

## 1.12. Dynamik linearer Systeme

Elektromechanische Systeme arbeiten häufig im stationären Betrieb (speziell: im Gleichgewicht). Wie reagiert das System bei Störungen möglicher stationärer Betriebszustände (Stabilität)? Die Methode der Störungsrechnung erlaubt Aussagen in beschränktem Rahmen.

### 1.12.1. Linearisierung der Systemgleichungen in bezug auf eine bekannte Lösung

Systemgleichungen:  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial W_k^*}{\partial q_i} + \frac{\partial W_p}{\partial q_i} + f_i^d = f_i$ ,  $i=1, \dots, n$

mit  $W_k^* = W_k^*(\underline{\dot{q}}, \underline{q}; t)$ . Ausführlicher:  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \cdot \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial t} + \dots$

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 W_k^*}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j = \frac{\partial W_k^*}{\partial q_i} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 W_k^*}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \frac{\partial^2 W_k^*}{\partial \dot{q}_i \partial t} - \frac{\partial W_p}{\partial q_i} - f_i^d + f_i, \quad i=1, \dots, n$$



$$(1)': \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial W_k^*}{\partial q_i} + \frac{\partial W_p}{\partial q_i} + f_i^d = f_i \quad i=1, \dots, n$$

Da  $W_k^* = W_k^*(\vec{q}, \vec{\dot{q}}, t)$ , ist  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \cdot \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial}{\partial t}$

daher:  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 W_k^*}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \cdot \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 W_k^*}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} \cdot \dot{q}_j$ , eingesetzt in (1')

$$(1)'' : \underbrace{\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 W_k^*}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}}_{a_{ij}} \cdot \ddot{q}_j = \underbrace{\frac{\partial W_k^*}{\partial q_i}}_{b_i} - \underbrace{\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 W_k^*}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} \cdot \dot{q}_j}_{c_{ij}} - \underbrace{\frac{\partial^2 W_k^*}{\partial \dot{q}_i \partial t}}_{d_i} - \underbrace{\frac{\partial W_p}{\partial q_i} - f_i^d + f_i}_{e_i}$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \ddot{q}_j = - \sum_{j=1}^n c_{ij} \dot{q}_j + b_i - d_i - e_i, \quad i=1, \dots, n$$

$n \times n$  Differentialgleichungssystem 2. Ordnung

Die Koeffizienten  $a_{ij}, c_{ij}, b_i, d_i, e_i$  hängen nur von  $t, \vec{q}, \vec{\dot{q}}$  ab!





System von  $n$  gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Formal etwas einfacher zu handhaben: Äquivalentes System von  $2n$  Gleichungen erster Ordnung. Koordinaten im "Phasenraum"

$$\underline{y} = \{y_i\}, \quad i=1, \dots, 2n; \rightarrow y_i = q_i, \quad y_{n+i} = \dot{q}_i, \quad W_k^* = W_k^*(\underline{y}; t).$$

Damit

$$\dot{y}_i = y_{n+i}, \quad i=1, \dots, n$$
$$\sum_{j=n+1}^{2n} \frac{\partial^2 W_k^*}{\partial y_i \partial y_j} \dot{y}_j = \frac{\partial W_k^*}{\partial y_{i-n}} - \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{\partial^2 W_k^*}{\partial y_i \partial y_{j-n}} y_j - \frac{\partial^2 W_k^*}{\partial y_i \partial t} - \frac{\partial W_p}{\partial y_{i-n}} - f_{i-n}^d + f_{i-n}, \quad i=n+1, \dots, 2n$$

Unter der Voraussetzung  $\det\{\partial^2 W_k^* / (\partial y_i \partial y_j)\} \neq 0$  für  $i, j=n+1, \dots, 2n$  läßt sich der Gleichungssatz formal als *(Gleichungssatz in lineares Gleichungssystem in  $\dot{y}$  !)*

$$\dot{\underline{y}} = \underline{\phi}(\underline{y}, t, \underline{f}) \quad ; \quad \text{d.h.} \quad \dot{y}_i = \phi_i(y_1, \dots, y_{2n}, t, f_1, \dots, f_n), \quad i=1, \dots, 2n \quad (1)$$

zusammenfassen. Angenommen,  $y^o(t) = \{y_i^o(t)\}$  (Kurve im Phasenraum) bilde eine Lösung zum Satz  $f^o(t)$  verallgemeinerter Kräfte, d.h.

