^{*} e^{-j\mu_2}\} = \mathrm{Im}\{L_g \cdot \hat{\underline{I}}_{S2} \cdot e^{j\omega_S t} \cdot \hat{\underline{I}}_{R2}^{*} \cdot e^{-j\omega_R t} \cdot e^{-j\omega_M t + \mu_2}\} =$$

$$= L_g \,\mathrm{Im}\left\{\frac{\hat{U}_S}{2\sigma X_S} \cdot \frac{j2\sigma s_k - s\cdot[(1+\sigma)-(1-\sigma)e^{j\mu}]}{j s_k - s} \cdot \underbrace{\left(+\frac{X_S}{X_h} \cdot e^{+j\mu_2} \hat{\underline{I}}'_{R2}\right)^{*} \cdot e^{j\mu_2}}_{\frac{X_S}{X_h} \cdot \hat{\underline{I}}'^{*}_{R2}}\right\} =$$

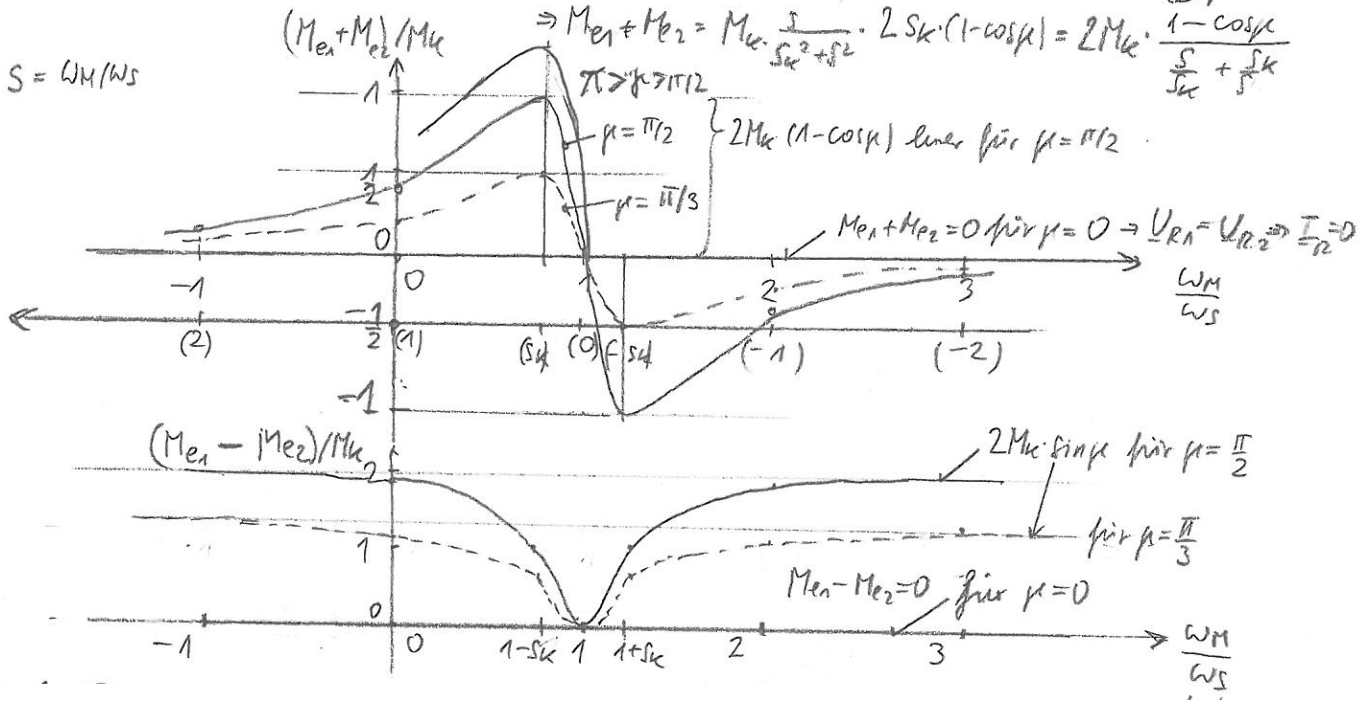
$$= L_g \,\mathrm{Im}\left\{\frac{\hat{U}_S^2}{(2\sigma)\cancel{X_h} X_S} \cdot \frac{j2\sigma s_k - s\cdot[(1+\sigma)-(1-\sigma)\cdot e^{j\mu}]}{j s_k - s} \cdot \frac{s\cdot(1-\sigma)\cdot(1-e^{j\mu})}{-j s_k - s}\right\} =$$

$$= \underbrace{\frac{\cancel{\omega_S} L_g}{\cancel{X_h}} \cdot \frac{\hat{U}_S^2}{2\sigma \omega_S X_S} \cdot \frac{(1-\sigma)}{2\sigma}}_{M_k} \cdot \frac{s}{s_k^2+s^2} \cdot \underbrace{\mathrm{Im}\{(j2\sigma s_k - s(1+\sigma-(1-\sigma)e^{j\mu}))\cdot(1-e^{j\mu})]}_{2\sigma(s_k - s\cdot\sin\mu - s_k\cdot\cos\mu)} =$$

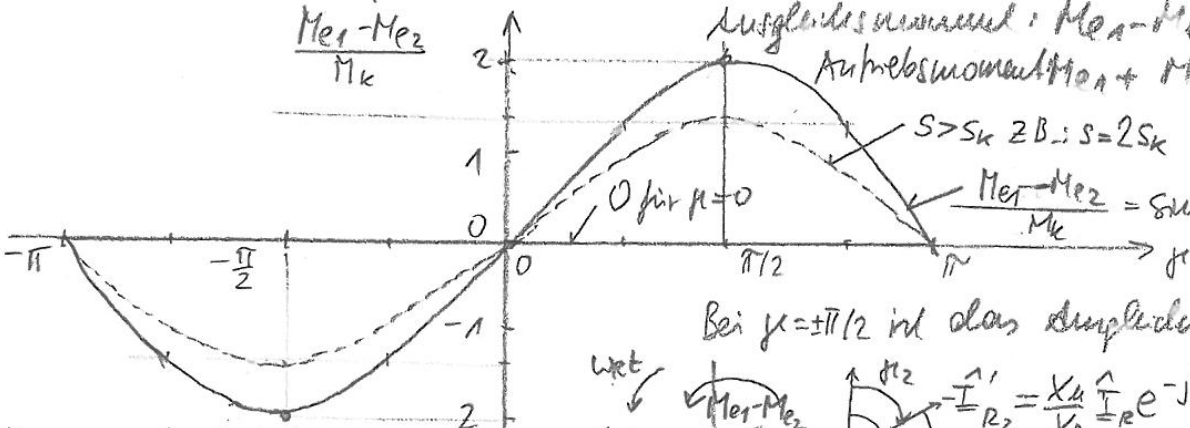
$$= M_k \cdot \frac{s}{s_k^2+s^2} \cdot (s_k(1-\cos\mu) - s\cdot\sin\mu) \Rightarrow M_{e1} - M_{e2} = M_k \cdot \frac{s}{s_k^2+s^2} \cdot 2s\cdot\sin\mu = 2M_k \cdot \frac{\sin\mu}{1+\left(\frac{s_k}{s}\right)^2}$$

$$\Rightarrow M_{e1} + M_{e2} = M_k \cdot \frac{s}{s_k^2+s^2} \cdot 2s_k\cdot(1-\cos\mu) = 2M_k \cdot \frac{1-\cos\mu}{\frac{s}{s_k} + \frac{s_k}{s}}$$

$1 - s = \omega_M/\omega_S$



Bedeutung: Bei positionssynchronem Lauf von Maschine 1 und 2 ($\mu = \gamma_1 - \gamma_2$) tritt kein Ausgleichsmoment, aber auch kein Antriebsmoment auf.

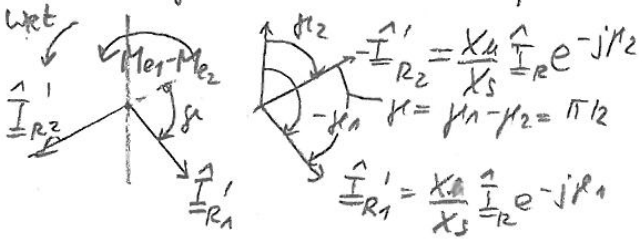


Ausgleichsmoment: $M_{e1} - M_{e2} = 0$
Antriebsmoment $M_{e1} + M_{e2} = 0$ } bei $\mu = 0$ bzw. $\gamma_1 = \gamma_2$

$$\frac{M_{e1}-M_{e2}}{M_k} = \sin\mu \cdot \frac{2}{1+(s_k/s)^2} \quad \text{für } |s| \to \infty$$

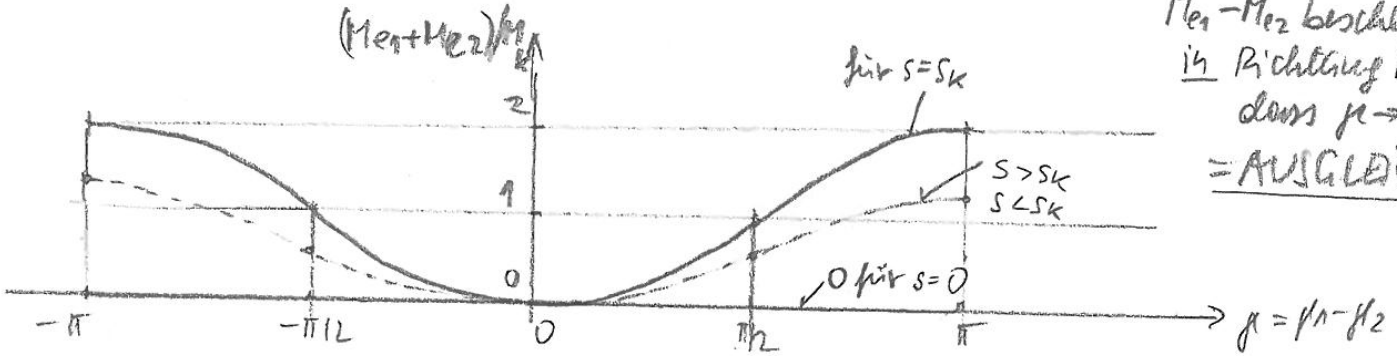
Bei $\mu = \pm\pi/2$ ist das Ausgleichsmoment maximal!

Kippmomente: Ab $|\mu| > \pi/2$: Moment des Ausgleichs sinkt wieder, μ steigt weiter $\Rightarrow$ „Welle reißt ab"!

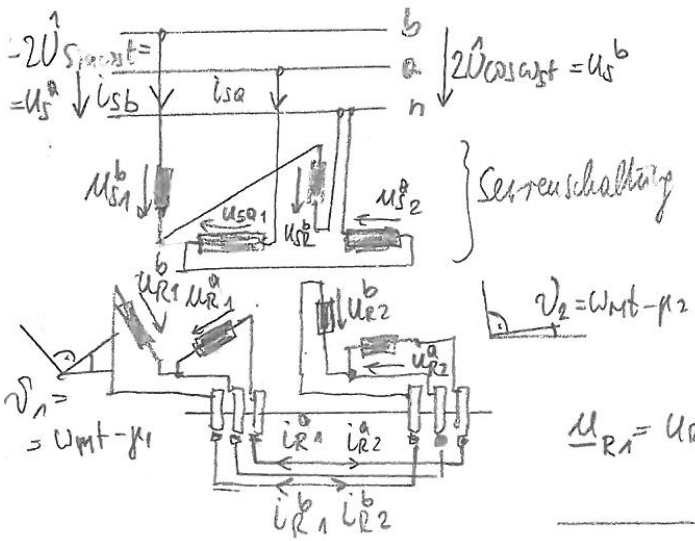


Läufafeld:
Maschine 1: μ_1 zu Raumzeiger $\underline{i}_{R1}$
Maschine 2: μ_2 zu Raumzeiger $\underline{i}_{R2}$

$M_{e1} - M_{e2}$ beschleunigt Rotor 1 in Richtung Rotor 2, also so, dass $\mu \to 0$ geht.
= AUSGLEICHSWELLE



Lösung: Aufgabe 3) b)



$$\underline{u}_s = u_s^a + j u_s^b = (u_{s1}^a + u_{s2}^a) + j(u_{s1}^b + u_{s2}^b) =$$
$$= -2\hat{U}\sin\omega_s t + j 2\hat{U}\cos\omega_s t = j 2\hat{U} e^{j\omega_s t}$$

$$\underline{i}_{s1} = i_{s1}^a + j i_{s1}^b = \hat{\underline{I}}_{s1} e^{j\omega_s t} \qquad \underline{i}_{s2} = i_{s2}^a + j i_{s2}^b = \hat{\underline{I}}_{s2} e^{j\omega_s t}$$

$$i_{s1}^a = i_{s2}^a = i_s^a, \quad i_{s1}^b = i_{s2}^b = i_s^b \Rightarrow \underline{i}_{s1} = \underline{i}_{s2}$$
$$\Rightarrow \hat{\underline{I}}_{s1} = \hat{\underline{I}}_{s2}$$

$$u_{R1}^a = u_{R2}^a, \quad u_{R1}^b = u_{R2}^b, \quad \left.\begin{array}{l} i_{R1}^a = -i_{R2}^a \\ i_{R1}^b = -i_{R2}^b \end{array}\right\} \underline{i}_{R1} = -\underline{i}_{R2}$$

$$\underline{u}_{R1} = u_{R1}^a + j u_{R1}^b = \underline{u}_{R2} = u_{R2}^a + j u_{R2}^b$$
$$\underline{i}_{R1} = \hat{\underline{I}}_{R1} e^{j\omega_R t} = -\hat{\underline{I}}_{R2} e^{j\omega_R t} = -\underline{i}_{R2}$$

$$R_s = 0 : \underline{u}_{s1} = \dot{\underline{\Psi}}_{s1}, \underline{u}_{s2} = \dot{\underline{\Psi}}_{s2} \Rightarrow \underline{u}_s = j 2\hat{U} e^{j\omega_s t} = \dot{\underline{\Psi}}_{s1} + \dot{\underline{\Psi}}_{s2}$$

$$L_s \cdot \dot{\underline{i}}_{s1} + L_\sigma \dot{\underline{i}}_{R1} e^{j\vartheta_1} + L_\sigma \underline{i}_{R1} e^{j\vartheta_1} \cdot j\dot{\vartheta}_1 + L_s \dot{\underline{i}}_{s2} + L_\sigma \dot{\underline{i}}_{R2} e^{j\vartheta_2} + L_\sigma \underline{i}_{R2} e^{j\vartheta_2} \cdot j\dot{\vartheta}_2 = j 2\hat{U} e^{j\omega_s t}$$

$$j\omega_s L_s \hat{\underline{I}}_{s1} e^{j\omega_s t} + j\omega_R L_\sigma \hat{\underline{I}}_{R1} e^{j\omega_R t} \cdot e^{j(\omega_M t - \gamma_1)} + j\omega_M L_\sigma \hat{\underline{I}}_{R1} e^{j\omega_R t} \cdot e^{j(\omega_M t - \gamma_1)} +$$
$$+ j\omega_s L_s \hat{\underline{I}}_{s2} e^{j\omega_s t} + j\omega_R L_\sigma \hat{\underline{I}}_{R2} e^{j\omega_R t} \cdot e^{j(\omega_M t - \gamma_2)} + j\omega_M L_\sigma \hat{\underline{I}}_{R2} e^{j\omega_R t} \cdot e^{j(\omega_M t - \gamma_2)} = j 2\hat{U} e^{j\omega_s t}$$

$$j X_s \hat{\underline{I}}_{s1} + j \cdot X_h \hat{\underline{I}}_{R1} e^{-j\gamma_1} + j X_s \hat{\underline{I}}_{s2} + j X_h \hat{\underline{I}}_{R2} e^{-j\gamma_2} = j 2\hat{U}$$

$$j \cdot 2 X_s \hat{\underline{I}}_{s1} + j X_h \hat{\underline{I}}_{R1} (e^{-j\gamma_1} - e^{-j\gamma_2}) = j 2\hat{U} \Rightarrow X_s \left(\hat{\underline{I}}_{s1} + \hat{\underline{I}}_{R1}' \cdot \tfrac{1}{2}(1 - e^{j\gamma})\right) = 0$$