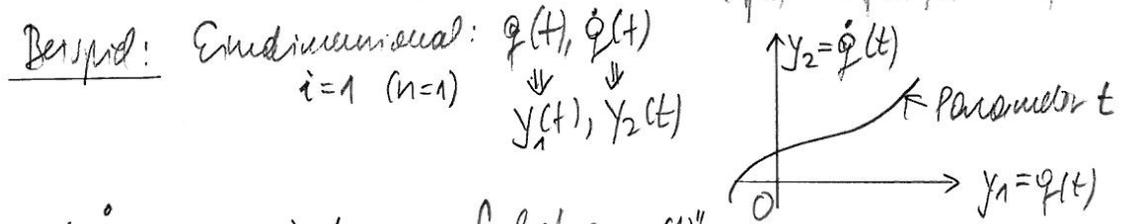
$$\dot{\underline{y}}^o = \underline{\phi}(\underline{y}^o, t, \underline{f}^o) := \underline{\phi}^o \quad (2)$$

Welche Gleichungen muß eine Störung  $y^s$  erfüllen, wenn die gestörte Bewegung  $\underline{y} = \underline{y}^o + \underline{y}^s$  zu den verallgemeinerten Kräften  $\underline{f} = \underline{f}^o + \underline{f}^s$  gehört und in der Umgebung der ungestörten Bewegung bleibt? (Störung der Bahnkurve durch "leicht" geänderte Kräfte oder Anfangsbedingungen)





Einbildung des Phasenraums  $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n, y_{n+1}, \dots, y_{2n}) = (q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) = (\vec{q}; \dot{\vec{q}})$



Mit  $\dot{y}_i = y_{n+i}, i=1, \dots, n$  folgt aus (1)''

( $\dot{q}_i = y_{n+i}$ ) für  $i = n+1, \dots, 2n \Rightarrow$  (mit  $y_{i-n} \Leftrightarrow q_i, i=1, \dots, n$ )  
 $\Rightarrow (1)''' : \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{\partial^2 W_k^*}{\partial y_i \partial y_j} \cdot \dot{y}_j = \frac{\partial W_k^*}{\partial y_{i-n}} - \sum_{j=n+1}^{2n} \frac{\partial^2 W_k^*}{\partial y_i \partial y_{j-n}} \cdot y_j - \frac{\partial^2 W_k^*}{\partial y_i \partial t} - \frac{\partial W_p}{\partial y_{i-n}} - f_{i-n} + f_{i-n}$

$\sum_{j=n+1}^{2n} a_{ij} \dot{y}_j = - \sum_{j=n+1}^{2n} c_{ij} y_j + b_{i-n} - d_i - e_{i-n} \quad i = n+1, \dots, 2n$   
 $n \times n$  Differentialgleichungssystem 1. Ordnung

Auflösung des Gleichungssystems, wenn die  $\text{Det} \{ a_{ij} \} = \text{Det} \left\{ \frac{\partial^2 W_k^*}{\partial y_i \partial y_j} \right\}_{i,j=n+1, \dots, 2n} \neq 0, \dot{\phantom{x}}$

(1)''':  $\dot{\vec{y}} = \underline{\underline{\Phi}}(\vec{y}, t, \vec{f})$  z.B.:  $\dot{y}(t) = A(t)y(t) + B(t)f(t)$

Differentialgleichung kann auch nicht linear sein, z.B.:  
 $\dot{y}(t) = A(t) \cdot y^2(t) + B(t)f(t)$



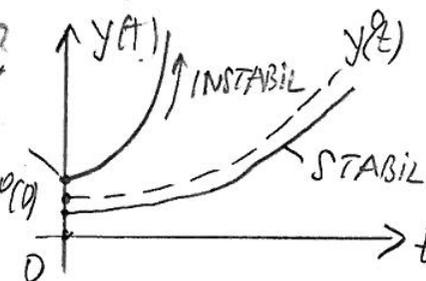


Allgemeine Frage der Stabilitätsuntersuchung:

Wenn  $\vec{y}^0(t)$  eine Lösung von (1)'' ist, ist dann bei leicht veränderten Anfangsbedingungen oder leicht veränderten Kräften  $\vec{f}(t) \approx \vec{f}^0(t)$  die neue Lösung  $\vec{y}(t)$  in der Nähe der alten Lösung  $\vec{y}^0(t)$ ?

z. B.:

Anfangsbeding.:  $y^0(0)$





Beispiel 7 aus 1.8:  $W_k^* = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{l_0}{x} \cdot \frac{i^2}{2}$   $W_p = kx^2$

$$q_1 = x \quad q_2 = Q \quad n=2 \quad (\dot{i} = \dot{Q})$$

Zwei Differentialgleichungen:  $m\ddot{x} + \frac{l_0}{x^2} \cdot \frac{i^2}{2} + 2kx = F(t) + mg$   
zweiter Ordnung

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{l_0}{x} \dot{i} \right) + R(i - I) = 0$$

oder:  $m\ddot{x} + \frac{l_0}{x^2} \cdot \frac{\dot{Q}^2}{2} + 2kx = F(t) + mg$ ,  $\frac{d}{dt} \left( \frac{l_0}{x} \dot{Q} \right) + R(\dot{Q} - I) = 0$   
↖ ↗ nichtlineare DGL! ↖ ↗

Dies entspricht 4 DGL. 1. Ordnung für  $\dot{Q}, \dot{x}$ !

Für die Untersuchung der lokalen Stabilität eines Arbeitspunktes  $Q_0, x_0$  werden im Bsp/7 diese nichtlinearen DGL linearisiert und gelöst!