$\omega_s = \omega_M + \omega_R$
$\omega_s L_s = X_s$
$\omega_s L_\sigma = X_h$
$\omega_R = s\omega_s$
$\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$
$\hat{\underline{I}}_{R1}' = \frac{X_h}{X_s} \hat{\underline{I}}_{R1} \cdot e^{-j\gamma_1}$

$$\dot{\Psi}_{R1} + R_R \underline{i}_{R1} = \dot{\Psi}_{R2} + R_R \underline{i}_{R2}$$

$$L_R \dot{\underline{i}}_{R1} + L_\sigma \dot{\underline{i}}_{S1} e^{-j\vartheta_1} + L_\sigma \underline{i}_{S1} e^{-j\vartheta_1} \cdot (-j\dot{\vartheta}_1) = L_R \dot{\underline{i}}_{R2} + L_\sigma \dot{\underline{i}}_{S2} e^{-j\vartheta_2} + L_\sigma \underline{i}_{S2} e^{-j\vartheta_2} \cdot (-j\dot{\vartheta}_2) \qquad \omega_S L_R = X_R$$

$$j\omega_R L_R \hat{\underline{I}}_{R1} e^{j\omega_R t} + j\omega_S L_\sigma \hat{\underline{I}}_{S1} e^{j\omega_S t} \cdot e^{-j(\omega_M t - \gamma_1)} - j\omega_M L_\sigma \hat{\underline{I}}_{S1} e^{j\omega_S t} e^{-j(\omega_M t - \gamma_1)} + R_R \hat{\underline{I}}_{R1} \cdot e^{j\omega_R t} =$$

$$= j\omega_R L_R \hat{\underline{I}}_{R2} e^{j\omega_R t} + j\omega_S L_\sigma \hat{\underline{I}}_{S2} e^{j\omega_S t} \cdot e^{-j(\omega_M t - \gamma_2)} - j\omega_M L_\sigma \cdot \hat{\underline{I}}_{S2} e^{j\omega_S t} \cdot e^{-j(\omega_M t - \gamma_2)} + R_R \hat{\underline{I}}_{R2} e^{j\omega_R t}$$

$$s j X_R \hat{\underline{I}}_{R1} + s j X_h \hat{\underline{I}}_{S1} \cdot e^{+j\gamma_1} + R_R \hat{\underline{I}}_{R1} = s \cdot j X_R \hat{\underline{I}}_{R2} + s \cdot j X_h \hat{\underline{I}}_{S2} e^{+j\gamma_2} + R_R \hat{\underline{I}}_{R2}$$

$$(R_R + jsX_R) \cdot 2 \cdot \hat{\underline{I}}_{R1} + j s X_h \hat{\underline{I}}_{S1} \cdot e^{+j\gamma_1} \cdot (1 - e^{-j\gamma}) = 0 \quad | \times e^{-j\gamma_1}$$

$$(R_R + jsX_R) \cdot \frac{X_S}{X_h} \hat{\underline{I}}'_{R1} + j s X_h \cdot \hat{\underline{I}}_{S1} \frac{1}{2} (1 - e^{-j\gamma}) = 0$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} X_S & , \frac{1}{2}(1-e^{j\gamma}) X_S \\ j s X_h \frac{1}{2}(1-e^{-j\gamma}) & , (R_R + jsX_R)\frac{X_S}{X_h} \end{pmatrix}}_{M} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\underline{I}}_{S1} \\ \hat{\underline{I}}'_{R1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{U} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Det}(M) = \frac{X_S^2}{X_h}(R_R + jsX_R) - j s X_h X_S \frac{1}{2} \cdot \Big(1 - \overbrace{\frac{e^{j\gamma} + e^{-j\gamma}}{2}}^{\cos\gamma}\Big)$$

$$(1 - e^{j\gamma})(1 - e^{-j\gamma}) = (1 - e^{-j\gamma} - e^{j\gamma} + 1) = 2 - e^{j\gamma} - e^{-j\gamma}$$

$$\frac{1}{2}(e^{j\gamma} + e^{-j\gamma}) = \cos\gamma$$

$$\hat{\underline{I}}_{S1} = \frac{1}{\mathrm{Det}(M)} \cdot \begin{vmatrix} \hat{U} & \frac{1}{2}(1-e^{j\gamma}) X_S \\ 0 & (R_R + jsX_R)\frac{X_S}{X_h} \end{vmatrix} = \frac{\hat{U} \cdot (R_R + jsX_R)\frac{X_S}{X_h}}{X_S \cdot \left[\frac{X_S}{X_h}(R_R + jsX_R) - j s X_h \frac{1}{2}(1 - \cos\gamma)\right]}$$

$$s_k = \frac{R_R}{\sigma X_R}$$

$$\hat{\underline{I}}'_{R1} = \frac{1}{\mathrm{Det}(M)} \cdot \begin{vmatrix} X_S & , \hat{U} \\ j s X_h \frac{1}{2}(1-e^{-j\gamma}) & , 0 \end{vmatrix} = -\frac{\hat{U} \cdot j s X_h \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 - e^{-j\gamma})}{X_S \cdot \left[\frac{X_S}{X_h} \cdot (R_R + jsX_R) - j s X_h \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos\gamma)\right]}$$

$$\sigma = 1 - \frac{X_h^2}{X_S X_R}$$

$$M_{e1} = \mathrm{Im}\{L_g \cdot \underline{i}_{s1} \cdot \underline{i}_{R1}^{*} \cdot e^{-j\gamma_1}\} = \mathrm{Im}\{L_g \cdot \hat{\underline{I}}_{s1} e^{j\omega_s t} \cdot \hat{\underline{I}}_{R1}^{*} e^{-j\omega_R t} \cdot e^{-j\omega_m t + j\gamma_1}\} =$$

$$= \mathrm{Im}\{L_g \cdot \hat{\underline{I}}_{s1} \hat{\underline{I}}_{R1}^{*} \cdot e^{j\gamma_1}\} = \mathrm{Im}\{L_g \hat{\underline{I}}_{s1} \cdot \left(\frac{X_s}{X_h} \hat{\underline{I}}_{R1}' \cdot e^{j\gamma_1}\right)^{*} e^{-j\gamma_1}\} = \mathrm{Im}\{L_g \hat{\underline{I}}_{s1} \hat{\underline{I}}_{R1}'^{*} \cdot \frac{X_s}{X_h}\} =$$

$$= \mathrm{Im}\{\frac{\cancel{X_h}}{\omega_s} \frac{1}{\cancel{X_h}} \hat{U} \frac{R_R + j s X_R}{\left(\frac{X_s}{X_h} R_R\right)^2 + \left(s \frac{X_s X_R}{X_h} - s \frac{X_h}{2}(1-\cos\gamma)\right)^2} \cdot \frac{\cancel{X_s}}{\cancel{X_h}} \cdot \left(-\frac{\hat{U}}{\cancel{X_s}}\right) \cdot \left(-j s \frac{\cancel{X_h}}{2}\right)(1 - e^{j\gamma})\}$$

$$M_{e1} = \frac{s \hat{U}^2}{2\omega_s} \cdot \frac{R_R \cdot (1-\cos\gamma) + s X_R \sin\gamma}{\left(\frac{X_s}{X_h}\right)^2 R_R^2 + s^2 \cdot \left(\frac{X_s X_R}{X_h} - \frac{X_h}{2}(1-\cos\gamma)\right)^2},$$

$$M_{e2} = \mathrm{Im}\{L_g \hat{\underline{I}}_{s2} \hat{\underline{I}}_{R2}^{*} e^{j\gamma_2}\} = -\mathrm{Im}\{L_g \hat{\underline{I}}_{s1} \hat{\underline{I}}_{R1}^{*} e^{j\gamma_2}\} = -\mathrm{Im}\{L_g \hat{\underline{I}}_{s1} \cdot \left(\frac{X_s}{X_h} \cdot \hat{\underline{I}}_{R1}' e^{j\gamma_1}\right)^{*} e^{+j\gamma_2}\}$$

$$= -\mathrm{Im}\{L_g \hat{\underline{I}}_{s1} \frac{X_s}{X_h} \cdot \hat{\underline{I}}_{R1}'^{*} e^{-j\gamma}\} = -\mathrm{Im}\{\frac{X_h}{\omega_s} \cdot \frac{\hat{U}}{X_h} \cdot \frac{(R_R + j s X_R)\left(-j \frac{s X_h}{2}\right) \cdot (e^{-j\gamma} - 1)}{\left(\frac{X_s}{X_h} R_R\right)^2 + \left(s \frac{X_s X_R}{X_h} - s \frac{X_h}{2}(1-\cos\gamma)\right)^2} \cdot \frac{X_s}{X_h}\left(-\frac{\hat{U}}{X_s}\right)\}$$

$$= -\frac{s \hat{U}^2}{2\omega_s} \cdot \frac{R_R(\cos\gamma - 1) + s X_R \sin\gamma}{\left(\frac{X_s}{X_h} R_R\right)^2 + s^2 \cdot \left(\frac{X_s X_R}{X_h} - \frac{X_h}{2} \cdot (1-\cos\gamma)\right)^2}$$

$$M_k = \frac{1-\sigma}{2\sigma} \cdot \frac{\hat{U}^2}{\omega_s X_s}$$

$$M_{e1} - M_{e2} = \frac{s^2 \hat{U}^2}{\omega_s} \cdot \frac{X_R \sin\gamma}{\left(\frac{X_s}{X_h} R_R\right)^2 + s^2 \left(\frac{X_s X_R}{X_h} - \frac{X_h}{2}(1-\cos\gamma)\right)^2}$$

alternativ:

$$\underline{\hat{I}}_{S1} = \frac{\hat{U}}{X_S} \cdot \frac{R_R + jsX_R}{R_R + jsX_R - js\frac{X_h^2}{X_S}\cdot\frac{1}{2}(1-\cos\mu)} = \frac{\hat{U}}{X_S}\cdot\frac{\overbrace{\frac{R_R}{X_R}}^{\sigma s_k} + js}{\frac{R_R}{X_R} + js - js\underbrace{\frac{X_h^2}{X_S X_R}}_{1-\sigma}\cdot\frac{1}{2}(1-\cos\mu)} = \frac{\hat{U}}{X_S}\cdot\frac{\sigma s_k + js}{\sigma s_k + js\left(1-\frac{1-\sigma}{2}(1-\cos\mu)\right)}$$

$$\underline{\hat{I}}'_{R1} = -\frac{\hat{U}}{X_S}\cdot\frac{js\frac{X_h^2}{X_S}\frac{1}{2}(1-e^{-j\mu})}{R_R + jsX_R - js\frac{X_h^2}{X_S^2}(1-\cos\mu)} = -\frac{\hat{U}}{X_S}\cdot\frac{js\frac{(1-\sigma)}{2}\cdot(1-e^{-j\mu})}{\sigma s_k + js - js\frac{1-\sigma}{2}(1-\cos\mu)}, \quad \underline{\hat{I}}_{R1} = -\frac{\hat{U}}{X_h}\cdot\frac{js\frac{1-\sigma}{2}(1-e^{-j\mu})e^{j\mu}}{\sigma s_k + js\left(1-\frac{1-\sigma}{2}(1-\cos\mu)\right)}$$

$$M_{e1} - M_{e2} = \underbrace{\frac{\hat{U}^2}{\omega_S X_S}\cdot\frac{1-\sigma}{2\sigma}}_{M_k}\cdot\frac{2\cdot X_S}{(1-\sigma)X_R}\cdot\frac{s^2\cdot\sigma\cdot\sin\mu}{\underbrace{\left(\frac{X_S}{X_h}\frac{R_R}{X_R}\right)^2}_{\left(\frac{X_S}{X_h}\right)^2(\sigma s_k)^2} + s^2\left(\frac{X_S}{X_h} - \frac{X_h}{2X_R}(1-\cos\mu)\right)^2} =$$

$$= 2M_k\cdot\frac{X_S}{X_R\cdot\frac{X_h^2}{X_S X_R}}\cdot\frac{s^2\sigma\cdot\sin\mu}{\left(\frac{X_S}{X_h}\right)^2\left((\sigma s_k)^2 + s^2\left(1-\frac{1-\sigma}{2}(1-\cos\mu)\right)^2\right)} \Rightarrow \underline{M_{e1} - M_{e2} = 2M_k\cdot\frac{s^2\sigma\sin\mu}{(\sigma s_k)^2 + s^2\left(1-\frac{1-\sigma}{2}(1-\cos\mu)\right)^2}}$$

$$M_{e1} + M_{e2} = \frac{s\cdot\hat{U}^2}{\omega_S}\cdot\frac{R_R(1-\cos\mu)}{\left(\frac{X_S}{X_h}\right)^2\cdot\left[R_R^2 + s^2\left(X_R - \frac{X_h^2}{2X_S}(1-\cos\mu)\right)^2\right]} = \frac{s\cdot\hat{U}^2}{\omega_S\cdot X_R}\cdot\frac{X_h^2}{X_S^2}\cdot\frac{\sigma s_k(1-\cos\mu)}{\left[(\sigma s_k)^2 + s^2\left(1-\frac{1-\sigma}{2}(1-\cos\mu)\right)^2\right]} =$$

$$= \underbrace{\frac{1-\sigma}{2\sigma}\frac{\hat{U}^2}{\omega_S X_S}}_{M_k}\cdot 2\cdot\underbrace{\frac{X_h^2}{X_S X_R}\frac{1}{1-\sigma}}_{1}\cdot\frac{\sigma^2 s_k(1-\cos\mu)\cdot s}{[\ldots]} \Rightarrow \underline{M_{e1} + M_{e2} = 2M_k\cdot\frac{\sigma^2 s_k\cdot s\cdot(1-\cos\mu)}{(\sigma s_k)^2 + s^2\left(1-\frac{1-\sigma}{2}(1-\cos\mu)\right)^2}}$$

Kippschlupf von $M_{e1}+M_{e2}$: $\frac{d}{ds}(M_{e1}+M_{e2})=0$: $\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{(\sigma s_k)^2+s^2\left(1-\frac{1-\sigma}{2}\cdot(1-\cos\mu)\right)^2}\right)=0$

$$\pm s_k^* = \pm\sqrt{\frac{(\sigma s_k)^2}{\left(1-\frac{1-\sigma}{2}\cdot(1-\cos\mu)\right)^2}} = \pm\frac{\sigma s_k}{1-\frac{1-\sigma}{2}(1-\cos\mu)} \approx \pm\sigma s_k$$

$$s_k^* \approx \sigma s_k \ll s_k \quad (\sigma \approx 0{,}1!)$$

$$M_k^* = (M_{e1}+M_{e2})\Big|_{s_k^*} = \cancel{2}M_k\cdot\sigma^{\cancel{2}}\cancel{s_k}\cdot(1-\cos\mu)\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{\cancel{\sigma s_k}\cdot\left(1-\frac{1-\sigma}{2}(1-\cos\mu)\right)} = \frac{\sigma\cdot(1-\cos\mu)}{1-\frac{1-\sigma}{2}\cdot(1-\cos\mu)}\cdot M_k$$

$$M_{ks}=M_k^* \approx \left(0\ldots\frac{2\sigma}{1+\sigma}\right)\cdot M_k < M_k!$$

$[\gamma=\pi/2\ldots 0]$

S.. Serienschaltung

Beispiel: $s_k=0{,}2;\ \sigma=0{,}1;\ \cos\mu=\frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$s_k^* = \frac{0{,}1\cdot 0{,}2}{1-\frac{1-0{,}1}{2}\cdot\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = 0{,}0213 \approx \sigma\cdot 0{,}2!$$

$$M_k^* = \frac{0{,}1\cdot\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1-\frac{1-0{,}1}{2}\cdot\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = 0{,}0143\cdot M_k$$

Elektrische Ausgleichswelle: Vergleich: Ständer- Parallel- und -Serienschaltung

Parallel- Schaltung Serien-

$$\frac{M_{e1}-M_{e2}}{M_k} = \frac{2\cdot\sin\mu}{\left(\frac{s_k}{s}\right)^2+1} \quad \ldots = \frac{\left(\frac{1}{\sigma}\right)\cdot 2\sin\mu}{\left(\frac{s_k}{s}\right)^2+\left(\frac{1}{\sigma}-\frac{1-\sigma}{2\sigma}\cdot(1-\cos\mu)\right)^2}$$

$$\frac{M_{e1}+M_{e2}}{M_k} = \frac{2\cdot(1-\cos\mu)}{\frac{s_k}{s}+\frac{s}{s_k}} \quad \ldots = \frac{2\cdot(1-\cos\mu)}{\frac{s_k}{s}+\frac{s}{s_k}\cdot\left(\frac{1}{\sigma}-\frac{1-\sigma}{2\sigma}\cdot(1-\cos\mu)\right)^2}$$

Beispiel: $s_k = 0{,}2;\ \sigma = 0{,}1;\ \mu = \pi/6 \Rightarrow \sin\mu = \frac{1}{2};\ \cos\mu = \frac{\sqrt{3}}{2}$:

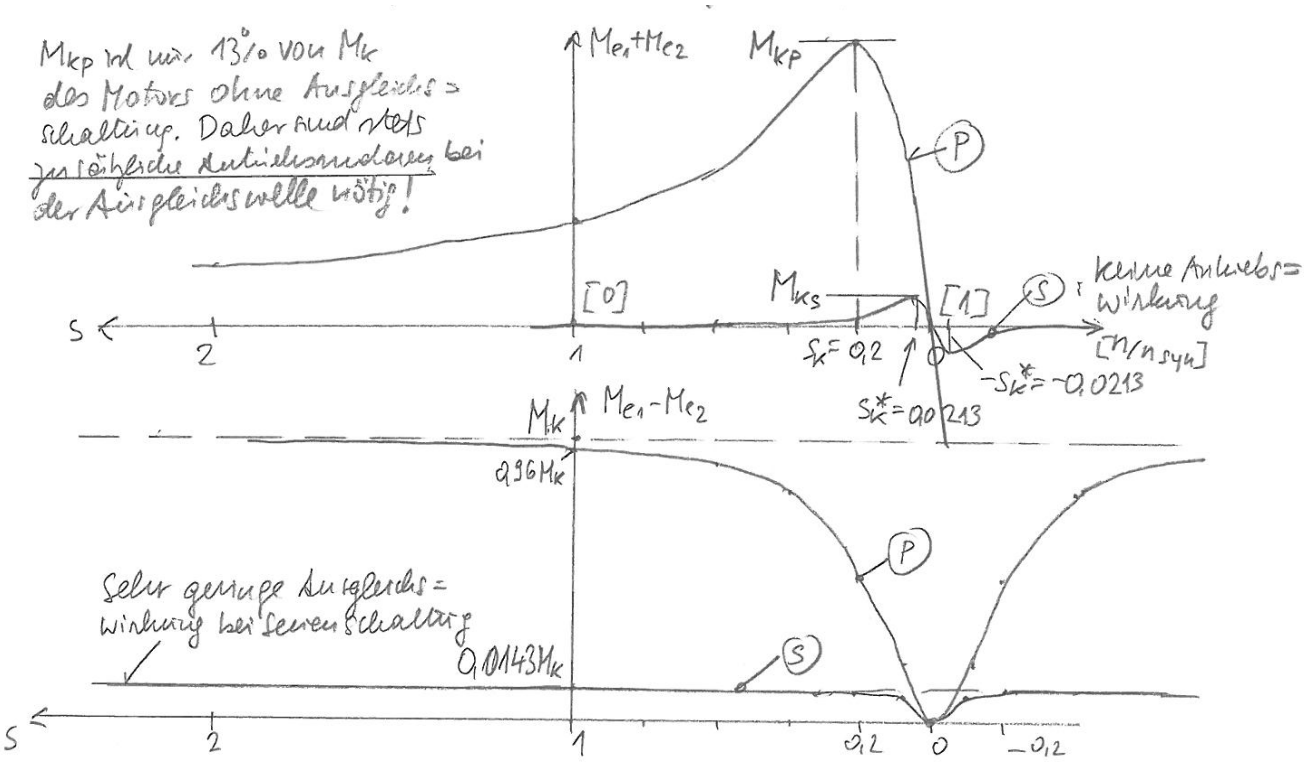
$$\frac{M_{e1}-M_{e2}}{M_k} = \frac{1}{\left(\frac{0{,}2}{s}\right)^2+1} \quad \ldots = \frac{10}{\left(\frac{0{,}2}{s}\right)^2+88{,}3}$$

$$\frac{M_{e1}+M_{e2}}{M_k} = \frac{0{,}2679}{\frac{0{,}2}{s}+\frac{s}{0{,}2}};\ s_k = 0{,}2;\ M_{k_p} = 0{,}134\cdot M_k;\ \ldots = \frac{0{,}2679}{\frac{0{,}2}{s}+\frac{s}{0{,}2}\cdot 88{,}3};\ s_k^* = 0{,}0213$$

$$M_{k_S} = 0{,}0143\cdot M_k$$

- Kippschlupf und Kippmoment sind etwa nur in Bezug auf „Parallel" der Bruchteil σ (1/10!) bei Serienschaltung der Ständerwicklungen
- Das Ausgleichsmoment (für $|s| \to \infty$) ist
  - a) bei Parallelschaltung: $\left.\frac{M_{e1}-M_{e2}}{M_k}\right|_{|s|\to\infty} = 2\cdot\sin\mu$
  - b) bei Serienschaltung: — " — $\cong 46\cdot 2\sin\mu\ \left(\mu \cong \frac{\pi}{2}\right)$

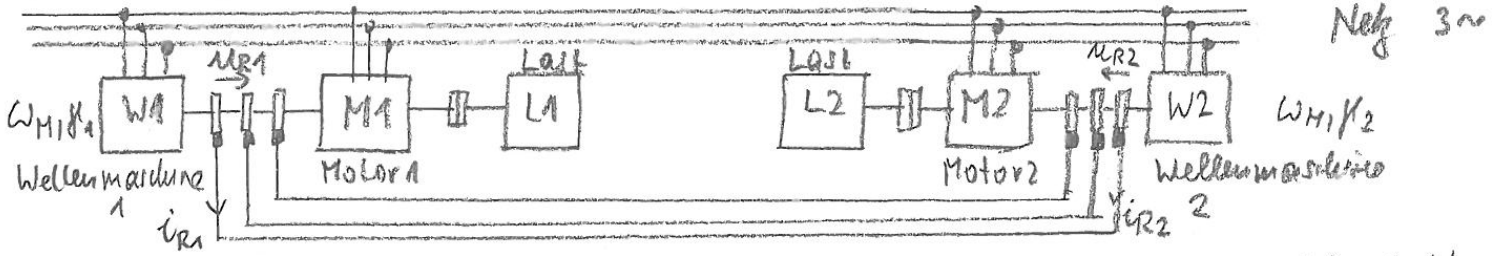
    $= 0{,}113\cdot 2\sin\mu\ \left(\mu = \frac{\pi}{6}\right)$



Fazit: Bei Parallelschaltung existiert eine kräftige Ausgleichswirkung bis zur Höhe des Kippmoments M_k, aber wenig Antriebswirkung.
Daher sind zusätzliche Antriebsmaschinen nötig.
Die Serienschaltung (bei doppelter Spannung!) ist sowohl für Antriebs- als auch Ausgleichswirkung unbrauchbar.

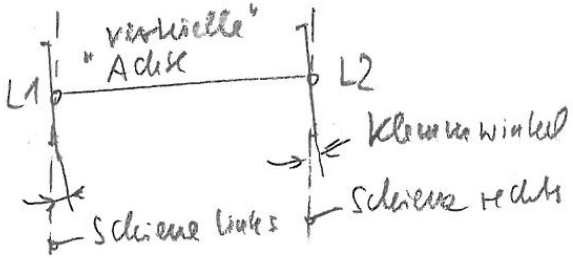
Schlussfolgerungen aus Bsp. 3:

A) Dreiständige Ausgleichswelle:



Beispiel: L1, L2: Antriebsräder eines Brückenkrans auf linker und rechter Schiene
M1, M2: (Asynchron-Käfigläufer)-Antriebsmotoren
W1, W2: (Asynchron-Schleifringläufer)-Ausgleichs-Wellenmaschinen

$\omega_{H1} = \omega_{H2} = \omega_H$, aber wenn dies geringfügig abweicht (z.B. $\omega_{H2} > \omega_{H1}$), dann wird $\gamma_2 > \gamma_1$, und das rechte Rad L_2 überholt das linke Rad L_1: Die Antriebsachse „klemmt", auch wenn dann wieder $\omega_{H1} = \omega_{H2}$ eingestellt wird. Dann aber ist $M_{e1} > M_{e2}$ von W1 gegenüber W2, beschleunigt L1 und ($\Rightarrow \omega_{H1} > \omega_{H2}$) stellt die Räder wieder parallel.

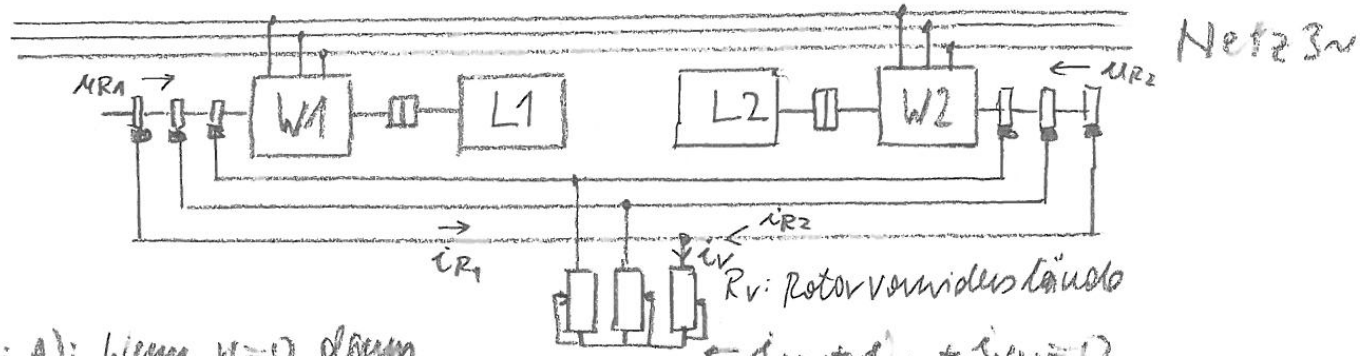


Wirkung beginnt auf $\gamma = \pi/2$ (el. grad!), dann reißt „Welle ab!"

Nachteil der Ausgleichswelle:

- Bei $\gamma = 0$ ist das Antriebsmoment der Maschinen W1, W2 Null. Es werden deshalb die Motoren M1, M2 zum Antreiben benötigt.

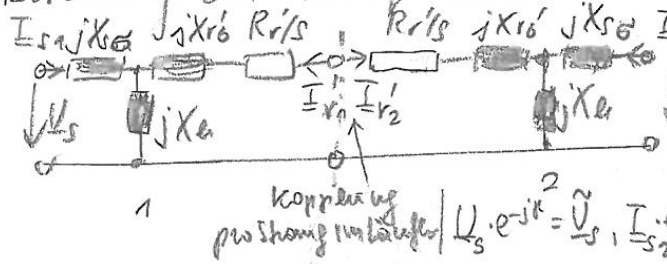
B) Daher: „Arbeitswelle": W1 und W2 gleichen aus und treiben an.



Bei A): Wenn $\mu=0$, dann
bei $\omega_{M1}=\omega_{M2}$: $u_{R1}=u_{R2} \Rightarrow i_{R1}=-i_{R2}=0 \Rightarrow M_{e1}+M_{e2}=0$

Bei B): Wegen $i_{R1}+i_{R2}=i_V$ bei gleichem $i_{R1}=i_{R2}$ bei $\mu=0 \Rightarrow i_V$ kann fließen. Es kann ein Drehmoment $M_{e1}=M_{e2}$, also $M_{e1}+M_{e2}>0$ entwickelt werden. Es werden keine zusätzlichen Antriebsmotoren benötigt.

Berechnung der Ausgleichswelle mit dem T-Ersatzschaltbild (Rs=0):



Ansatz: $-I_{r1}' = I_{r2}'$, $I_{r1}' \forall I_{s1}$, $I_{r2}' \forall \cdot e^{-j\mu} \cdot I_{s2}$
weil Läufer 1 gegenüber Ständer 1 um μ zurückgedreht ist im Vergleich der Lage von Läufer 2 relativ zu Ständer 2.

$U_s \cdot e^{-j\mu} = \tilde{U}_s$, $I_{s2} \cdot e^{-j\mu} = \tilde{I}_{s2}$

$$jX_{s\sigma} I_{s1} + jX_h(I_{s1}+I_{r1}') = U_s \Rightarrow jX_s I_{s1} + jX_h I_{r1}' = U_s \quad (1)'$$

$$jX_{s\sigma} \tilde{I}_{s2} + jX_h(\tilde{I}_{s2}+I_{r2}') = \tilde{U}_s \Rightarrow jX_s \tilde{I}_{s2} + jX_h I_{r2}' = \tilde{U}_s \quad (2)' \to jX_s I_{s2} e^{-j\mu} - jX_h I_{r1}' = U_s \cdot e^{-j\mu}$$

$$\left(\frac{R_r'}{s} + jX_r'\right) I_{r1}' + jX_h I_{s1} = \left(\frac{R_r'}{s} + jX_r'\right) I_{r2}' + jX_h \tilde{I}_{s2} \quad (3)' \to 2\left(\frac{R_r'}{s} + jX_r'\right) I_{r1}' + jX_h\left(I_{s1} - I_{s2} e^{-j\mu}\right) = 0$$

4) Die Statorstränge eines Asynchronmotors (kurzgeschlossene Rotorstränge) werden an ein speisendes Netz gelegt. Der Rotor bleibe so lange festgebremst, bis der elektrische Ausgleichsvorgang abgeklungen ist und sich ein stationärer Zustand einstellt. Nun wird die Bremse gelöst, der Motor läuft ohne Belastungsmoment bis zu seiner Leerlaufdrehzahl hoch (Trägheitsanlauf). Dieser Hochlaufvorgang soll unter Vernachlässigung der Statorwiderstände untersucht werden. Insbesondere sollen die dynamischen Gleichungen aufgestellt werden, aus denen die Motordrehzahl als Funktion der Zeit zu berechnen ist.

a) Verifizieren Sie folgende Rechnung. Für das Wandlermodell mit je zwei Strängen im Stator und im Rotor gelten mit $R_s = 0$ und $u_s^a = -\hat{U}\sin\omega_s t$, $u_s^b = \hat{U}\cos\omega_s t$ die Raumzeigergleichungen (Beispiele 1)2))

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\underline{\Psi}}_s = j\hat{U}e^{j\omega_s t}, \quad \dot{\underline{\Psi}}_R + R_R\underline{i}_R = 0, \quad J\ddot{\vartheta} = \mathrm{Im}\{L_g\underline{i}_s\underline{i}_R^* e^{-j\vartheta}\} + M \\ &\underline{\Psi}_s = L_s\underline{i}_s + L_g\underline{i}_R e^{j\vartheta}, \quad \underline{\Psi}_R = L_R\underline{i}_R + L_g\underline{i}_s e^{-j\vartheta}, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

wobei die erste Gleichung sofort integriert werden kann:

$$\underline{\Psi}_s = \frac{\hat{U}}{\omega_s}(e^{j\omega_s t} - 1) + \underline{\Psi}_s(0). \quad (2)$$

Stationärer Zustand bei $\omega_M = 0$ nach Abklingen des Einschaltvorgangs.

Ansätze: $\underline{i}_s = \hat{\underline{I}}_s e^{j\omega_s t}$, $\underline{i}_R = \hat{\underline{I}}_R e^{j\omega_s t}$

Abkürzungen: $X_s = \omega_s L_s$, $X_R = \omega_s L_R$, $X_h = \omega_s L_\sigma$, $\sigma = 1 - \frac{X_h^2}{X_s X_R}$,

$$s_K = \frac{R_R}{\sigma X_R}, \quad M_K = \frac{1-\sigma}{2\sigma} \frac{\hat{U}^2}{\omega_s X_s}.$$

Aus (1) für $t=0$:

$$\left.\begin{aligned} &\underline{\Psi}_s(0) = \frac{\hat{U}}{\omega_s}, \quad \underline{i}_R(0) = -\frac{1-\sigma}{\sigma} \frac{\hat{U}}{X_h} \frac{e^{j\gamma}}{1-j s_K} \\ &\vartheta(0) = -\gamma, \quad \dot{\vartheta}(0) = 0. \end{aligned}\right\} (3)$$

Dies sind die Anfangsbedingungen für den Hochlaufvorgang bei $t>0$ (Bremse bei $t=0$ gelöst, $M=0$):

$$\underline{\Psi}_s = \frac{\hat{U}}{\omega_s} e^{j\omega_s t} = \frac{1}{\omega_s}\left[X_s \underline{i}_s + X_h \underline{i}_R e^{j\vartheta}\right] \Rightarrow \underline{i}_s = \frac{\hat{U}}{X_s} e^{j\omega_s t} - \frac{X_h}{X_s} e^{j\vartheta} \underline{i}_R, \quad \curvearrowright \underline{\Psi}_R, M_e:$$

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\underline{\Psi}}_R + s_K \sigma X_R \underline{i}_R = 0, \quad \omega_s \underline{\Psi}_R = \sigma X_R \underline{i}_R + \frac{X_h}{X_s} \hat{U} e^{j(\omega_s t - \vartheta)}, \\ &J\ddot{\vartheta} = \mathrm{Im}\left\{\frac{X_h}{X_s} \frac{\hat{U}}{\omega_s} e^{j(\omega_s t - \vartheta)} \underline{i}_R^*\right\} \end{aligned}\right\} (4)$$

Neue Variablen:

$$\left.\begin{aligned} &\underline{y}(t) = y_1 + j y_2 = \frac{X_h}{\hat{U}} \frac{\sigma}{1-\sigma} e^{j(\omega_s t - \vartheta)} \underline{i}_R^*, \quad \tau = s_K \omega_s t, \\ &y_3 = \frac{s}{s_K} = \frac{1}{s_K}\left(1 - \frac{\dot{\vartheta}}{\omega_s}\right) \end{aligned}\right\} (5)$$

Einsetzen von (5) in (4) führt auf das System

$$\frac{d\underline{y}}{d\tau} + (1-jy_3)\underline{y} - j\,y_3 = 0\,, \qquad \frac{dy_3}{d\tau} = -k\,\mathrm{Im}\,\underline{y} \quad \text{mit } k = \frac{2\cdot M_K}{(\omega_s s_K)^2 J}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{d\tau} &= -y_1 - y_2 y_3\,, \\ \frac{dy_2}{d\tau} &= -y_2 + y_3 + y_1 y_3\,, \\ \frac{dy_3}{d\tau} &= -k\,y_2 \end{aligned}\right\} \quad \text{nichtlinear} \qquad \left.\begin{aligned} &\text{Anfangsbed.:}\ y_1(0) = -1/(1+s_K^2) \\ &y_2(0) = s_K/(1+s_K^2) \\ &y_3(0) = 1/s_K \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Dies sind die Hochlaufgleichungen von Pfaff und Jordan.

b) Angenommen, die Hochlaufgleichungen (6) wurden durch irgendein Verfahren gelöst, sodaß y_1, y_2 und y_3 als Funktionen von $\tau = s_K \omega_s t$ bekannt sind. Drücken Sie den Raumzeiger $\underline{i}_s$ des Statorstroms durch diese Funktionen aus und bestimmen Sie die Parameterdarstellung $\{\omega_M(\tau)\,,\ M_e(\tau)\}$ der "dynamischen Momentenkennlinie".

c) Stellen Sie einen zu (6) analogen Gleichungssatz auf, der den Übergang von einem stationären Zustand mit dem Belastungsmoment $M = -M_{B0}$ in einen stationären Zustand mit dem Belastungsmoment $M = -M_{B1}$ (Momentensprung zur Zeit $t = 0$) beschreibt.

Lösung:

b) $\underline{i}_s = \frac{\hat{U}}{X_s}\left[1 - \frac{1-\sigma}{\sigma}(y_1 - j y_2)\right] e^{j\omega_s t}$, $\left\{\begin{array}{l} \omega_M(\tau) = \omega_s\left[1 - s_K y_3(\tau)\right] \\ M_e(\tau) = M_K\, y_2(\tau) \end{array}\right\}$

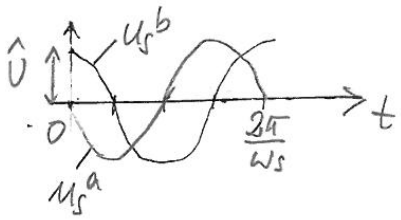
c) $\frac{dy_1}{d\tau} = -y_1 - y_2 y_3$, $\frac{dy_2}{d\tau} = -y_2 + y_3 + y_1 y_3$, $\frac{dy_3}{d\tau} = -k y_2 + m_{B1}$ mit $m_{B1} = \frac{M_{B1}}{(\omega_s s_K)^2 J}$

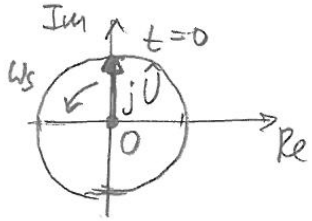
Anfangsbed. für $\tau = 0$ aus $y_1 + y_2 y_3 = 0$, $(1+y_1) y_3 = y_2$, $y_2 = M_{B0}/M_K$

(1)

Lösung: Aufgabe 4)

$u_s^a(t) = -\hat{U}\sin\omega_s t \quad u_s^b(t) = \hat{U}\cos\omega_s t$





$\underline{u}_s(t) = u_s^a + j u_s^b = j\hat{U}\cdot e^{j\omega_s t}$

$\underline{u}_s(t) = R_s \underline{i}_s(t) + \dot{\underline{\psi}}_s(t) = \dot{\underline{\psi}}_s(t), \; R_s = 0$

$\underline{u}_R(t) = 0 = R_R \underline{i}_R(t) + \dot{\underline{\psi}}_R(t), \qquad J\ddot{\vartheta} = \mathrm{Im}\{L_g \underline{i}_s \cdot \underline{i}_R^* e^{-j\vartheta}\} + M$

$\underline{\psi}_s = L_s \underline{i}_s + L_g \underline{i}_R e^{+j\vartheta}$

$\underline{\psi}_R = L_R \underline{i}_R + L_g \underline{i}_s e^{-j\vartheta}$ Raumzeiger-gleichungen gemäß Bsp. 1

5 Gleichungen (*)

Einschaltvorgang für die Ständerflussverkettung:

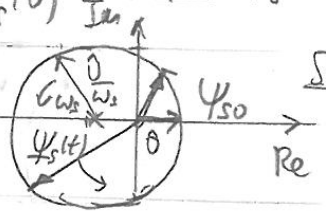
$\dot{\underline{\psi}}_s = \underline{u}_s = j\hat{U}e^{j\omega_s t}, \quad \underline{\psi}_s(t) = \frac{j\hat{U}}{j\omega_s} e^{j\omega_s t} + \underline{K}, \quad \underline{\psi}_s(0) = \frac{\hat{U}}{\omega_s} e^{j0} + \underline{K}, \; \underline{K} = \underline{\psi}_s(0) - \frac{\hat{U}}{\omega_s} \Rightarrow$

$\underline{\psi}_s = \int_0^t \underline{u}_s \, dt \quad \Rightarrow \underline{\psi}_s(t) = \frac{\hat{U}}{\omega_s}(e^{j\omega_s t} - 1) + \underline{\psi}_s(0)$ Bsp.: $\underline{\psi}_s(0) = \psi_{s0}$ reell

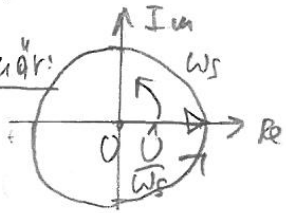
Stationär:

$\underline{\psi}_s = \int_t \underline{u}_s \, dt = \frac{\hat{U}}{\omega_s} e^{j\omega_s t}$

Einschalten: („Kreis"-Verlagerung d.h. Gleichstromglied)