Lösung  $\vec{q}^0(t) = \{q_i^0(t), i=1, \dots, n\}$  bzw.:  $\{q_1^0(t) = x(t), q_2^0(t) = Q(t), i=1, 2\}$

Verallgemeinerte Kräfte  $\vec{f}^0 = \{f_i^0(t), i=1, \dots, n\}$  bzw.:  $\{f_1^0(t) = F(t) + mg, f_2^0(t) = RI\}$



Die gestörte Lösung muß jedenfalls (1) erfüllen:

$$\dot{\underline{y}}^o + \dot{\underline{y}}^s = \underline{\phi}(\underline{y}^o + \underline{y}^s, t, \underline{f}^o + \underline{f}^s).$$

Entwicklung nach Potenzen der Störungen (falls möglich):

$$\dot{\underline{y}}_i^o + \dot{\underline{y}}_i^s = \underline{\phi}_i^o + \sum_j \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial y_j}\right)^o y_j^s + \sum_j \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial f_j}\right)^o f_j^s + \text{Terme nichtlin. in Störungen } (y_j^{s^2}, \dots)$$

Voraussetzung der "Kleinheit" der Störungen, mit (2):

$$\dot{\underline{y}}_i^s = \sum_j \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial y_j}\right)^o y_j^s + \sum_j \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial f_j}\right)^o f_j^s$$

↑ quadr. Terme, -- <<!

Lineares Differentialgleichungssystem für die Störbewegung, wobei jedoch die Koeffizienten i.a. explizit oder implizit (über die ungestörte Lösung) von der Zeit abhängen.

$\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial y_j}\right)^o$  heißt Ljapunov-Matrix.



Andere Möglichkeit: Die Lösung  $q^0(t) = \{q_i^0(t), i=1, \dots, n\}$  in den verallgemeinerten Koordinaten zu den Kräften  $f^0 = \{f_i^0\}$  sei bekannt. Eintragen des Ansatzes  $q = q^0 + q^s$  für die gestörte Bewegung zu den Kräften  $f = f^0 + f^s$  in die Lagrange-Gleichungen liefert nach Linearisierung das System

$$\sum_{j=1}^n T_{ij} \ddot{q}_j^s + \sum_{j=1}^n D_{ij} \dot{q}_j^s + \sum_{j=1}^n K_{ij} q_j^s = f_i^s, \quad i=1, \dots, n$$

oder, in Matrixschreibweise,

$$\underline{T} \ddot{\underline{q}}^s + \underline{D} \dot{\underline{q}}^s + \underline{K} \underline{q}^s = \underline{f}^s$$

wobei

$$T_{ij} = \left[ \frac{\partial^2 W_k^*}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right]^0$$

$$D_{ij} = \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial^2 W_k^*}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial^2 W_k^*}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} - \frac{\partial^2 W_k^*}{\partial q_i \partial \dot{q}_j} + \frac{\partial f_i^d}{\partial \dot{q}_j} \right]^0$$

$$K_{ij} = \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial^2 W_k^*}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial^2 (W_p - W_k^*)}{\partial q_i \partial q_j} + \frac{\partial f_i^d}{\partial q_j} \right]^0$$

*Herleitung unseitig*

... "Trägheitsmatrix"

... "Dämpfungsmatrix"

... "Steifigkeitsmatrix"

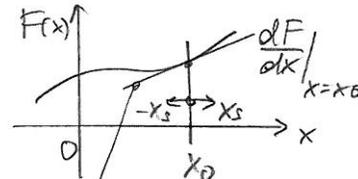


Prinzip der Linearisierung einer Funktion  $F(x)$  im Arbeitspunkt  $x=x_0$ :

Es werden nur kleine Abweichungen  $x_s$  von  $x_0$  betrachtet:  $F(x_0+x_s) \approx \left. \frac{dF}{dx} \right|_{x=x_0} \cdot x_s + F(x_0)$



allgemein:  $\vec{p} = \vec{p}_0 + \vec{p}_s, |\vec{p}_s|/|\vec{p}_0| \ll 1$



$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W_k^*(\vec{p}_0 + \vec{p}_s, \dot{\vec{p}}_0 + \dot{\vec{p}}_s, t)}{\partial \dot{p}_i} \right) - \frac{\partial W_k^*(\vec{p}_0 + \vec{p}_s, \dot{\vec{p}}_0 + \dot{\vec{p}}_s, t)}{\partial p_i} + \frac{\partial W_p(\vec{p}_0 + \vec{p}_s)}{\partial p_i} + f_i^d(\vec{p}_0 + \vec{p}_s, \dot{\vec{p}}_0 + \dot{\vec{p}}_s) = f_i^0 + f_i^s \leftarrow \text{Störkraft } i=1, \dots, n$$

$$F(x_0) + \frac{dF}{dx} \cdot x_s, \frac{x_s}{x_0} \ll 1$$

$\frac{dF}{dx} x_s \Leftrightarrow$  bei mehr Variablen:  $\frac{\partial W}{\partial p_1} \cdot \dot{p}_1^s + \frac{\partial W}{\partial p_2} \cdot \dot{p}_2^s + \dots + \frac{\partial W}{\partial p_n} \cdot \dot{p}_n^s = \sum_{j=1}^n \frac{\partial W}{\partial p_j} \cdot \dot{p}_j^s \quad j=1, \dots, n$

$$\sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial^2 W_k^*(\vec{p}_0, \dot{\vec{p}}_0, t)}{\partial \dot{p}_i \partial \dot{p}_j} \right) \cdot \dot{p}_j^s + \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W_k^*(\vec{p}_0, \dot{\vec{p}}_0, t)}{\partial \dot{p}_i \partial p_j} \right) \cdot \dot{p}_j^s - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 W_k^*(\vec{p}_0, \dot{\vec{p}}_0, t)}{\partial p_i \partial p_j} \cdot \dot{p}_j^s - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 W_k^*(\vec{p}_0, \dot{\vec{p}}_0, t)}{\partial p_i \partial \dot{p}_j} \cdot \dot{p}_j^s + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 W_p(\vec{p}_0)}{\partial p_i \partial p_j} \cdot p_j^s + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i^d(\vec{p}_0, \dot{\vec{p}}_0)}{\partial p_j} \cdot p_j^s + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i^d(\vec{p}_0, \dot{\vec{p}}_0)}{\partial \dot{p}_j} \cdot \dot{p}_j^s + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W_k^*(\vec{p}_0, \dot{\vec{p}}_0, t)}{\partial p_i} \right) - \frac{\partial W_k^*(\vec{p}_0, \dot{\vec{p}}_0, t)}{\partial p_i} + \frac{\partial W_p(\vec{p}_0)}{\partial p_i} + f_i^d(\vec{p}_0, \dot{\vec{p}}_0) = f_i^0 + f_i^s \quad \text{Arbeitspunkt bleibt sich!}$$

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial^2 W_k^*(\vec{p}_0, \dot{\vec{p}}_0, t)}{\partial \dot{p}_i \partial \dot{p}_j} \right) \cdot \dot{p}_j^s + \frac{\partial W_k^*(\vec{p}_0, \dot{\vec{p}}_0, t)}{\partial \dot{p}_i \partial p_j} \cdot \dot{p}_j^s \right\} + \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{p}_i \partial p_j} \right) \cdot \dot{p}_j^s + \frac{\partial W_k^*}{\partial p_i \partial \dot{p}_j} \cdot \dot{p}_j^s \right\} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 W_k^*}{\partial p_i \partial p_j} \cdot p_j^s - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 W_k^*}{\partial p_i \partial \dot{p}_j} \cdot \dot{p}_j^s + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 W_p}{\partial p_i \partial p_j} \cdot p_j^s + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i^d}{\partial p_j} \cdot p_j^s + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i^d}{\partial \dot{p}_j} \cdot \dot{p}_j^s = f_i^s \quad \text{--- Störungs-gleichung (linear!)}$$

in  $q_j^s$  und  $\dot{q}_j^s, \ddot{q}_j^s$ : DGL. 2. Ordnung

$$\sum_{j=1}^n T_{ij} \cdot \ddot{q}_j^s + \sum_{j=1}^n D_{ij} \cdot \dot{q}_j^s + \sum_{j=1}^n K_{ij} \cdot q_j^s = f_i^s \quad j=1, \dots, n$$



Die Koeffizienten sind i.a. nicht konstant, sie hängen sowohl über die ungestörte Bewegung als auch ev. explizit von der Zeit ab:  
System von  $n$  linearen, gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit i.a. nicht konstanten Koeffizienten. Die "Trägheitsmatrix" ist jedenfalls symmetrisch.

$$\rightarrow \text{da } \frac{\partial^2 W_c^*}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} = \frac{\partial^2 W_c^*}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i} \quad \text{JACOBI-Bed.}$$



Wesentlich ist: Die linearisierten Gleichungen für die Störbewegung lassen sich immer auf diese Form bringen.

Es ist meist einfacher, die Koeffizienten nicht aus den allgemeinen Ausdrücken zu berechnen, sondern das nichtlineare Gleichungssystem explizit aufzustellen und in bezug auf die Störungen zu linearisieren. Häufig wird man auch anstelle der Ladungskoodinaten die zugehörigen Ströme einführen. Das resultierende Gleichungssystem nimmt in jedem Fall obige Form an, wobei aber u.U. die Störungen nicht mehr den ursprünglichen verallgemeinerten Koordinaten zugeordnet sind.

$$I(t)\ddot{x}^s + D(t)\dot{x}^s + K(t)x^s = f^s(t)$$

Der Gültigkeitsbereich der linearisierten Gleichungen ist i.a. schwer abschätzbar. Manchmal sind Systeme wesentlich nichtlinear, d.h., daß nach einer Linearisierung die Gleichungen derart degeneriert sind, daß sie keine physikalisch sinnvolle Lösung mehr zulassen.