Stationär: $\Rightarrow$



Dieser Einschaltvorgang kann bei $\omega_M = 0$ für $\underline{i}_s(t)$, $\underline{i}_R(t)$ berechnet werden. Wird hier nicht gezeigt. Nach Abklingen des Einschaltvorgangs (homogene Lösung der DGL ((*)) verbleibt die stationäre Sinuslösung, die $\underline{u}_s(t) = j\hat{U} e^{j\omega_s t}$ folgt →

$$\Rightarrow \underline{i}_s(t) = \hat{\underline{I}}_s e^{j\omega_s t}, \quad \underline{i}_R(t) = \hat{\underline{I}}_R e^{j\omega_s t} \quad (\omega_R = \omega_s, \text{ da } \omega_M = 0!)$$

$$\Rightarrow \vartheta = \omega_M t - \gamma = -\gamma, \quad \dot{\vartheta} = \omega_M = 0,$$

$$L_s \hat{\underline{I}}_s e^{j\omega_s t} + L_g \hat{\underline{I}}_R e^{j\omega_s t} \cdot e^{-j\gamma} = \frac{\hat{U}}{\omega_s} e^{j\omega_s t} \Rightarrow j\omega_s L_s \hat{\underline{I}}_s + j\omega_s L_g \hat{\underline{I}}_R e^{-j\gamma} = j\hat{U}$$

$$\underline{j X_s \hat{\underline{I}}_s + j X_h \hat{\underline{I}}_R e^{-j\gamma} = \hat{\underline{U}} = j\hat{U}}$$

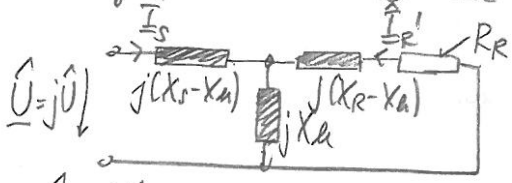
$$L_R \hat{\underline{I}}_R e^{j\omega_s t} + L_g \hat{\underline{I}}_s e^{j\omega_s t} \cdot e^{+j\gamma} = \underline{\psi}_R(t)$$

$$(j\omega_s L_R \hat{\underline{I}}_R + j\omega_s L_g \hat{\underline{I}}_s e^{+j\gamma}) e^{j\omega_s t} = \dot{\underline{\psi}}_R(t) = -R_R \hat{\underline{I}}_R e^{j\omega_s t}$$

$$\underline{(R_R + jX_R)\hat{\underline{I}}_R e^{-j\gamma} + jX_h \hat{\underline{I}}_s = 0}$$

Ersatzschaltbild $\hat{\underline{I}}_R' = \hat{\underline{I}}_R e^{-j\gamma}$:

$$\underline{\begin{pmatrix} jX_s & jX_h \\ jX_h & R_R + jX_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\underline{I}}_s \\ \hat{\underline{I}}_R e^{-j\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j\hat{U} \\ 0 \end{pmatrix}}$$



$$\hat{\underline{I}}_s = \frac{\hat{U}(R_R + jX_R)}{X_s(R_R + jX_R) - jX_h^2}, \quad \hat{\underline{I}}_R e^{-j\gamma} = -\frac{\hat{U} \cdot jX_h}{X_s(R_R + jX_R) - jX_h^2}$$

mit $s_k = \frac{R_R}{\sigma X_R}$ für spannungsgespeiste Asynchronmaschine und $\sigma = 1 - \frac{X_h^2}{X_s X_R}$

$$\hat{\underline{I}}_s = \frac{\hat{U}}{\sigma X_s} \cdot \frac{1 - j\sigma s_k}{1 - j s_k}, \quad \hat{\underline{I}}_R e^{-j\gamma} = -\frac{1-\sigma}{\sigma} \cdot \frac{\hat{U}}{X_h} \cdot \frac{1}{1 - j s_k}$$

Stationäre Stromraumzeigerlösungen für fremderregte Asynchronmaschine bei $R_s = 0$. $e^{-j\gamma}$: Läuferverdrehwinkel!

Dynamische Gleichungen für den Hochlauf: ohne Last: $M=0$

aus dem eingeschwungenen Zustand bei $\omega_M=0$: Unbekannte $\underline{i}_s(t), \underline{i}_R(t), \vartheta(t)$, $\Psi_R(t)$

$$\Psi_s(t) = \frac{\hat{U}}{\omega_s} e^{j\omega_s t} = \frac{1}{\omega_s}\cdot\left[X_s\cdot \underline{i}_s(t) + X_h\cdot \underline{i}_R(t)\cdot e^{j\vartheta(t)}\right]$$

$\Psi_s(t)$ bekannt wegen $R_s=0$: eingeprägt!

$$\Rightarrow \underline{i}_s(t) = \frac{\hat{U} e^{j\omega_s t}}{X_s} - \frac{X_h}{X_s}\cdot \underline{i}_R\, e^{j\vartheta}$$

$$\Psi_R(t)\cdot\omega_s = X_R\cdot \underline{i}_R + X_h\cdot \underline{i}_s\cdot e^{-j\vartheta} = X_R\,\underline{i}_R + X_h e^{-j\vartheta}\cdot\left(\frac{\hat{U} e^{j\omega_s t}}{X_s} - \frac{X_h}{X_s}\cdot \underline{i}_R\, e^{j\vartheta}\right)$$

$$\omega_s \Psi_R(t) = \underbrace{\left(X_R - \frac{X_h^2}{X_s}\right)}_{\sigma X_R}\underline{i}_R + \frac{X_h}{X_s}\hat{U} e^{j(\omega_s t-\vartheta)}, \quad R_R = \frac{R_R}{\sigma X_R}\sigma X_R = S_k \sigma X_R$$

(1) $\dot{\Psi}_R + S_k \sigma X_R \underline{i}_R = 0$ (2) $\omega_s \Psi_R = \sigma X_R \underline{i}_R + \frac{X_h}{X_s}\hat{U}\cdot e^{j(\omega_s t-\vartheta)}$

$$(3)\quad J\ddot{\vartheta} = \mathrm{Im}\left\{\underbrace{\omega_s L_g}_{X_h}\cdot\underbrace{\left(\frac{\hat{U}}{\omega_s X_s} e^{j\omega_s t} - \frac{X_h}{X_s}\cdot\frac{\underline{i}_R}{\omega_s} e^{j\vartheta}\right)}_{\underline{i}_s}\cdot \underbrace{\underline{i}_R^*\cdot e^{-j\vartheta}}_{\text{reell } (\underline{i}_R\cdot\underline{i}_R^* = i_R^2)}\right\} + 0 \quad (M=0)$$

$$(3)\quad J\ddot{\vartheta} = \mathrm{Im}\left\{\frac{X_h}{X_s}\cdot\frac{\hat{U}}{\omega_s}\,\underline{i}_R^*\cdot e^{j(\omega_s t-\vartheta)}\right\}$$

Drei Gleichungen, drei Unbekannte $\vartheta, \underline{i}_R, \Psi_R$ für den Hochlauf! (ohne Gleichstromglied)

Variablentransformation:

$$\underline{y}(t) = y_1 + j y_2 = \underline{i}_R^* \cdot e^{j(\omega_s t - \vartheta)} \cdot \frac{\sigma}{1-\sigma} \cdot \frac{X_h}{\hat{U}}$$

$$y_3 = \frac{s}{s_k} = \frac{1}{s_k} \cdot \left(1 - \frac{\omega_M}{\omega_s}\right) = \frac{1}{s_k}\left(1 - \frac{\dot{\vartheta}}{\omega_s}\right)$$

(3): $\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{s_k}\left(1 - \frac{\dot{\vartheta}}{\omega_s}\right)\right] = -\frac{\ddot{\vartheta}}{s_k \omega_s} = -\frac{1}{s_k \omega_s} \cdot \mathrm{Im}\left\{\frac{1}{J} \cdot \frac{X_h}{X_s} \frac{\hat{U}}{\omega_s} \underline{y}(t)\right\} \cdot \frac{1-\sigma}{\sigma} \cdot \frac{\hat{U}}{X_h} \Rightarrow$

$\times \frac{1}{s_k \omega_s}$: $\frac{d\cdot}{dt} \frac{1}{s_k \omega_s} = \frac{d\cdot}{d\tau}$; $\frac{dy_3}{d\tau} = -\frac{1}{(s_k \omega_s)^2} \cdot \frac{\cancel{X_h}}{X_s} \cdot \frac{1}{J} \cdot \frac{\hat{U}}{\omega_s} \cdot \frac{\hat{U}}{\cancel{X_h}} \cdot \frac{1-\sigma}{\sigma} \mathrm{Im}\{\underline{y}\}$

$$\frac{dy_3}{d\tau} = -\frac{1}{(s_k \omega_s)^2} \cdot \frac{1}{J} \cdot 2 \cdot \underbrace{\left(\frac{\hat{U}^2}{\omega_s X_s} \cdot \frac{1-\sigma}{2\sigma}\right)}_{} \mathrm{Im}\{\underline{y}\}$$

$$\frac{dy_3}{d\tau} = -k \overbrace{\mathrm{Im}\{\underline{y}(t)\}}^{y_2}, \quad k = \frac{2 M_k}{J \cdot (s_k \omega_s)^2}$$

M_k: Kippmoment bei Spannungsspeisung und $R_s = 0$ (siehe Vorlesung EMA)

(1) + (2) entsprechen (4): $\frac{d\underline{y}}{d\tau} + (1 - j y_3)\underline{y} - j y_3 = 0$,

denn: $\frac{d\underline{y}}{d\tau} = \frac{1}{s_k \omega_s} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\sigma}{1-\sigma} \frac{X_h}{\hat{U}} \cdot \underline{i}_R^* \cdot e^{j(\omega_s t - \vartheta)}\right) = \frac{\sigma}{1-\sigma} \cdot \frac{X_h}{s_k \omega_s \hat{U}} \cdot \left[\dot{\underline{i}}_R^* e^{j(\omega_s t - \vartheta)} + \underline{i}_R^* e^{j(\omega_s t - \vartheta)} \cdot j(\omega_s - \dot{\vartheta})\right]$

$(1 - j y_3)\underline{y} = \left(1 - j \frac{1}{s_k}\left(1 - \frac{\dot{\vartheta}}{\omega_s}\right)\right) \cdot \frac{X_h}{\hat{U}} \cdot \frac{\sigma}{1-\sigma} \cdot e^{j(\omega_s t - \vartheta)} \cdot \underline{i}_R^*$

$\Rightarrow \frac{d\underline{y}}{d\tau} + (1 - j y_3)\underline{y} - j y_3 = 0$ entspricht

$$\frac{\sigma}{1-\sigma} \cdot \frac{X_h}{s_k \omega_s \hat{U}} \cdot \left[\dot{\underline{i}}_R^* + \underline{i}_R^* \underbrace{j(\omega_s - \dot{\vartheta})}_{\text{kürzt sich}}\right] e^{j(\omega_s t - \vartheta)} + \left(1 - j \frac{1}{s_k}\underbrace{\left(1 - \frac{\dot{\vartheta}}{\omega_s}\right)}_{}\right) \cdot \frac{s_k \omega_s}{s_k \omega_s} \cdot \frac{X_h}{\hat{U}} \frac{\sigma}{1-\sigma} \underline{i}_R^* e^{j(\omega_s t - \vartheta)} - j \frac{1}{s_k}\left(1 - \frac{\dot{\vartheta}}{\omega_s}\right) = 0$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$(4)' \quad \dot{\underline{i}}_R^* + s_k \omega_s \underline{i}_R^* = j\cdot(\omega_s - \dot{\vartheta})\frac{1-\sigma}{\sigma}\frac{\hat{U}}{X_h} e^{-j(\omega_s t - \vartheta)}$$

Dies ist identisch mit (1) und (2), denn:

(2) differenziert: $\omega_s \dot{\underline{\psi}}_R = \sigma X_R \dot{\underline{i}}_R + \frac{X_h}{X_s}\hat{U} e^{j(\omega_s t-\vartheta)}\cdot j(\omega_s - \dot{\vartheta}) = -\omega_s s_k \sigma X_R \underline{i}_R$

(1): $\dot{\underline{\psi}}_R = -s_k \sigma X_R \underline{i}_R$

$$\dot{\underline{i}}_R + \omega_s s_k \underline{i}_R = -\frac{X_h}{X_s}\cdot\frac{1}{\sigma X_R}\cdot\hat{U} e^{j(\omega_s t-\vartheta)}\cdot j(\omega_s - \dot{\vartheta})$$

$$\dot{\underline{i}}_R^* + \omega_s s_k \underline{i}_R^* = +\frac{X_h}{X_s}\cdot\frac{1}{\sigma X_R}\hat{U} e^{-j(\omega_s t-\vartheta)}\, j(\omega_s - \dot{\vartheta})$$

Dies ist identisch mit (4)' und damit (1)+(2) bewiesen.

(4) in Re- und Im-Teil zerlegt:

$$\frac{d}{d\tau}(y_1 + j y_2) + (1 - j y_3)(y_1 + j y_2) - j y_3 = 0 \qquad \begin{cases} \frac{dy_1}{d\tau} = -y_1 - y_2 y_3 \\ \frac{dy_2}{d\tau} = -y_2 + y_1 y_3 + y_3 \end{cases}$$

Anfangsbedingungen:

$\tau = 0$: Eingeschwungener Schlechtzustand: Schlupf $s = 1$: $y_3 = \frac{s}{s_k}\Big|_{\tau=0} = \frac{1}{s_k}$

$$y_1 + j y_2\Big|_{\tau=0} = \underline{i}_R^*(0)\cdot e^{j(\omega_s \overset{t=0}{0} - \underbrace{\vartheta(0)}_{-\gamma})}\cdot\frac{\sigma}{1-\sigma}\cdot\frac{X_h}{\hat{U}} = \hat{\underline{I}}_R^* \cdot e^{j\omega_s \cdot 0}\cdot e^{j\gamma}\cdot\frac{\sigma}{1-\sigma}\cdot\frac{X_h}{\hat{U}}$$

$$y_1 + j y_2\Big|_{\tau=0} = \underbrace{-\frac{1-\sigma}{\sigma}\cdot\frac{\hat{U}}{X_h} e^{-j\gamma}\cdot\frac{1}{1+j s_k}}_{\hat{\underline{I}}_R^*}\cdot e^{j\gamma}\cdot\frac{\sigma}{1-\sigma}\cdot\frac{X_h}{\hat{U}} = -\frac{1}{1+j s_k} = \frac{-1 + j s_k}{1 + s_k^2}$$

$$y_1(0) = -\frac{1}{1+s_k^2}, \quad y_2(0) = \frac{s_k}{1+s_k^2}$$

Pfaff-Jordan-Hochlaufgleichungen: $\tau = t \cdot s_k \omega_s$ $\quad \frac{d(\cdot)}{d\tau} = (\cdot)'$

$$\boxed{\begin{array}{lll} y_1' = -y_1 - y_2 y_3 & y_2' = -y_2 + y_1 y_3 + y_3 & y_3' = -k \cdot y_2 \quad k = \frac{2M_k}{J(s_k\omega_s)^2} \\ y_1(0) = -\frac{1}{1+s_k^2} & y_2(0) = \frac{s_k}{1+s_k^2} & y_3(0) = \frac{1}{s_k} \end{array}}$$

Nichtlineares Differentialgleichungssystem 3. Ordnung; muss numerisch integriert werden z.B. mit Runge-Kutta 4.

b) $\underline{i}_s(t) = \frac{\hat{U} e^{j\omega_s t}}{X_s} - \frac{X_h}{X_s} \underline{i}_R(t) \cdot e^{j\vartheta(t)} \quad | \underline{i}_R(t) \cdot e^{-j(\omega_s t - \vartheta)} \cdot \frac{\sigma}{1-\sigma} \cdot \frac{X_h}{\hat{U}} = \underline{y}^*(t) \Rightarrow \frac{X_h}{X_s} \underline{i}_R e^{j\vartheta} = \underline{y}^* \cdot \frac{1-\sigma}{\sigma} \frac{\hat{U} e^{j\omega_s t}}{X_s}$

$$\Rightarrow \underline{i}_s(t) = \frac{\hat{U}}{X_s} \cdot \left[1 - \frac{1-\sigma}{\sigma} \cdot (y_1(t) - j y_2(t))\right] \cdot e^{j\omega_s t}$$

$$\omega_M = \omega_s \cdot (1 - y_3 \cdot s_k) \Rightarrow \omega_M(\tau) = \omega_s (1 - y_3(\tau) \cdot s_k)$$

$$M_e = \mathrm{Im}\{L_\sigma \underline{i}_s(\tau) \underline{i}_R^*(\tau) e^{-j\vartheta(\tau)}\} = \mathrm{Im}\{\underbrace{L_\sigma \left(\frac{\hat{U}}{X_s} \cdot e^{j\omega_s t} - \frac{X_h}{X_s} \underline{i}_R e^{j\vartheta}\right) \underline{i}_R^* e^{-j\vartheta}}_{L_\sigma \frac{\hat{U}}{X_s} e^{j\omega_s t} \underline{i}_R^* e^{-j\vartheta} - \underbrace{\frac{L_\sigma X_h}{X_s} |\underline{i}_R|^2 \cdot e^{j\vartheta} e^{-j\vartheta}}_{\text{reell} \Rightarrow \mathrm{Im}(\ldots) = 0}}\} =$$

$$= \mathrm{Im}\{\underbrace{L_\sigma \frac{\hat{U}}{X_s} \underline{i}_R^* e^{j(\omega_s t - \vartheta)}}_{\underline{y} \cdot \frac{\hat{U}}{X_h} \cdot \frac{1-\sigma}{\sigma}}\} \qquad X_h = \omega_s L_\sigma$$

$$M_e = \mathrm{Im}\left\{\frac{\hat{U}^2}{\omega_s X_s} \cdot \frac{1-\sigma}{\sigma} \cdot \underline{y}(\tau)\right\} \quad \text{mit } M_k = \frac{\hat{U}^2}{\omega_s X_s} \cdot \frac{1-\sigma}{2\sigma} \Rightarrow M_e(\tau) = 2 M_k \, \mathrm{Im}\{\underline{y}(\tau)\}$$

(7)

$$M_e(\tau) = 2 \cdot M_k \cdot y_2(\tau)$$

Zusammenfassung: $M_e(\tau) = \underbrace{2M_k \cdot y_2(\tau)\,,\ \omega_M(\tau) = \omega_s - s_k \omega_s \cdot y_3(\tau)}_{M_e(\omega_M)\ \text{dynamisch!}}$

Anfangsbedingung: $y_3(0) = \frac{1}{s_k} \Rightarrow \omega_M(0) = \omega_s - s_k \omega_s / s_k = 0$

$$y_2(0) = \frac{s_k}{1+s_k^2} \Rightarrow M_e(0) = \frac{2M_k s_k}{1+s_k^2} = \frac{2M_k}{\frac{1}{s_k} + s_k} = \underbrace{\frac{2M_k}{\frac{s}{s_k} + \frac{s_k}{s}}}_{\text{Kloss' Funktion für Schlupf 1}}\Bigg|_{s=1}$$