### 1.12.2. Systeme mit konstanten Koeffizienten

$$T \ddot{x}^s + D \dot{x}^s + K x^s = f^s(t)$$

$T, D, K$  hängen nicht von  $t$  ab

Für ihre allgemeine Behandlung steht eine Reihe von Methoden zur Verfügung: direkte Ansätze, Fouri~~x~~er- oder Laplace-Transformation usw. Stabilitätsuntersuchungen erfolgen meist über die Wurzelstruktur der charakteristischen Gleichung. Wir unterscheiden: statische-, dynamische Instabilität.

Vedeutlichung am Beispiel einer <sup>n</sup>eizigen, homogenen Gleichung

$$T \ddot{x}^s + D \dot{x}^s + K x^s = 0, \quad T > 0$$

(angreifende Kraft nicht gestört).  $x^s \equiv 0$  ist eine "Gleichgewichtslage". Wir erteilen dem System eine Anfangsstörung und untersuchen die resultierende Störbewegung. Es sind bekanntlich folgende Fälle zu unterscheiden.

$$T \lambda^2 + D \lambda + K = 0$$



$T\ddot{x}(t) + D\dot{x}(t) + K \cdot x(t) = 0$  homogene lin. DGL. 2. Ordnung mit konst. Koeff!.

Anfangsbedingungen:  $x_0 = x(0)$ ,  $\dot{x}_0 = \dot{x}(0)$  Ansatz:  $x(t) = A \cdot e^{\lambda_1 t} + B \cdot e^{\lambda_2 t}$

$$T\lambda^2 + D\lambda + K = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{D}{2T} \pm \sqrt{\left(\frac{D}{2T}\right)^2 - \frac{K}{T}} = -\frac{D}{2T} \pm \frac{1}{2T} \sqrt{D^2 - 4KT} = -\beta \pm \alpha = \begin{cases} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{cases}$$

$\beta = \frac{D}{2T}$   $\alpha = \frac{1}{2T} \sqrt{D^2 - 4KT}$ , ohne Beschränkung der Allgemeinheit:  $T > 0$  gewählt

$$x_0 = A + B, \dot{x}_0 = \lambda_1 A + \lambda_2 B \Rightarrow A = \frac{\dot{x}_0 - x_0 \lambda_2}{2\alpha}, B = \frac{x_0 \lambda_1 - \dot{x}_0}{2\alpha}, 2\alpha = \lambda_1 - \lambda_2$$

$$x(t) = \frac{1}{2\alpha} \cdot [(\dot{x}_0 - x_0 \lambda_2) e^{(\beta + \alpha)t} + (x_0 \lambda_1 - \dot{x}_0) e^{-(\beta + \alpha)t}] = \frac{e^{-\beta t}}{2\alpha} \cdot \left[ \dot{x}_0 (e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}) - x_0 (\lambda_2 e^{\alpha t} - \lambda_1 e^{-\alpha t}) \right]$$

$\begin{matrix} -\beta + \alpha & -\beta - \alpha \end{matrix}$

$$x(t) = e^{-\beta t} \left[ \frac{1}{2} (\dot{x}_0 + x_0 \beta) \cdot \frac{\sinh \alpha t}{\alpha} + x_0 \cosh \alpha t \right]$$

$K > 0$ : Wenn  $D^2 \geq 4KT$ :  $\alpha$  reell: keine Schwingungen; bei  $K < 0$ :  $D^2 - 4KT$  stets  $> 0$ : keine Schwingungen

$K > 0$ : Wenn  $D^2 < 4KT$ :  $\alpha$  imaginär:  $\alpha = j\omega$ ,  $\omega = \sqrt{\frac{K}{T} - \left(\frac{D^2}{4T^2}\right)} > 0$ : SCHWINGUNGEN mit  $f = \frac{\omega}{2\pi}$

$$x(t) = e^{-\beta t} \cdot \left[ \frac{1}{j\omega} \sinh j\omega t \cdot (\dot{x}_0 + x_0 \beta) + x_0 \cosh j\omega t \right]$$

$\frac{\sinh \omega t}{\omega}$

$$\cosh j\omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} = \cos \omega t$$

$$\frac{\sinh j\omega t}{j\omega} = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j\omega} = \frac{\sin \omega t}{\omega}$$

$$x(t) = e^{-\beta t} \cdot \left[ \frac{1}{\omega} \sin \omega t \cdot (\dot{x}_0 + x_0 \beta) + x_0 \cos \omega t \right]$$





1)  $D^2 > 4TK$  : nicht-oszillierende Bewegungen

$$x^s(t) = e^{-\beta t} \left\{ \frac{1}{\alpha} [\dot{x}^s(0) + \beta x^s(0)] \operatorname{sh} \alpha t + x^s(0) \operatorname{ch} \alpha t \right\}$$

mit  $\beta = \frac{D}{2T}$  ,  $\alpha = \frac{1}{2T} \sqrt{D^2 - 4TK} > 0$  .

Die Bewegung ist abklingend für  $\beta > \alpha$  und aufklingend für  $\beta < \alpha$  , d.h. sie ist abklingend im Fall

$D > \sqrt{D^2 - 4TK}$  , d.i.  $K > 0$  und  $D > 2\sqrt{TK}$  ←  $D^2 > 4TK, D > 2\sqrt{TK}$

und aufklingend in den Fällen

$D < 0$  , wobei die Bewegung für  $D^2 > 4TK$  nicht oszillierend ist, insbesondere für  $K < 0$  oder

$D > 0$  aber  $D < \sqrt{D^2 - 4TK}$  , d.i.  $K < 0$  .

Wir haben also:

1a)  $K < 0$  ,  $D$  beliebig ( $\alpha > |\beta| > 0$ ) : aufklingend

1b)  $K > 0$  ,  $D < 2\sqrt{TK}$  ( $-\beta > \alpha > 0$ ) : aufklingend : negative Dämpfung

1c)  $K > 0$  ,  $D > 2\sqrt{TK}$  ( $\beta > \alpha > 0$ ) : abklingend





— 2)  $D^2 < 4TK$ : oszillierende Bewegungen

$$x^s(t) = e^{-\beta t} \left\{ \frac{1}{\omega} [\dot{x}^s(0) + \beta x^s(0)] \sin \omega t + x^s(0) \cos \omega t \right\}$$

mit  $\beta = \frac{D}{2T}$ ,  $\omega = \frac{1}{2T} \sqrt{4TK - D^2} > 0$  (vgl. :1):  $j\omega = \alpha$ )

Nur möglich für  $K > 0$ .

2a)  $K > 0$ ,  $-2\sqrt{TK} < D < 0$  ( $\beta < 0$ ): aufklingend  $D < 0$

2b)  $K > 0$ ,  $2\sqrt{TK} > D > 0$  ( $\beta > 0$ ): abklingend  $D > 0$

$\beta > \alpha > 0$ : stabil,  $\beta < \alpha, \alpha > 0$ : instabil  $\Rightarrow D < \sqrt{D^2 - 4TK}$ , also  $D < 0, K \geq 0$   
 $D > 0, K < 0$   
 $\hookrightarrow D > \sqrt{D^2 - 4TK}$ , daher muss  $K > 0$  sein

Zusammenfassung: 1)  $K < 0, D \geq 0$ : instabil (aufklingend),  $\alpha > 0 \neq$  keine Schwingungen

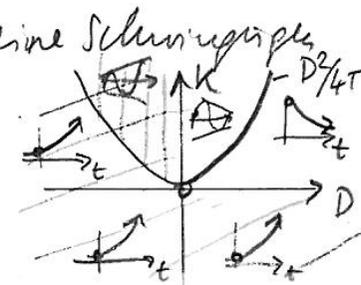
2)  $K > 0, D < -2\sqrt{TK} < 0 \Rightarrow$ : instabil, keine Schwingungen

$K > 0, D > 2\sqrt{TK} > 0 \Rightarrow$  stabil (abklingend), keine Schwingungen

3)  $K > 0, -2\sqrt{TK} < D < 0$ : instabil, Schwingungen

$K > 0, 0 > D > -2\sqrt{TK}$ : stabil, Schwingungen

Grenzfälle:  $D = 2\sqrt{TK} \Rightarrow \frac{D^2}{4T} = K$ : quadratische Parabel



# Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten (1)

Literatur: Dirschmid, H.-J. : Mathematik für Elektrotechniker, Vieweg Verlag



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Lineare Differentialgleichung, gewöhnlich, mit konstanten Koeffizienten:

$$L\{y(t)\} = a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t)$$

Koeffizienten  $a_i, i=0, \dots, n$ : konstant

Variable: wir erweitem: „gewöhnlich“

linear: ist  $y_1(t), y_2(t)$  Lösung, dann auch  $Ay_1(t) + By_2(t)$

Es gibt  $n$  linear unabhängige Lösungen  $y_i(t), i=1, \dots, n$

Daher ist für jedes  $t$  die Wronski-Determinante  $W \neq 0$ .

$$W = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \dots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{für} \\ t \in ]t_0, t_n[$$

Es sind  $n$  Anfangsbedingungen  $y(0), y'(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$  nötig, um die Lösung  $\sum_{i=1}^n k_i y_i(t)$ , nämlich die  $k_i$  zu bestimmen.