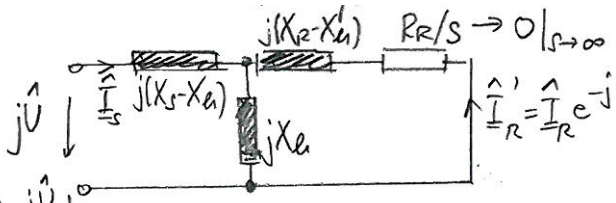
Nach Beschleunigung: $y_3(\tau \to \infty) = \frac{s(\tau)}{s_k} = 0$: $s=0$ Leerlauf

$$M_e(\tau \to \infty) = M_e(s=0) = 0 \Leftrightarrow y_2(\tau \to \infty) = 0$$

Pfaff-Jordan-Parameter $P = \frac{1}{k}$: statt $y_3' = -k\, y_2$ (dyn. Gleichung für das Drehmoment)

mit $y_3' = \frac{d\left(\frac{s}{s_k}\right)}{d(\omega_s s_k t)}$ wird statt y_2 die bezogene Rotorstromkomponente (mit $y_2 = -\mathrm{Im}\{\underline{i}_{RD}\}$)

$$\frac{\underline{i}_R(\tau) \cdot e^{-j(\omega_s t - \vartheta)}}{\underline{I}_R(s \to \infty)} = \underline{i}_{RD}$$ verwendet (Index D: im drehfeldfesten Koordinatensystem)



$$\hat{\underline{I}}_R' = \hat{\underline{I}}_R e^{-j\gamma} \qquad \begin{cases} jX_s\hat{\underline{I}}_s + jX_h\hat{\underline{I}}_R' = j\hat{U} \\ jX_h\hat{\underline{I}}_s + jX_R\hat{\underline{I}}_R' = 0 \end{cases}$$

$$\hat{\underline{I}}_R(s\to\infty) = \frac{\begin{vmatrix} jX_s & j\hat{U} \\ jX_h & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} jX_s & jX_h \\ jX_h & jX_R \end{vmatrix}} = \hat{U}\cdot\frac{X_h}{\sigma X_s X_R} = \hat{U}\cdot\frac{1-\sigma}{\sigma X_h}$$

$$y_2 = \mathrm{Im}\Big\{\underbrace{\underline{i}_R^*\cdot e^{j(\omega_s t-\gamma)}}_{(\underline{i}_R\cdot e^{-j(\omega_s t-\gamma)})^*}\cdot\underbrace{\frac{\sigma}{1-\sigma}\cdot\frac{X_h}{\hat{U}}}_{1/\hat{\underline{I}}_R(s\to\infty)}\Big\} = \mathrm{Im}\Big\{\frac{(\underline{i}_R\cdot e^{-j(\omega_s t-\gamma)})^*}{\hat{\underline{I}}_R(s\to\infty)}\Big\} = \mathrm{Im}\{\underline{i}_{RD}^*\}$$

$$\frac{d\left(\frac{s}{s_k}\right)}{d(\omega_s s_k t)} = -\frac{2M_k}{J(s_k\omega_s)^2}\cdot\mathrm{Im}\Big\{\underline{i}_{RD}^*\cdot\underbrace{\frac{X_h^2}{(1-\sigma)X_sX_R}}_{1}\Big\} =$$

$$= -\frac{\cancel{2}\,1}{J(s_k\omega_s)^2}\cdot\frac{\hat{U}^2}{\omega_s X_s}\cdot\frac{\cancel{1-\sigma}}{\cancel{2\sigma}}\cdot\frac{1}{\cancel{1-\sigma}}\cdot\frac{\cancel{X_h^2}}{X_sX_R}\cdot\underbrace{(-i_{RD\,Im})}_{y_2} =$$

$$= \underbrace{\frac{\hat{U}^2}{\omega_s^2}\cdot\frac{X_h^2}{X_s^2}\cdot\frac{1}{J}\cdot\frac{1}{\omega_s}\cdot\frac{1}{s_k^2}\cdot\frac{1}{\sigma X_R}}_{\frac{1}{P}=k}\cdot i_{RD\,Im}$$

$$\underline{i}_{RD} = \underline{i}_{RD\,Re} + j\,i_{RD\,Im}$$

$$\mathrm{Im}\{\underline{i}_{RD}^*\} = -i_{RD\,Im}$$

$$M_k = \frac{\hat{U}^2}{\omega_s X_s}\cdot\frac{1-\sigma}{2\sigma}\Big|_{\hat{U}=120} = \frac{\hat{U}^2}{\omega_s X_s}\cdot\frac{1-\sigma}{\sigma}$$: Vgl.: Vorlesung EMA

$$M_b\big|_{R_s=0} = \frac{m}{2}\,\frac{\hat{U}^2 p}{\omega_s}\,\frac{1-\sigma}{\sigma X_s}$$

$$\frac{d(s/s_k)}{d(\omega_s s_k t)} = \frac{1}{P}\,i_{RD\,Im}$$

Vergleich zur Vorlesung: „Energy Converters": (hier: $m=2$, $p=1$)

dort: $P = \left(\frac{\omega_s}{\mu_s}\frac{X_s}{X_h}\right)^2 \tau_J\cdot R_R'\cdot s_k = \left(\frac{\omega_s}{\hat{U}_s}\right)^2\left(\frac{X_s}{X_h}\right)^2\cdot J\cdot\frac{2}{m}\,\omega_N R_R'\cdot s_k$

$X_h = \ddot{u}\cdot\omega_s L_g$, $\ddot{u} = \frac{N_s k_{ws}}{N_R k_{wR}}$, $s_k = \frac{R_R'}{\sigma X_R'}$, $\Rightarrow R_R' = \sigma s_k X_R'$

$X_R' = \ddot{u}^2\cdot X_R$, $\omega_N = \omega_s$, hier: $m = 2\cdot 2/m = 1$

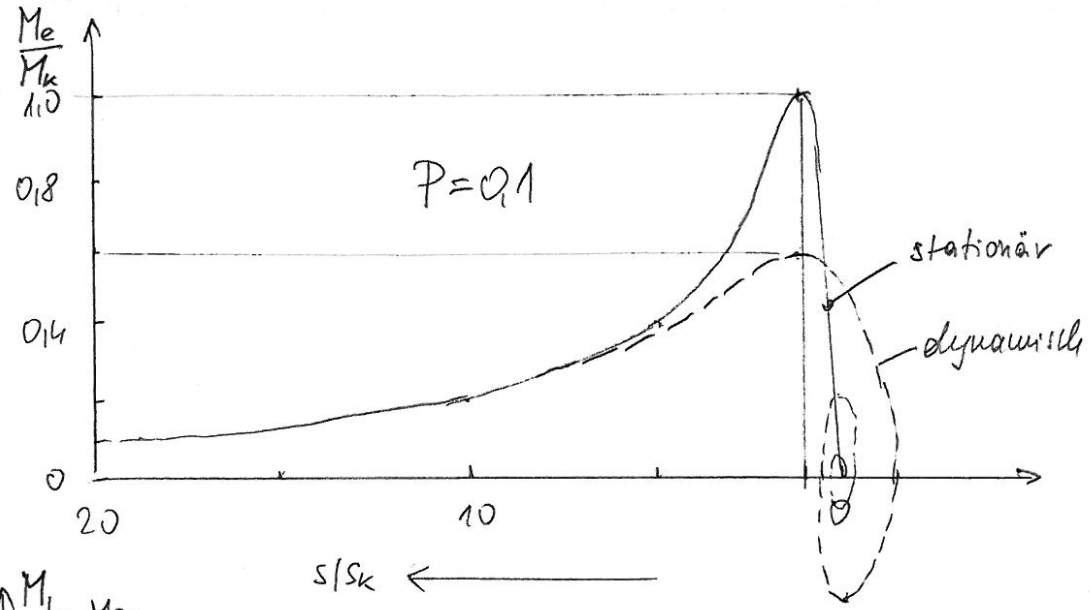
$$P = \left(\frac{\omega_s}{\hat{U}_s}\right)^2\cdot\left(\frac{X_s}{\omega_s L_g}\right)^2\frac{1}{\cancel{\ddot{u}^2}}\cdot J\cdot 1\cdot\omega_s\cdot\sigma s_k^2\,\cancel{\ddot{u}^2}X_R = \left(\frac{\omega_s}{\hat{U}_s}\cdot\frac{X_s}{X_h}\right)^2 J\cdot\omega_s s_k^2\,\sigma X_R$$ identisch mit obigem Ausdruck!

$\omega_s L_g = X_h$ gemäß dieser Vorlesung

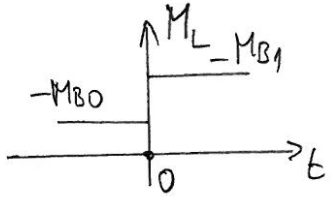
$\cancel{X}$

Beispiel:

$s_k = 1/20$



1)



Momentengleichung: $\underbrace{dy_3/d\tau}_{\frac{J\cdot\dot{\nu}}{J(s_k\omega_s)^2}} = -k\,\mathrm{Im}\{\underline{y}(\tau)\} \underbrace{-\left(-\frac{M_{B1}}{(s_k\omega_s)^2}\cdot\frac{1}{J}\right)}_{+m_{b1}}$

Die Flussverkettungsgleichungen und Sprungsgleichungen bleiben unverändert:

$$\Rightarrow \underline{\underline{y_1' = -y_1 - y_2 y_3,\ y_2' = -y_2 + y_3(1+y_1),\ y_3' = -k y_2 + m_{b1}}},\quad m_{b1} = \frac{M_{B1}}{J(s_k\omega_s)^2}$$

Anfangsbedingungen: Für $t \le 0$ ist der Motor <u>stationär</u> mit M_{B0} belastet.

Stationär $= \dot{\nu} = 0$ und $\dot{\nu} = \text{konst.} = \omega_M$

$$J\dot{\nu} = \mathrm{Im}\left\{\frac{X_h}{X_s}\cdot\frac{\hat{U}}{\omega_s}\cdot\underline{i}_R^{*}\, e^{j(\omega_s t-\nu)}\right\} - M_{B0} = 0;\quad \mathrm{Im}\left\{\frac{X_h}{X_s}\cdot\frac{\hat{U}}{\omega_s}\,\hat{\underline{I}}_R^{*}\, e^{-j\omega_R t}\cdot e^{j\omega_s t} e^{-j\nu}\right\} = M_{B0}$$

$$-\omega_R + \omega_s - \omega_M = 0$$

$$\underline{i}_R(t) = \hat{\underline{I}}_R e^{j\omega_R t} \qquad \nu = \omega_M t + \nu_0$$

$$\mathrm{Im}\left\{ \frac{X_h}{X_s} \frac{\hat{U}}{\omega_s} \hat{\underline{I}}_R^* e^{-j\nu_0} \right\} = M_{B0} \qquad \underline{y} = \underline{i}_R^* e^{j(\omega_s t - \nu)} \frac{\sigma}{1-\sigma} \cdot \frac{X_h}{\hat{U}}$$

$$\mathrm{Im}\left\{ \frac{X_h}{X_s} \cdot \frac{\hat{U}}{\omega_s} \cdot \underline{y}(0) \cdot \frac{1-\sigma}{\sigma} \frac{\hat{U}}{X_h} \right\} = M_{B0} \qquad \underline{y}(0) = \hat{\underline{I}}_R^* e^{-j\nu_0} \cdot \frac{\sigma}{1-\sigma} \cdot \frac{X_h}{\hat{U}}$$

$$\mathrm{Im}\left\{ \underline{y}(0) \underbrace{\frac{1-\sigma}{\sigma} \frac{\hat{U}^2}{\omega_s X_s}}_{2M_k} \right\} = M_{B0} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{y_2(0) = \frac{M_{B0}}{M_k \cdot 2} = y_{20}}}$$

Da die magnetische Energie beim Momentensprung bei $t=0$ nicht springen kann, muss gelten: $W_m = L_s \frac{\hat{I}_s^2}{2} + L_R \frac{\hat{I}_R^2}{2} + L_h \hat{I}_s \hat{I}_R = \text{konst.}$ Dann dürfen aber auch $\hat{\underline{I}}_s$ und $\hat{\underline{I}}_R$ bei $t=0$ nicht springen. Es gilt: $\hat{\underline{I}}_R(t=0-) = \hat{\underline{I}}_R(t=0+)$.

Da nämlich L_s und L_R „willkürlich" größer als L_h sind, gilt bei $\hat{I}_s \hat{I}_R = \text{konst.}$ noch nicht $W_m = \text{konst.}$, sondern es muss $\hat{I}_s = \text{konst.}$, $\hat{I}_R = \text{konst.}$ gelten. $\Rightarrow \frac{d\underline{i}_R}{d\tau} = 0$ bei $\tau = 0 \Leftrightarrow \left.\frac{dy_1}{d\tau}\right|_0 = 0$, $\left.\frac{dy_2}{d\tau}\right|_0 = 0 \Rightarrow y_1' = -y_1 - y_2 y_3 = 0$

$$y_2' = -y_2 + y_3(1+y_1) = 0$$

$$\Rightarrow y_1(0) = y_2(0) y_3(0), \quad y_2(0) = y_3(0)(1 + y_1(0))$$

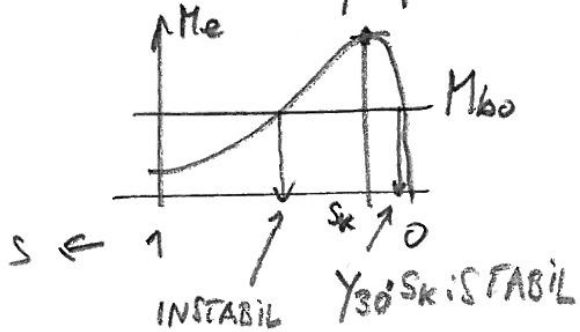
$$Y_{30} = \frac{Y_{20}}{1+Y_{10}} \Rightarrow Y_{10} = Y_{20}^2 \cdot \frac{1}{1+Y_{10}} \Rightarrow Y_{10}^2 + Y_{10} - Y_{20}^2 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{Y_{10,12} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + Y_{20}^2}}}$$

$$\underline{\underline{Y_{30} = \frac{Y_{20}}{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + Y_{20}^2}}}}$$

Kleinerer Wert Y_{30} ist s/s_k, denn aus KLOSS-Funktion folgt:

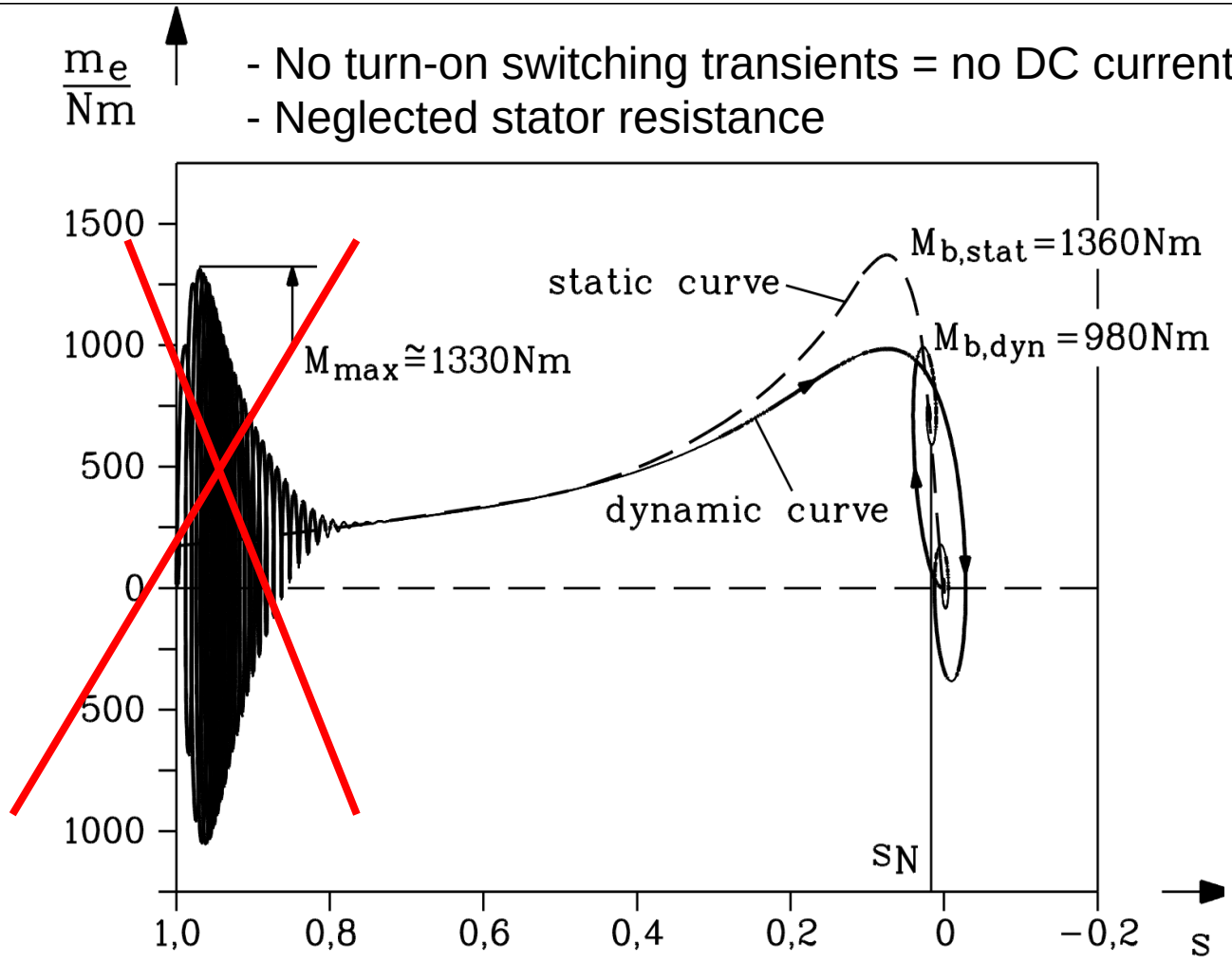
$$Y_{30} = \frac{Y_{20}}{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + Y_{20}^2}}$$

$$Y_{10} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + Y_{20}^2}$$



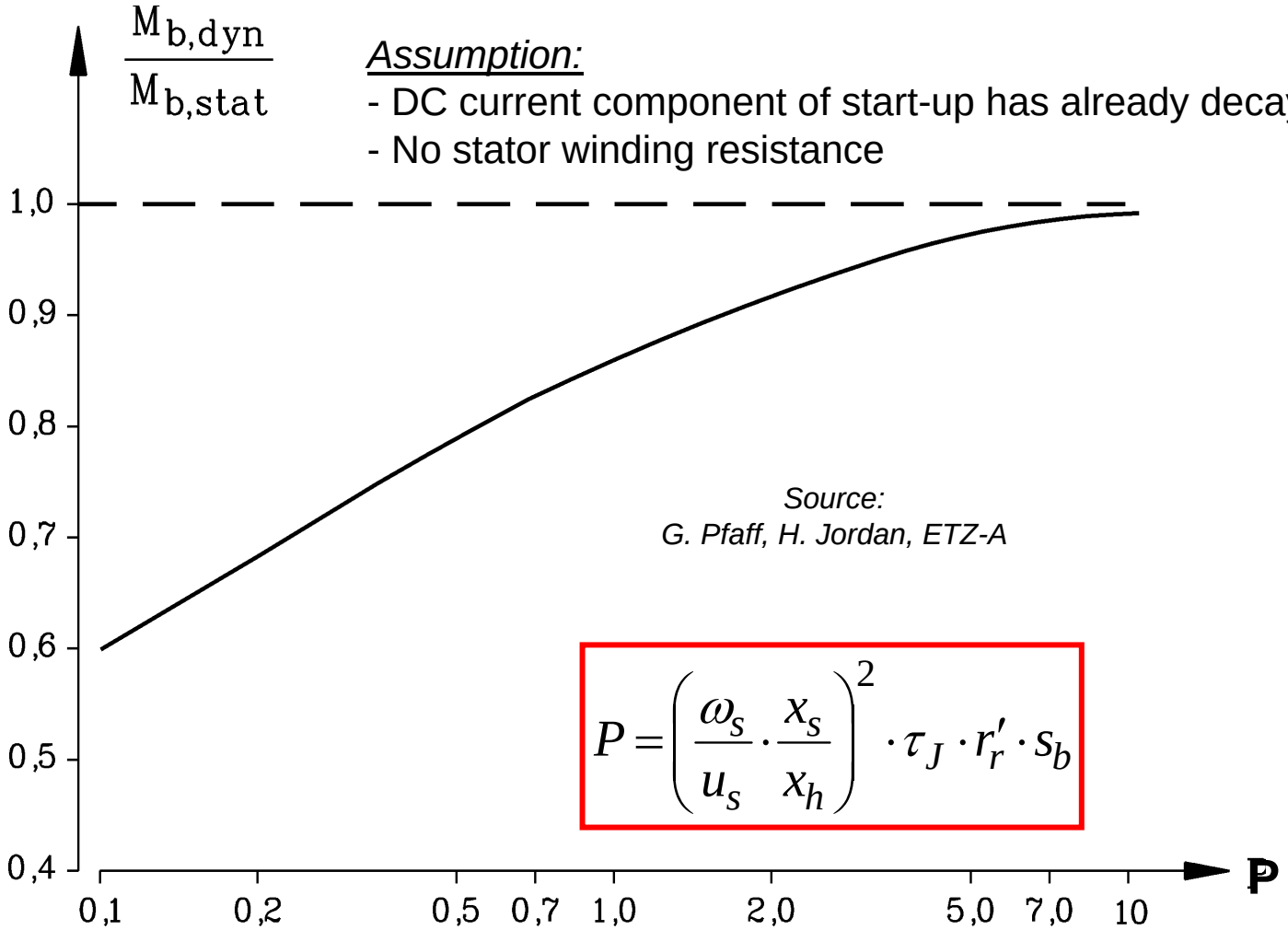
Pfaff & Jordan method to calculate dynamic start-up of induction machine

- No turn-on switching transients = no DC current component
- Neglected stator resistance



Ratio of dynamic vs. static breakdown torque

(*Pfaff & Jordan*) in dependence of parameter *P*



Assumption:

- DC current component of start-up has already decayed!
- No stator winding resistance

Source:
G. Pfaff, H. Jordan, ETZ-A

$$P = \left(\frac{\omega_s}{u_s} \cdot \frac{x_s}{x_h} \right)^2 \cdot \tau_J \cdot r_r' \cdot s_b$$

Dynamic break down torque: *Pfaff-Jordan* parameter *P*

$$P = \left(\frac{\omega_s}{u_s} \cdot \frac{x_s}{x_h} \right)^2 \cdot \tau_J \cdot r_r' \cdot s_b = \left(\frac{2\pi f_s}{U_s} \cdot \frac{L_s}{L_h} \right)^2 \cdot J \cdot \frac{R_r' \cdot s_b \cdot 2\pi f_N}{3p^2}$$

Example:

Data of induction machine 1:

Break down slip s_b = 8%.

Line start at 50 Hz, rated voltage:

$$P = \left(\frac{2\pi f_s}{U_s} \cdot \frac{L_s}{L_h} \right)^2 \cdot J \cdot \frac{R_r' \cdot s_b \cdot 2\pi f_N}{3p^2} = \left(\frac{2\pi 50}{380/\sqrt{3}} \cdot \frac{0.00971}{0.00917} \right)^2 \cdot 2.8 \cdot \frac{0.02 \cdot 0.08 \cdot 2\pi 50}{3 \cdot 2^2} = 0.2696$$

Curve with *P*: $M_{b,dyn} / M_{b,stat} = 0.71$

Compare: Numerical solution yields 0.74 ! = sufficient coincidence !

Explanation of *Pfaff-Jordan* parameter *P*

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Higher parameter *P* = less dynamic starting

$P \sim \tau_J$ Higher inertia = slower motor acceleration = **less dynamic starting**

$$P \sim \left(\frac{x_s}{x_h}\right)^2 = \left(1 + \frac{x_{s\sigma}}{x_h}\right)^2$$

Higher stator leakage flux = lower motor torque = less motor acceleration = **less dynamic starting**

$$P \sim \left(\frac{\omega_s}{u_s}\right)^2 = \frac{1}{\psi_s^2}$$

Higher stator flux linkage ψ_s = higher motor torque = faster motor acceleration = **more dynamic starting**

5) Modell einer Schenkelpol-Synchronmaschine mit zwei Statorsträngen (Beispiel 1b)). Die beiden Statorstränge besitzen Widerstände R_s und liegen an einem Netz mit

$$u_s^a = -\hat{U}\sin\omega_s t\,, \qquad u_s^b = \hat{U}\cos\omega_s t$$

a) Leiten Sie für den stationären Betrieb mit $\vartheta = \omega_s t - \gamma$ und i_R = konst. über den Ansatz $\underline{i}_s = \underline{\hat{I}}_s e^{j\omega_s t}$ die Spannungsgleichung

$$\left[R_s + j\tfrac{1}{2}(X_d + X_q)\right]\underline{\hat{I}}_s + j\tfrac{1}{2}(X_d - X_q)\underline{\hat{I}}_s^* e^{-j2\gamma} + j\hat{U}_p e^{-j\gamma} = j\hat{U} \qquad (1)$$

und den Ausdruck

$$\omega_s M_e = \hat{U}\,\mathrm{Im}\{\underline{\hat{I}}_s\} - R_s\,\underline{\hat{I}}_s\underline{\hat{I}}_s^* \qquad (2)$$

ab, wobei

$X_d = \omega_s(L_0 + L_2)$ ... "synchrone Längsreaktanz"

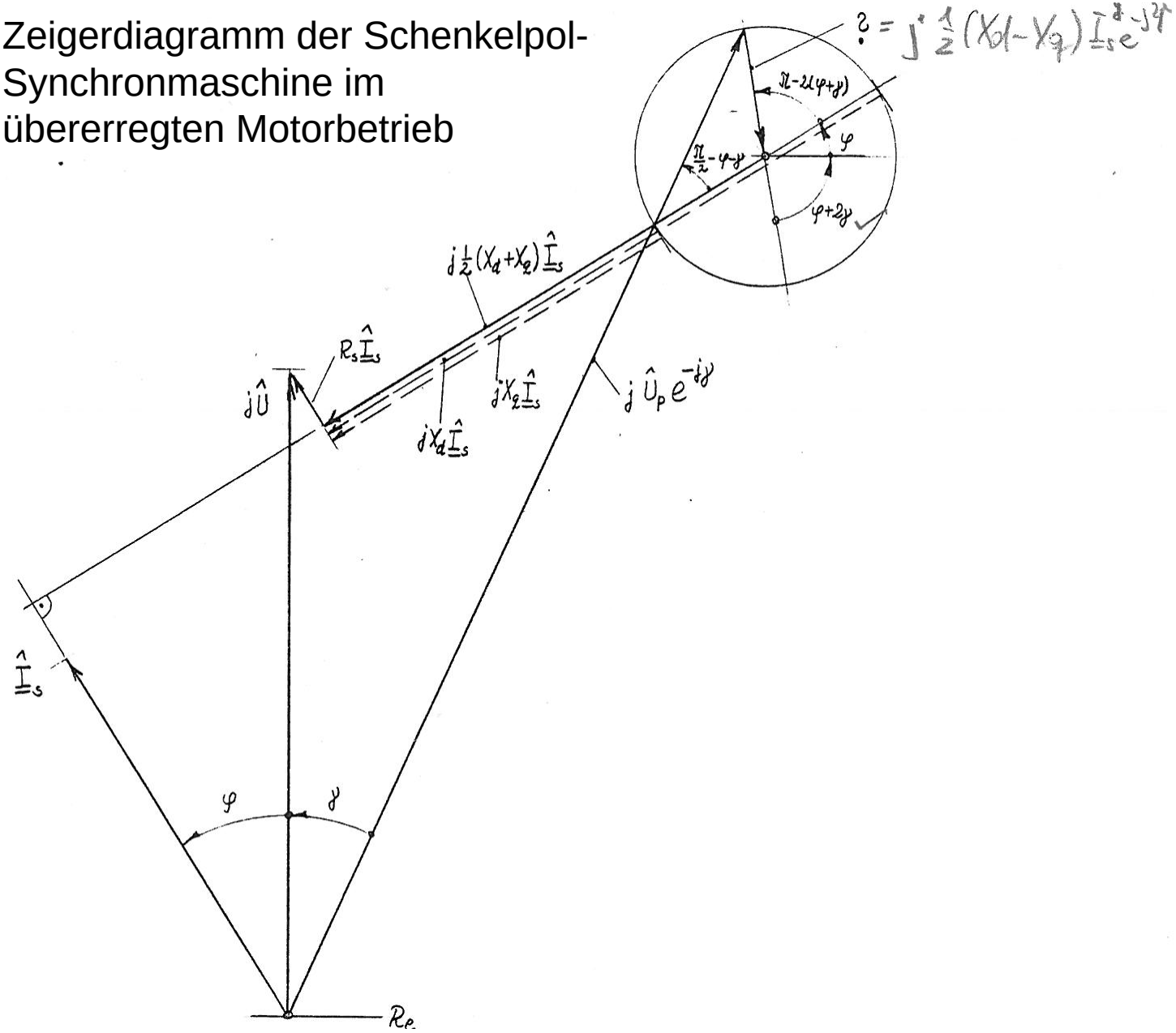
$X_q = \omega_s(L_0 - L_2)$ ... "synchrone Querreaktanz"

$\hat{U}_p = \omega_s L_g i_R$ ... Scheitelwert der "Polradspannung"

γ ... "Lastwinkel"

b) Machen Sie sich klar, daß der Spannungsgleichung (1) das folgende Zeigerdiagramm entspricht und ergänzen Sie die fehlende Bezeichnung. Wirkt die Maschine im gezeichneten Betriebszustand als Generator oder als Motor und stellt sie, vom Netz aus gesehen, überdies eine Kapazität ("übererregt") oder eine Induktivität ("untererregt") dar?

Zeigerdiagramm der Schenkelpol-Synchronmaschine im übererregten Motorbetrieb



c) Berechnen Sie aus (1) für $R_s = 0$ die Amplitude $\hat{\underline{I}}_s$ des Statorstroms und skizzieren Sie die zugehörigen Ortskurven für variablen Lastwinkel γ und jeweils festen Rotorstrom (z.B. Ortskurven von $\hat{\underline{I}}_s X_d/\hat{U}$ für $X_d/X_q = 3/2$, $\hat{U}_p/\hat{U} = 3/2,\ 1,\ 1/2,\ 0$). Der Ausdruck für $\hat{\underline{I}}_s$, in (2) eingesetzt ($R_s = 0$), liefert M_e als Funktion von $\hat{U}$, $\hat{U}_p$ und γ. Markieren Sie die Punkte $|M_e| = \max.$ in den Stromortskurven.

Lösung:

b) fehlende Bezeichnung: $j\frac{1}{2}(X_d - X_q)\hat{\underline{I}}_s^* e^{-j2\gamma}$. Motorbetrieb, übererr.

c) $$\hat{\underline{I}}_s = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{X_d} + \frac{1}{X_q} - \left(\frac{1}{X_d} - \frac{1}{X_q}\right)e^{-j2\gamma}\right]\hat{U} - \frac{\hat{U}_p}{X_d}e^{-j\gamma},$$

$$\omega_s M_e = \hat{U}\,\mathrm{Im}\{\hat{\underline{I}}_s\} = \frac{\hat{U}\hat{U}_p}{X_d}\sin\gamma + \frac{\hat{U}^2}{2}\left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d}\right)\sin 2\gamma.$$

Ortskurven sind "Pascal-Schnecken".

Lösung: Aufgabe 5) Schenkelpol-Synchronmaschine

Raumzeigergleichungen von Aufgabe 1b):

$$\underline{\Psi}_s = L_0 \underline{i}_s + L_2 \underline{i}_s^* e^{j2\vartheta} + L_g i_R e^{j\vartheta}$$

$$\underline{\Psi}_R = \Psi_R = L_R i_R + \mathrm{Re}\{L_g \underline{i}_s e^{-j\vartheta}\}$$

$$\dot{\underline{\Psi}}_s + R_s \underline{i}_s = \underline{u}_s, \quad \dot{\Psi}_R + R_R i_R = u_R$$

$$M_e = \mathrm{Im}\{L_g i_R \underline{i}_s e^{-j\vartheta} + L_2 \underline{i}_s^2 e^{-j2\vartheta}\}$$

a) Stationärbetrieb: $u_{sa} = -\hat{U}\sin\omega_s t$, $u_{sb} = \hat{U}\cos\omega_s t$

$$\underline{u}_s = u_{sa} + j u_{sb} = \underbrace{jj}_{-1}\hat{U}\sin\omega_s t + j\hat{U}\cos\omega_s t = j\hat{U}e^{j\omega_s t}$$

$$i_R = \text{konst.}, \quad \vartheta = \omega_s t - \gamma, \quad \underline{i}_R = i_R, \quad \underline{i}_s = \hat{\underline{I}}_s e^{j\omega_s t}$$

Ständerspannungsgleichung bei $R_s = 0$

L_0:

$$0\underline{i}_s + L_2\left(\underline{i}_s^* \cdot e^{j2\vartheta}\right) + L_g i_R\left(e^{j\vartheta}\right) = \underline{u}_s \Rightarrow L_0 j\omega_s \hat{\underline{I}}_s e^{j\omega_s t} + L_2\left(-j\omega_s \hat{\underline{I}}_s^* e^{-j\omega_s t} \cdot e^{j2\vartheta}\right) +$$

$$+ \hat{\underline{I}}_s^* e^{-j\omega_s t} \cdot j2\omega_s \cdot e^{j2(\omega_s t - \gamma)}\Big) + L_g i_R \cdot j\omega_s \cdot e^{j(\omega_s t - \gamma)} = j\hat{U} \cdot e^{j\omega_s t}$$

$$j\omega_s L_0 \hat{\underline{I}}_s \cancel{e^{j\omega_s t}} - j\omega_s L_2 \hat{\underline{I}}_s^* \cancel{e^{j\omega_s t}} e^{-j2\gamma} + \underbrace{j2\omega_s L_2 \hat{\underline{I}}_s^* \cancel{e^{j\omega_s t}} e^{-j2\gamma}}_{j\omega_s L_2 \hat{\underline{I}}_s^* e^{-j2\gamma}} + \underbrace{j\omega_s L_g i_R}_{\hat{U}_p} \cancel{e^{j\omega_s t}} e^{-j\gamma} = j\hat{U} \cdot \cancel{e^{j\omega_s t}}$$

$$\frac{1}{2}\left(\underbrace{L_0 + L_2}_{L_d} + \underbrace{L_0 - L_2}_{L_q}\right) \qquad \frac{1}{2}\left(\underbrace{L_0 + L_2}_{L_d} - \underbrace{(L_0 - L_2)}_{L_q}\right)$$

bei $R_s \neq 0$:

$$R_s \hat{\underline{I}}_s + j\frac{(X_d+X_q)}{2}\cdot\hat{\underline{I}}_s + j\frac{(X_d-X_q)}{2}\cdot\hat{\underline{I}}_s^* e^{j2\gamma} + j\hat{U}_p e^{j\gamma} = j\hat{U} \qquad (1)$$

$$\omega_s M_e = \mathrm{Im}\{\omega_s L_g i_R \hat{\underline{I}}_s e^{j\omega_s t} e^{-j(\omega_s t-\gamma)} + \omega_s L_2 \hat{\underline{I}}_s^2 e^{j2\omega_s t}\cdot e^{-j(2\omega_s t-2\gamma)}\} =$$

$$= \mathrm{Im}\{\hat{U}_p\cdot\hat{\underline{I}}_s\cdot e^{j\gamma} + \omega_s L_2 \hat{\underline{I}}_s^2 e^{j2\gamma}\} = \mathrm{Im}\{(\underbrace{\hat{U}_p e^{j\gamma} + \omega_s L_2 \hat{\underline{I}}_s e^{j2\gamma}}_{\Downarrow})\hat{\underline{I}}_s\} \quad (2)$$

Aus (1) folgt: (1) mit $1/j$ multipliziert und dann konjugiert komplex:

$$-\frac{R_s}{j}\hat{\underline{I}}_s^* + \underbrace{\frac{X_d+X_q}{2}}_{\omega_s L_0}\cdot\hat{\underline{I}}_s^* + \underbrace{\frac{X_d-X_q}{2}}_{\omega_s L_2}\cdot\hat{\underline{I}}_s e^{j2\gamma} + \hat{U}_p e^{j\gamma} = \hat{U} \quad (1)'' \Rightarrow$$

$$\omega_s L_2 \hat{\underline{I}}_s e^{j2\gamma} + \hat{U}_p e^{j\gamma} = \hat{U} - \omega_s L_0 \hat{\underline{I}}_s^* - jR_s\hat{\underline{I}}_s^*$$

$$(2):\ \omega_s M_e = \mathrm{Im}\{(\hat{U} - \omega_s L_0 \hat{\underline{I}}_s^* - jR_s\hat{\underline{I}}_s^*)\cdot\hat{\underline{I}}_s\} = \mathrm{Im}\{\hat{U}\hat{\underline{I}}_s - \omega_0 L_0 \hat{\underline{I}}_s\hat{\underline{I}}_s^* - jR_s\hat{\underline{I}}_s\hat{\underline{I}}_s^*\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_s M_e = \hat{U}\,\mathrm{Im}\{\hat{\underline{I}}_s\} - R_s\hat{\underline{I}}_s\hat{\underline{I}}_s^*$$

Dies kann auch direkt aus der Leistungsbilanz berechnet werden:

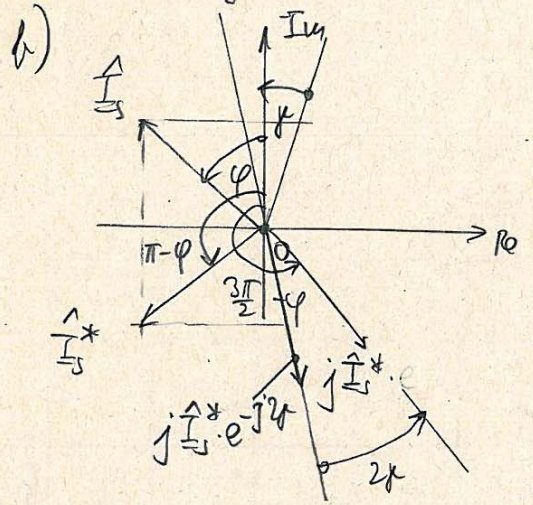
$$P_e = \frac{m}{2}\hat{U}_s\hat{I}_s\cos\varphi = \hat{U}\hat{I}_{s,\parallel} = \hat{U}\cdot\mathrm{Im}\{\hat{\underline{I}}_s\} \Leftarrow \frac{m}{2} = \frac{2}{2} = 1!$$