Es ist  $y_i(t) = e^{\lambda_i t}$  Lösung der homogenen DGL  $L\{y_i(t)\} = 0 = e^{\lambda_i t} \cdot p(\lambda)$



# Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten (2)

Literatur: Dirschmid, H.-J. : Mathematik für Elektrotechniker, Vieweg Verlag



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Charakteristisches Polynom:  $p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$

1) Wenn alle Nullstellen  $\lambda_i$  von  $p(\lambda) = 0$  reell und verschieden sind:  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_n$ ,  
dann sind die  $n$  linear unabhängigen Lösungen  $y_1 = e^{\lambda_1 t}$ ,  $y_2 = e^{\lambda_2 t}$ , ...,  $y_n = e^{\lambda_n t}$

2) Wenn  $k$  Nullstellen komplex sind:  $\lambda_l = \alpha \pm j\beta$ ,  $l=1, \dots, k$ , dann sind  
wegen  $e^{\alpha \pm j\beta t} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) \pm j \sin(\beta t))$  die  $n$  linear unabhängigen Lösungen:  
 $y_1(t) = e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ ,  $y_2(t) = e^{\alpha t} \sin(\beta t)$ ,  $y_3 = e^{\alpha_2 t} \cos(\beta_2 t)$ ,  $y_4 = e^{\alpha_2 t} \sin(\beta_2 t)$ , ...  
...  $y_{k-1} = e^{\alpha_{\frac{k}{2}} t} \cos(\beta_{\frac{k}{2}} t)$ ;  $y_k = e^{\alpha_{\frac{k}{2}} t} \sin(\beta_{\frac{k}{2}} t)$ ,  $y_{k+1} = e^{\lambda_{k+1} t}$ , ...  $y_n = e^{\lambda_n t}$

3) Wenn eine Nullstelle z.B.  $\lambda_0$   $k$ -fach reell auftritt, also  $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k \cdot \underbrace{p(\lambda)}_{\text{Polynom (n-k)-ter Ordnung}}$ ,  
dann sind  $y_1 = e^{\lambda_0 t}$ ,  $y_2 = t \cdot e^{\lambda_0 t}$ ,  $y_3 = t^2 e^{\lambda_0 t}$ , ...,  $y_k = t^{k-1} \cdot e^{\lambda_0 t}$ ,  
 $y_{k+1} = e^{\lambda_{k+1} t}$ , ...,  $y_n = e^{\lambda_n t}$   
 $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$ : Wurzeln reell von  $p(\lambda)$

4) Wenn eine Nullstelle z.B.  $\lambda_0$   $\frac{k}{2}$ -fach komplex (also wegen  $a_i$  reell auch  $\bar{\lambda}_0$ ) ist:  
dann sind:  $y_1 = e^{\alpha_0 t} \cos(\beta_0 t)$ ,  $y_2 = e^{\alpha_0 t} \sin(\beta_0 t)$ ,  $y_3 = t e^{\alpha_0 t} \cos(\beta_0 t)$ ,  $y_4 = t e^{\alpha_0 t} \sin(\beta_0 t)$ , ...  
( $\lambda_0 = \alpha_0 + j\beta_0$ )  $y_{k-1} = t^{\frac{k}{2}-1} \cdot e^{\alpha_0 t} \cos(\beta_0 t)$ ,  $y_k = t^{\frac{k}{2}-1} \cdot e^{\alpha_0 t} \sin(\beta_0 t)$ ,  $y_{k+1} = e^{\lambda_{k+1} t}$ , ...,  $y_n = e^{\lambda_n t}$





Beispiel: a)  $T y'' + D y' + K y = 0$ :  $y_1 = e^{\lambda_1 t}$ ,  $y_2 = e^{\lambda_2 t}$ ;  $p(\lambda) = T \lambda^2 + D \lambda + K = 0 \Rightarrow$   
 b) Sei  $\left(\frac{D}{2T}\right)^2 - \frac{K}{T} = 0$ , dann ist  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ : doppelte Nullstelle,  $\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{D}{2T} \pm \sqrt{\left(\frac{D}{2T}\right)^2 - \frac{K}{T}}$   
 $\Rightarrow y_1 = e^{\lambda t}$ ,  $y_2 = t \cdot e^{\lambda t}$ ,  $\lambda = -\frac{D}{2T}$

Aufangsbedingungen:  $y(0) = y_0$ ,  $y'(0) = y_0'$

a)  $y = a y_1 + b y_2 = a e^{\lambda_1 t} + b e^{\lambda_2 t}$   $y_0 = a \cdot e^0 + b e^0 = a + b$   
 $y_0' = \lambda_1 a e^0 + b \cdot \lambda_2 e^0 = \lambda_1 a + \lambda_2 b$   
 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \end{pmatrix}$ :  $a = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & 1 \\ y_0' & \lambda_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix}} = \frac{y_0 \lambda_2 - y_0'}{\lambda_2 - \lambda_1}$   
 $b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & y_0 \\ \lambda_1 & y_0' \end{vmatrix}}{\det(\mu)} = \frac{y_0' - \lambda_1 y_0}{\lambda_2 - \lambda_1}$

b)  $y = a e^{\lambda t} + b t e^{\lambda t}$ ,  $y_0 = a e^0 + b \cdot 0 \cdot e^0 = a$   
 $y_0' = (\lambda a e^{\lambda t} + b(1 e^{\lambda t} + t \cdot \lambda e^{\lambda t})) \Big|_0 = (\lambda a + b) = \lambda y_0 + b$   
 $b = y_0' - \lambda y_0$