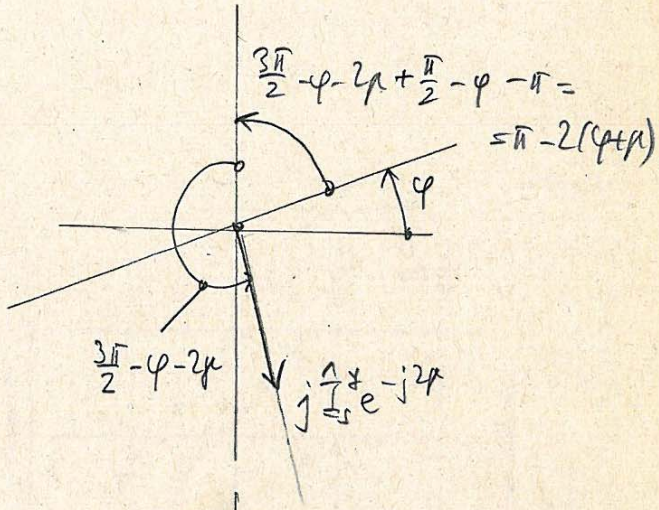
$$P_\delta = M_e \cdot \omega_s = P_e - P_{Cu,s} = \hat{U}\, \mathrm{Im}\{\hat{\underline{I}}_s\} - R_s \hat{\underline{I}}_s \hat{\underline{I}}_s^*$$

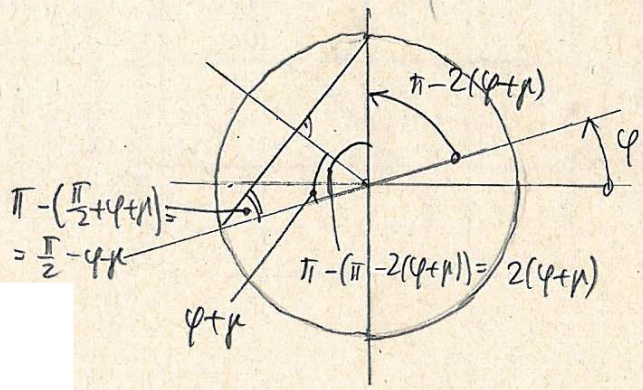
$\Uparrow$

2-polig unterstellt

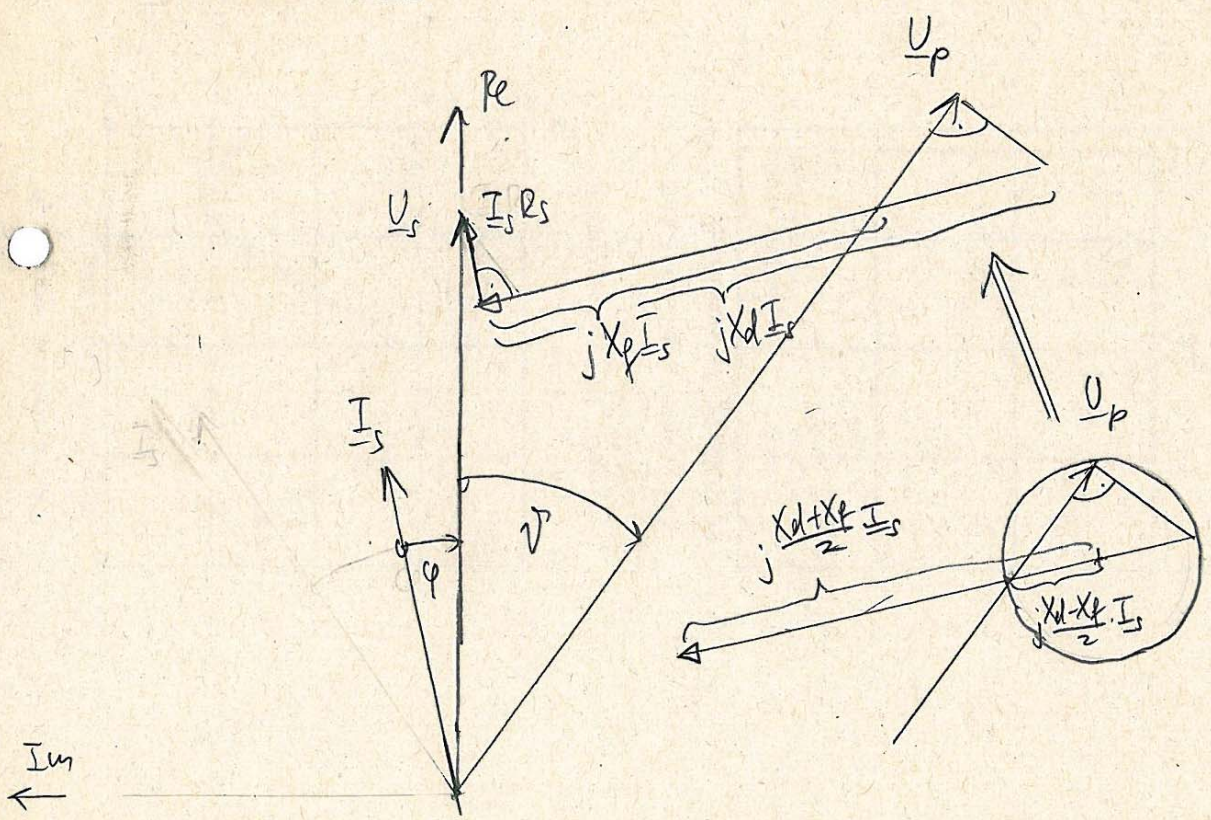
b)







Vergleich zum Zeigerdiagramm in der Vorlesung: EMA:



Motorbetrieb, da $I_s \cos\varphi$ in Richtung von U_s (Kulmanicher Zählpfeilsystem)
Kapazitives Verhalten, da $I_s \sin\varphi$ der Spg. U_s VOREILEND („übererregt")

c) $R_s = 0$: $\cancel{j}\frac{1}{2}(X_d+X_q)\hat{\underline{I}}_s + \cancel{j}\frac{1}{2}(X_d-X_q)\hat{\underline{I}}_s^* e^{-j2\mu} + \cancel{j}\hat{U}_p e^{-j\mu} = \cancel{j}\hat{U} = \hat{\underline{U}}_s/j \quad |\times e^{+j\mu}$

$$\frac{1}{2}(X_d+X_q)\underbrace{\hat{\underline{I}}_s e^{+j\mu}}_{\underline{a}=A+jB} + \frac{1}{2}(X_d-X_q)\underbrace{(\hat{\underline{I}}_s e^{j\mu})^*}_{\underline{a}^*=A-jB} + \hat{U}_p = \hat{U}e^{j\mu} = \hat{U}(\cos\mu + j\sin\mu)$$

$$\frac{1}{2}(X_d+X_q)(A+jB) + \frac{1}{2}(X_d-X_q)(A-jB) = \hat{U}\cos\mu - \hat{U}_p + j\hat{U}\sin\mu$$

Re: $X_d A = \hat{U}\cos\mu - \hat{U}_p$ Im: $X_q B = \hat{U}\sin\mu$

$$\hat{\underline{I}}_s \cdot e^{j\mu} = A+jB = \frac{\hat{U}\cos\mu}{X_d} - \frac{\hat{U}_p}{X_d} + j\frac{\hat{U}\sin\mu}{X_q} = \frac{\hat{U}}{X_d}\left(\frac{1}{2}\right)(e^{j\mu}+e^{-j\mu}) - \frac{\hat{U}_p}{X_d} + j\frac{\hat{U}}{X_q}\frac{e^{j\mu}-e^{-j\mu}}{2j} \quad |\times e^{-j\mu}$$

$$\hat{\underline{I}}_s = \frac{\hat{U}}{2}\left[(1+e^{-j2\mu})\frac{1}{X_d} + (1-e^{-j2\mu})\frac{1}{X_q}\right] - \frac{\hat{U}_p e^{-j\mu}}{X_d}$$

$$\hat{\underline{I}}_s = \frac{\hat{U}}{2}\left[\frac{1}{X_d}+\frac{1}{X_q} + \left(\frac{1}{X_d}-\frac{1}{X_q}\right)e^{-j2\mu}\right] - \frac{\hat{U}_p}{X_d}e^{-j\mu}$$

oder: aus $\frac{1}{2}(X_d+X_q)\underline{a} + \frac{1}{2}(X_d-X_q)\underline{a}^* + \hat{U}_p = \hat{U}e^{j\mu} \;/\; * \Rightarrow$ (1)

$\Rightarrow \frac{1}{2}(X_d+X_q)\cdot\underline{a}^* + \frac{1}{2}(X_d-X_q)\cdot\underline{a} + \hat{U}_p = \hat{U}e^{-j\mu} \Rightarrow$ (2)

$\underline{a}^* = \frac{2}{X_d+X_q}\cdot\left[\hat{U}e^{-j\mu} - \hat{U}_p - \frac{1}{2}(X_d-X_q)\cdot\underline{a}\right]$ eingesetzt in (1):

$$(2)\rightarrow(1):\ \underbrace{\left[\frac{1}{2}(X_d+X_q) - \frac{(X_d-X_q)^2}{2(X_d+X_q)}\right]}_{\frac{2X_dX_q}{X_d+X_q}}\cdot\underline{a} = \underbrace{\hat{U}e^{j\mu} - \hat{U}_p}_{\hat{U}\left[e^{j\mu} - \frac{X_d-X_q}{X_d+X_q}\cdot e^{-j\mu}\right] - \hat{U}_p\left[1 - \frac{X_d-X_q}{X_d+X_q}\right]} - \frac{X_d-X_q}{X_d+X_q}\cdot\left[\hat{U}e^{-j\mu} - \hat{U}_p\right]$$

$$\hat{\underline{I}}_s e^{j\mu} = \underline{a} = \frac{1}{2}\hat{U}\left[\underbrace{e^{j\mu}\frac{X_d+X_q}{X_dX_q} - \frac{X_d-X_q}{X_d\cdot X_q}\cdot e^{-j\mu}}_{e^{j\mu}\left(\frac{1}{X_q}+\frac{1}{X_d}\right) - e^{-j\mu}\left(\frac{1}{X_q}-\frac{1}{X_d}\right)}\right] - \frac{\hat{U}_p}{2}\underbrace{\left[\frac{X_d+X_q}{X_dX_q} - \frac{X_d-X_q}{X_d\cdot X_q}\right]}_{\hat{U}_p/X_d}$$

$$\hat{\underline{I}}_s = \frac{\hat{U}}{2}\left[\frac{1}{X_d} + \frac{1}{X_q} + \left(\frac{1}{X_d} - \frac{1}{X_q}\right)\cdot e^{-j2\mu}\right] - \frac{\hat{U}_p}{X_d}\cdot e^{-j\mu}$$

in (2): $\omega_s M_e\Big|_{R_s=0} = \hat{U}\,\mathrm{Im}\{\hat{\underline{I}}_s\} = \frac{\hat{U}^2}{2}\left[-\left(\frac{1}{X_d} - \frac{1}{X_q}\right)\cdot\sin 2\mu\right] - \frac{\hat{U}_p\hat{U}}{X_d}(-\sin\mu)$

$$M_e = \left[\frac{\hat{U}\hat{U}_p}{X_d}\sin\mu + \frac{\hat{U}^2}{2}\left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d}\right)\sin 2\mu\right]\frac{1}{\omega_s}$$

Vergleiche: Skript „EMA": $-\vartheta$ statt μ, U_s statt $\hat U$, U_p statt $\hat U_p$, ϑ negativ für Motorbetrieb, pollpaarzahl statt $p=1 \Leftrightarrow \omega_s/p$ statt ω_s!

$$M_e = -\frac{m}{2}\cdot\frac{p}{\omega_s}\left[\frac{\hat U_s \hat U_p}{X_d}\sin\vartheta + \frac{\hat U_s^2}{2}\left(\frac{1}{X_q}-\frac{1}{X_d}\right)\sin 2\vartheta\right] \qquad \hat U = \sqrt{2}\,U,\ \hat U_p = \sqrt{2}\,U_p$$

hier: $m=2$

$$M_e\Big|_{m=2} = -\frac{p}{\omega_s}\left[\frac{U_s U_p}{X_d}\sin\vartheta + \frac{U_s}{2}\left(\frac{1}{X_q}-\frac{1}{X_d}\right)\sin 2\vartheta\right]$$

$$\frac{dM_e}{d\mu}=0:\ a\cos\mu + b\cdot 2\underbrace{\cos 2\mu}=0;\ a\cos\mu + 4b\cos^2\mu - 2b = 0;\ x^2+\frac{a}{4b}x-\frac{1}{2}=0,\ 0\le\mu\le 360^\circ$$

$$a=\frac{\hat U\hat U_p}{X_d},\ b=\frac{\hat U^2}{2}\left(\frac{1}{X_q}-\frac{1}{X_d}\right)\ \ 2\cos^2\mu-1,\ \cos\mu = x,\ \cos\mu^* = -\frac{a}{8b}\pm\sqrt{\left(\frac{a}{8b}\right)^2+\frac{1}{2}} > 0,\ \text{da } \mu^*<90^\circ$$

Ortskurven: bezogen auf Kurzschlussstrom bei $\hat U_p = 0$:

$(R_s=0)$ $\quad |\hat{\underline I}_{sk}| = \hat U / X_d$

$$\underline{i}_s = \frac{\hat{\underline I}_s}{\hat I_{sk}} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{X_d}{X_q}+1-\left(\frac{X_d}{X_q}-1\right)\cdot e^{-j2\mu}\right)}{} - \frac{\hat U_p}{\hat U}\cdot e^{-j\mu}$$

Parameter: $X_d/X_q = 3/2$, $u_p = \hat U_p/\hat U = 3/2;\ 1;\ 1/2;\ 0$

$$\underline{i}_s = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+1-\left(\frac{3}{2}-1\right)e^{-j2\mu}\right) - u_p e^{-j\mu} = \frac{5}{4}-\frac{1}{4}e^{-j2\mu} - u_p e^{-j\mu}$$

$$\underline{i}_s = \left[1{,}25 - u_p\cos\mu - 0{,}25\cos 2\mu\right] + j\left[u_p\cdot\sin\mu + 0{,}25\sin 2\mu\right]$$

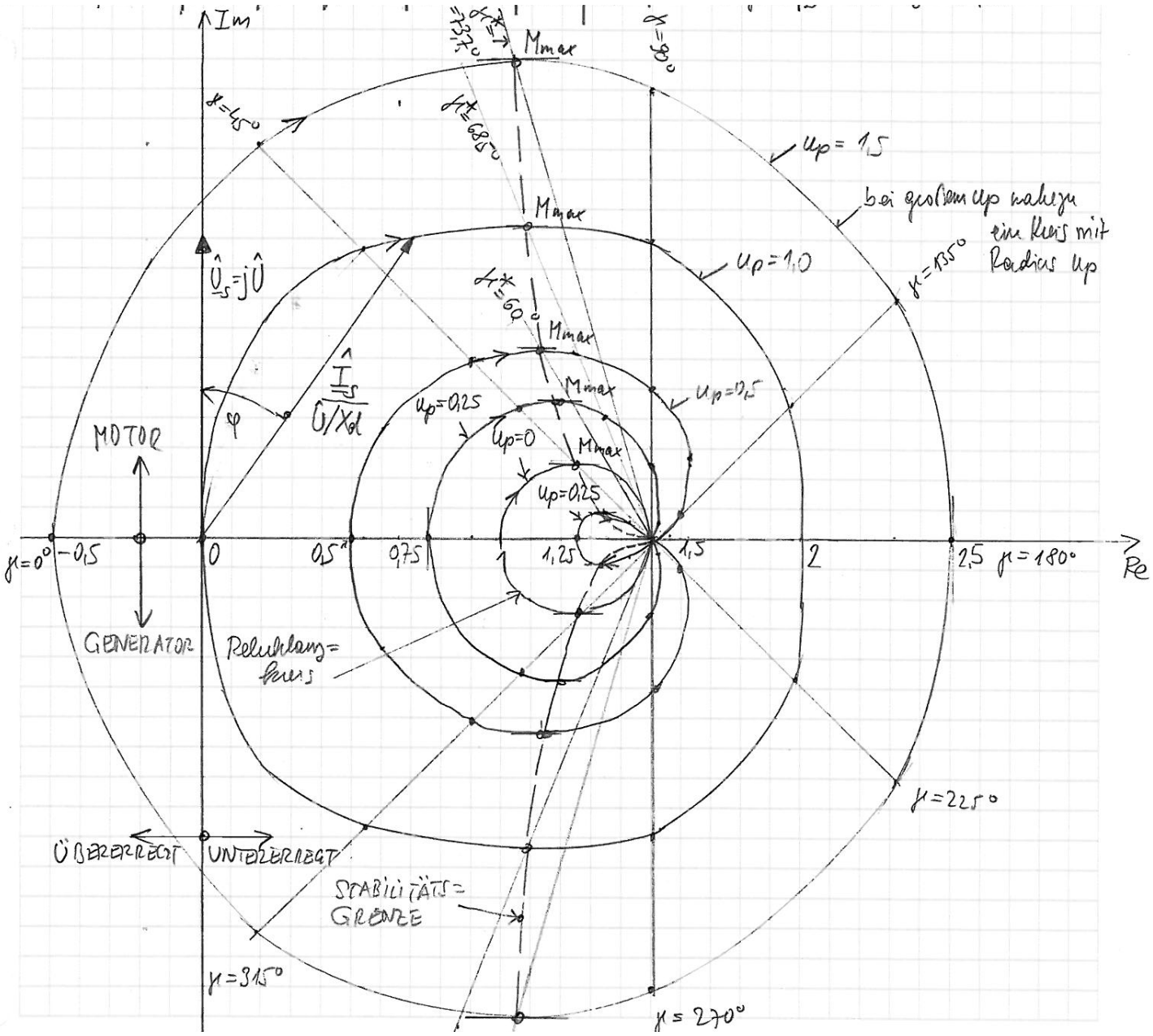
$\pm\mu$: symmetrisch zu Re-Achse

$\mu/^\circ$	0	45	90	135	180	$-u_p$	μ^*
i_{sRe}/i_{sIm}	−0,5/0	0,19/1,31	1,5/1,5	2,31/0,81	2,5/0	1,5	73,7°
	0/0	0,54/0,96	1,5/1	1,96/0,46	2,0/0	1,0	68,5°
	0,5/0	0,9/0,6	1,5/0,5	1,6/0,1	1,5/0	0,5	60°
	1/0	1,25/0,25	1,5/0	1,25/−0,25	1/0	0	45°

$$\frac{a}{8b} = \frac{\hat U\hat U_p}{X_d}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{\hat U^2}\,\frac{X_d X_q}{X_d - X_q} = \frac{\hat U_p}{4\hat U}\cdot\frac{X_q}{X_d - X_q}$$

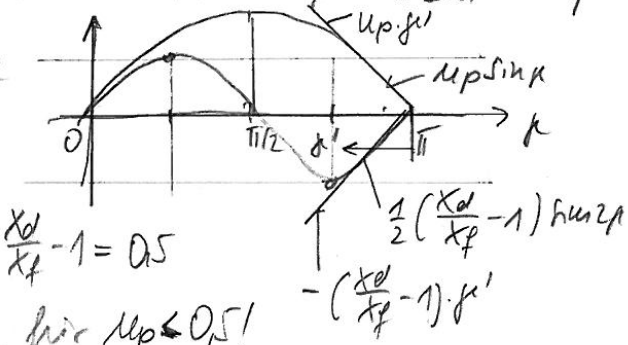
$\cos\mu^* = f(a/8b)$

225°: $\cos\mu^* = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0{,}707 \Rightarrow \mu^* = 45^\circ, 225^\circ$


Im
Re
Mmax
α=45°
α*=85°
α*=60°
α=90°
up = 1,5
up = 1,0
up = 0,5
up=0,25
up=0
up=0,25
bei großem up nahezu ein Kreis mit Radius up
μ=135°
μ=0°
−0,5
0
0,5
0,75
1
1,25
1,5
2
2,5
μ=180°
μ=225°
μ=315°
μ=270°
MOTOR
GENERATOR
φ
ÜBERERREGT
UNTERERREGT
Reluktanz= Kreis
STABILITÄTS= GRENZE

Keine „innere" Schleife der PASCAL-Schnecke, solange $i_{s\,Im} \geq 0$ für $0 \leq \gamma \leq \pi$.

$$i_{s\,Im} = u_p \cdot \sin\gamma + \frac{1}{2}\left(\frac{X_d}{X_f} - 1\right) \cdot \sin 2\gamma$$



$i_{s\,Im} \geq 0$ für $0 \leq \gamma \leq \pi$,

wenn: $u_p \cdot \gamma' \geq \left(\frac{X_d}{X_f} - 1\right)\gamma' \Rightarrow u_p \geq \frac{X_d}{X_f} - 1 = 0{,}5$

Einschnürung der PASCAL-Schnecke für $u_p < 0{,}5$!

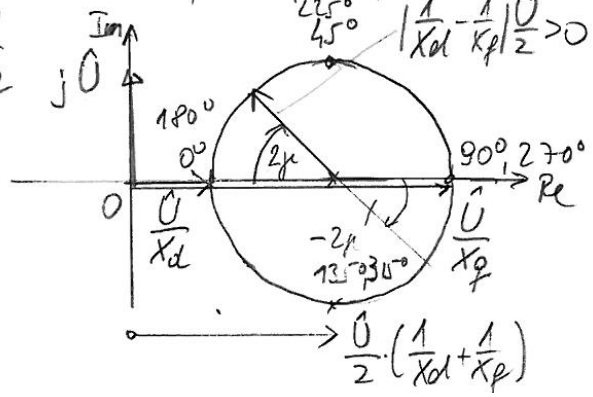
γ	0°	45°	67,5°	90°	112,5°	135°	157,5°	180°	202,5°	225°	247,5°	...
i_{sRe} / i_{sIm}	0,75/0	1,07/0,43	1,33/0,41	1,5/0,25	1,52/0,05	1,43/0,07 (−)	1,3/0,08 (−)	1,25/0	1,3/0,08	1,43/0,07	1,52/0,05 (−)	.. $u_p = 0{,}25$

Rotationskreis bei $R_s = 0$: ($u_p = 0$)

$$\underline{i}_s = \frac{\underline{I}_s}{\hat{U}/X_d} = \frac{1}{2}\left(\frac{X_d}{X_f} + 1 - \left(\frac{X_d}{X_f} - 1\right) \cdot e^{-j2\gamma}\right)$$

$$\hat{\underline{I}}_s = \frac{\hat{U}}{2} \cdot \left(\frac{1}{X_d} + \frac{1}{X_f} + \overbrace{\left(\frac{1}{X_d} - \frac{1}{X_f}\right)}^{<0} \cdot e^{-j2\gamma}\right)$$

$\gamma = 0°$, $\gamma = 180°$, $\gamma = 360°$: $\hat{\underline{I}}_s = \frac{\hat{U}}{X_d}$; $\gamma = 90°$, $\gamma = 270°$: $\hat{\underline{I}}_s = \frac{U}{X_f}$



6) Dynamische Gleichungen einer Vollpol-Synchronmaschine (ohne "Dämpferwicklung").

Gleichungen aus Beispiel 1b) mit $L_2 = 0$

Statorwiderstände vernachlässigt: $R_s = 0$

Raumzeiger der Statorspannungen: $\underline{u}_s = j\hat{U} e^{j\omega_s t}$

Die Maschine befinde sich zunächst in einem stationären Betriebszustand mit dem Belastungsmoment $M = -M_{B0}$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ werde das Lastmoment sprunghaft auf den Wert $M = -M_B$ geändert.

a) Finden Sie eine Differentialgleichung für den Lastwinkel $\gamma(t)$ ($\vartheta = \omega_s t - \gamma(t)$) durch Elimination von $\underline{i}_s$ aus der Bewegungsgleichung $J\ddot{\vartheta} = M_e + M$ unter der Annahme, daß der Rotorstrom i_R während des Ausgleichsvorgangs festgehalten wird ($\hat{U}_p = \omega_s L_g i_R$ = konst., kleine Zeitkonstante L_R/R_R) ($R_R \to \infty$)

b) Stellen Sie eine analoge Gleichung für den Fall auf, daß die Rotorflußverkettung ψ_R ihren stationären Ausgangswert beibehält (große Zeitkonstante L_R/R_R, i_R und damit $\hat{U}_p$ ändern sich!) $(R_R \to 0)$

$X_d = \omega_s L_0$

$L_0 = L_s$

<u>Lösung</u>: a) $J\ddot{\gamma} + \frac{\hat{U}\hat{U}_p}{\omega_s X_d}\sin\gamma = M_B$ — Pendelgleichung

b) $J\ddot{\gamma} + \left[\hat{U}_{p0} + \frac{1-\sigma}{\sigma}\hat{U}(\cos\gamma_0 - \cos\gamma)\right]\frac{\hat{U}}{\omega_s X_d}\sin\gamma = M_B$ mit $\frac{\hat{U}\hat{U}_{p0}}{\omega_s X_d}\sin\gamma_0 = M_{B0}$, $\sigma = 1 - \frac{L_\sigma^2}{L_s L_R}$

Lösung: Aufgabe 6):

Vollpolmaschine: $R_s = 0$

$$\underline{\Psi}_s = L_s \underline{i}_s + L_g i_R e^{j\vartheta}, \quad \underline{\Psi}_R = \psi_R = L_R i_R + \mathrm{Re}\{L_g \underline{i}_s e^{-j\vartheta}\}$$

$$M_e = \mathrm{Im}\{L_g i_R \underline{i}_s e^{-j\vartheta}\} \qquad J\ddot{\vartheta} = M_e + M$$

Spgs.gleichungen: $\underline{u}_s = \dot{\underline{\Psi}}_s, \quad u_R = \dot{\psi}_R + R_R i_R$

Betrieb stationär bei $\underline{u}_s = j\hat{U} e^{j\omega_s t}$ und $M_{B0} = -M$, daher: $\vartheta = \omega_s t - \mu_0$

$$\underline{i}_s = \hat{\underline{I}}_s e^{j\omega_s t}, \quad i_R = \text{konst.} = i_{R0} \qquad \dot{\vartheta} = \omega_s, \ \ddot{\vartheta} = 0$$

$$-\dot{\underline{\Psi}}_s = j\hat{U} e^{j\omega_s t} = L_s \dot{\underline{i}}_s + L_g i_{R0} (e^{j\vartheta})^{\cdot} = j\omega_s L_s \hat{\underline{I}}_s e^{j\omega_s t} + j\underbrace{\omega_s L_g i_{R0}}_{\hat{U}_{p0}} e^{j\omega_s t} e^{-j\mu_0}$$

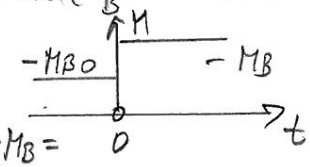
$-L_R/R_R \ll 1 \Leftrightarrow \dot{\psi}_R \ll R_R i_R \Leftrightarrow i_R \simeq u_R/R_R = \text{konst.}$, wenn $u_R = \text{konst.}$

$$\Rightarrow \hat{\underline{I}}_s = \frac{1}{\omega_s L_s} \cdot (\hat{U} - \hat{U}_{p0} \cdot e^{-j\mu_0}) \Rightarrow M_e = \mathrm{Im}\{\underbrace{L_g i_{R0}}_{\frac{\hat{U}_{p0}}{\omega_s}} \cdot \frac{\hat{U} - \hat{U}_{p0} e^{-j\mu_0}}{\underbrace{\omega_s L_s}_{X_s}} \cdot e^{j\mu_0}\} = \frac{\hat{U}_{p0} \hat{U} \sin\mu_0}{\omega_s X_s}$$

$$J\ddot{\vartheta} = 0 = M_e - M_{B0} : \frac{\hat{U}_{p0} \hat{U}}{\omega_s X_s} \sin\mu_0 = M_{B0}$$

$$\mu_0 = \arcsin(M_{B0}\, \omega_s X_s / (\hat{U}_{p0} \hat{U}))$$

a) Lastmomentänderung bei $t = 0$: $-M_{B0} \rightarrow -M_B$



$\omega_s = \text{konstant}$,
$\hat{U} = \text{konstant}$,
$i_R = i_{R0} = \text{konstant}$.

$$J\ddot{\vartheta} = -J\ddot{\mu} = \mathrm{Im}\{L_g i_{R0} \frac{\hat{U} - \hat{U}_{p0} e^{-j\mu}}{X_s} e^{j\mu}\} - M_B = \frac{\hat{U}_{p0} \hat{U}}{\omega_s X_s} \sin\mu - M_B$$

$$\Rightarrow \vartheta = \omega_s t - \mu(t) = \vartheta(t)$$

$$\ddot{\vartheta} = -\ddot{\mu}$$

Pendelgleichung der statischen Stabilität

$$J\ddot{\mu} + \frac{\hat{U}_{p0} \hat{U}}{\omega_s X_s} \sin\mu = M_B$$

b) $R_R \to 0$: L_R/R_R groß : $\dot{\psi}_R + R_R i_R = u_R \Rightarrow \dot{\psi}_R + R_R(i_R - i_{R0}) = 0$

$u_R = U_R = R_R i_{R0}$ $\quad \underbrace{\ll}_{\approx 0} \Rightarrow \dot{\psi}_R = 0$

$\psi_R = \psi_{R0} = \text{konst.}$

Bei $t \le 0$: $M = -M_{B0}$: $\varphi = \varphi_0$, $\hat{U}_p = \hat{U}_{p0}$!

$$\psi_{R0} = L_R i_{R0} + \mathrm{Re}\left\{L_\sigma \cdot \frac{\hat{U} - \hat{U}_{p0} e^{-j\varphi_0}}{X_s} \cdot e^{j\varphi_0}\right\} = L_R i_{R0} + \frac{L_\sigma}{X_s}(\hat{U}\cos\varphi_0 - \hat{U}_{p0})$$

$$\psi_{R0} = \frac{L_R}{\omega_s L_\sigma} \underbrace{\omega_s L_\sigma i_{R0}}_{\hat{U}_{p0}} + \frac{L_\sigma}{X_s}(\hat{U}\cos\varphi_0 - \hat{U}_{p0}) = \hat{U}_{p0} \cdot \frac{L_R}{\omega_s L_\sigma} \underbrace{\left(1 - \frac{L_\sigma^2}{L_s L_R}\right)}_{\sigma} + \frac{L_\sigma}{X_s}\hat{U}\cos\varphi_0$$

$$\psi_{R0} = \sigma \hat{U}_{p0} \cdot \frac{L_R}{\omega_s L_\sigma} + \hat{U} \cdot \frac{L_\sigma}{X_s}\cos\varphi_0$$

Lastsprung bei $t = 0$: $M = -M_B$: $J\ddot{\varphi} = M_e - M_B$; $\psi_{R0} = L_R i_R + \mathrm{Re}\{L_\sigma \cdot \underline{i}_s e^{-j(\omega_s t - \varphi)}\}$

$$i_R = \frac{1}{L_R}\left[\psi_{R0} - \mathrm{Re}\left\{L_\sigma \cdot \underline{\hat{I}}_s \cancel{e^{j\omega_s t}} \cdot \cancel{e^{-j\omega_s t}} e^{j\varphi}\right\}\right] \qquad \underline{\hat{I}}_s e^{j\omega_s t} = \underline{i}_s(t)$$

$$\underline{\hat{I}}_s = \frac{\hat{U} - \hat{U}_p e^{-j\varphi}}{X_s} = \frac{\hat{U} - \omega_s L_\sigma i_R e^{-j\varphi}}{X_s}$$

$$i_R = \frac{1}{L_R}\left[\psi_{R0} - \underbrace{\mathrm{Re}\left\{L_\sigma \cdot \frac{\hat{U} - \omega_s L_\sigma i_R e^{-j\varphi}}{X_s} e^{j\varphi}\right\}}_{\frac{L_\sigma}{X_s} \cdot (\hat{U}\cos\varphi - \omega_s L_\sigma i_R)}\right] \Rightarrow \underbrace{i_R - i_R \frac{L_\sigma^2}{L_R L_s}}_{i_R \cdot \sigma} = \frac{1}{L_R}\left[\psi_{R0} - \frac{L_\sigma}{X_s}\hat{U}\cos\varphi\right]$$

$$i_R = \frac{1}{\sigma L_R}\left[\psi_{R0} - \frac{L_\sigma}{X_s}\hat{U}\cos\mu\right]$$

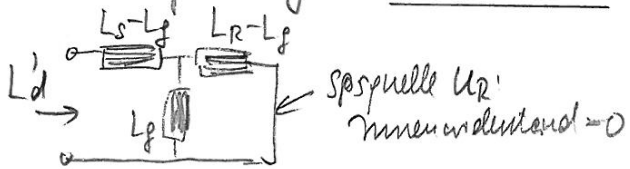
$$M_e = \mathrm{Im}\left\{L_\sigma \cdot i_R \underbrace{\frac{\hat{U} - \omega_s L_\sigma i_R e^{-j\mu}}{X_s}}_{\hat{I}_s} \cdot e^{j\mu}\right\} = L_\sigma i_R \frac{\hat{U}}{X_s}\sin\mu =$$

$$= L_\sigma \frac{\hat{U}}{X_s}\cdot\sin\mu \cdot \frac{1}{\sigma L_R}\cdot\Big[\underbrace{\sigma\hat{U}_{p0}\frac{L_R}{\omega_s L_\sigma} + \hat{U}\frac{L_\sigma}{X_s}\cos\mu_0}_{\psi_{R0}} - \frac{L_\sigma}{X_s}\hat{U}\cos\mu\Big]$$

$$M_e = \frac{\hat{U}}{\omega_s X_s}\cdot\sin\mu\Big[\hat{U}_{p0} + \hat{U}(\cos\mu_0 - \cos\mu)\cdot\underbrace{\frac{L_\sigma^2}{\sigma L_s L_R}}_{\frac{1-\sigma}{\sigma}}\Big] = M_{e,dyn}$$

$$-J\ddot{\mu} = M_e - M_B: \quad J\ddot{\mu} + \frac{\hat{U}}{\omega_s X_s}\sin\mu\cdot\Big[\hat{U}_{p0} + \hat{U}\cdot(\cos\mu_0 - \cos\mu)\cdot\frac{1-\sigma}{\sigma}\Big] = M_B$$

Pendelgleichung der transienten Stabilität



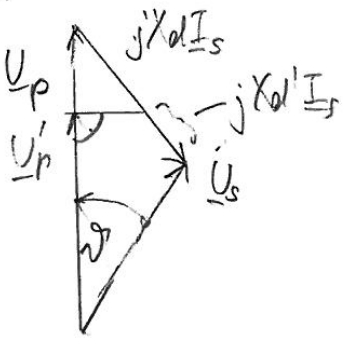
$$L_d' = L_s - L_\sigma + \frac{L_\sigma(L_R - L_\sigma)}{L_R} = L_s - \cancel{L_\sigma} + \cancel{L_\sigma} - \frac{L_\sigma^2}{L_R} = L_s\left(1 - \frac{L_\sigma^2}{L_s L_R}\right) = \sigma L_s$$ transiente Induktivität

$$M_{e,dyn} = \frac{\hat{U}}{\omega_s \underbrace{\sigma X_s}_{X_d'}}\sin\mu\Big[\underbrace{\sigma\hat{U}_{p0} + \hat{U}\cos\mu_0\cdot(1-\sigma)}_{\hat{U}_p'}\Big] - \frac{\hat{U}^2(1-\sigma)}{\omega_s \underbrace{\sigma X_s}_{X_d'}}\underbrace{\sin\mu\cos\mu}_{\frac{\sin 2\mu}{2}}$$

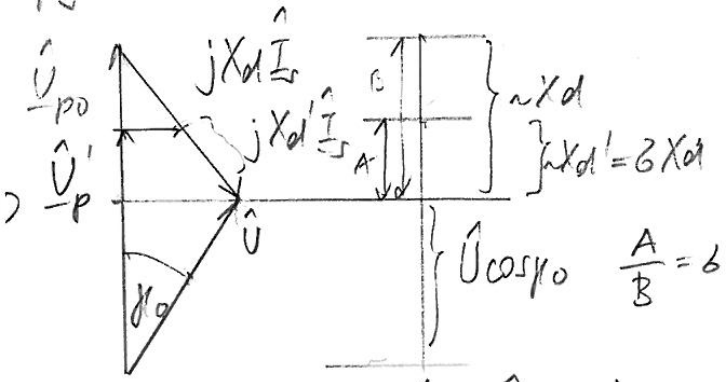
$$\frac{1-\sigma}{\sigma X_s} = \frac{1}{\sigma X_s} - \frac{1}{X_s} = \frac{1}{X_d'} - \frac{1}{X_d}$$

$$\omega_s \cdot M_{e,dyn} = \frac{\hat{U} \cdot \hat{U}_p'}{X_d'} \cdot \sin\varphi - \frac{\hat{U}^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{X_d'} - \frac{1}{X_d}\right) \cdot \sin 2\varphi$$

Vergleiche: Vorlesung „Energy Converters"



$\Leftrightarrow$



$$\Rightarrow \begin{cases} A = (\hat{U}_{p0} - \hat{U}\cos\varphi_0) \cdot \sigma \\ B = \hat{U}_{p0} - \hat{U}\cos\varphi_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{U}_p' = \hat{U}\cos\varphi_0 + (\hat{U}_{p0} - \hat{U}\cos\varphi_0) \cdot \sigma$$

oder

$$\hat{U}_p' = \sigma \hat{U}_{p0} + (1-\sigma)\hat{U}\cos\varphi_0$$