$y = e^{\lambda t} (y_0 + (y_0' - \lambda y_0) t)$

$y' = \lambda e^{\lambda t} (y_0 + (y_0' - \lambda y_0) t) + e^{\lambda t} (y_0' - \lambda y_0) \Rightarrow y'(0) = \lambda y_0 + y_0' - \lambda y_0 = y_0'$

c) Sei  $\lambda$  komplex:  $\lambda_{1,2} = -\frac{D}{2T} \pm j \sqrt{\frac{K}{T} - \left(\frac{D}{2T}\right)^2} = \alpha \pm j \beta$ ,  $e^{\alpha \pm j \beta t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t \pm j \sin \beta t)$   
 $(K > D^2/4T)$

$y = a y_1 + b y_2 = a e^{\alpha t} \cos \beta t + b e^{\alpha t} \sin \beta t$

$y' = a (\alpha e^{\alpha t} \cos \beta t - e^{\alpha t} \beta \sin \beta t) + b (\alpha e^{\alpha t} \sin \beta t + e^{\alpha t} \cos \beta t \beta)$

$y_0 = a$ ,  $y_0' = a(\alpha) + b(\beta) = \alpha y_0 + \beta b \Rightarrow b = (y_0' - \alpha y_0) / \beta$



Ergebnis des Beispiels (Zusammenfassung):

$$a) y = \frac{(\gamma_0 \cdot \lambda_2 - \gamma_0') e^{\lambda_1 t} + (\gamma_0' - \lambda_1 \gamma_0) e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

aperiodisch

$$b) y = e^{\lambda t} \cdot (\gamma_0 + (\gamma_0' - \lambda \gamma_0) t)$$

aperiodischer Grenzfall

$$c) y = e^{\alpha t} (\gamma_0 \cdot \cos \beta t + [(\gamma_0' - \alpha \gamma_0) / \beta] \cdot \sin \beta t)$$

Schwingend  
(nur im n gedämpften Fall: periodisch!)

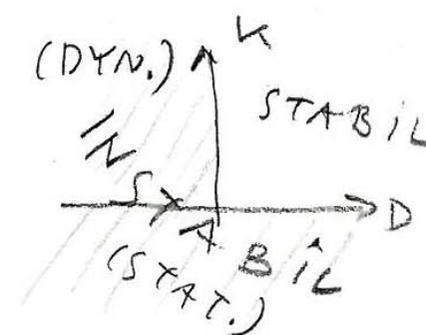
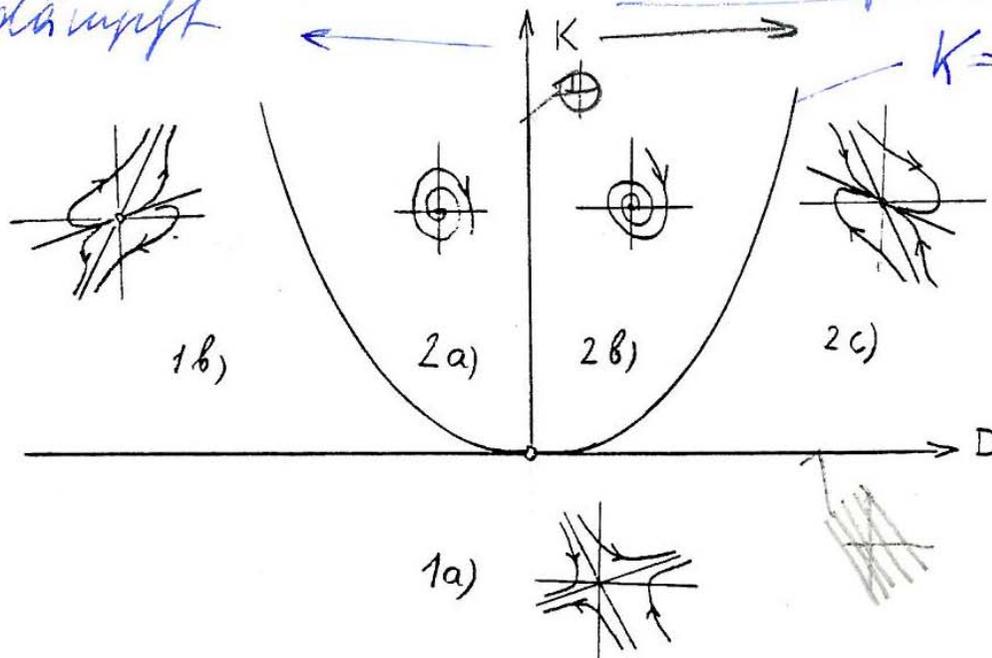
# Stabilitätskarte $K(D)$ für $T > 0$

Zusammenfassung im Diagramm

entdämpft

$D > 0$ : gedämpft

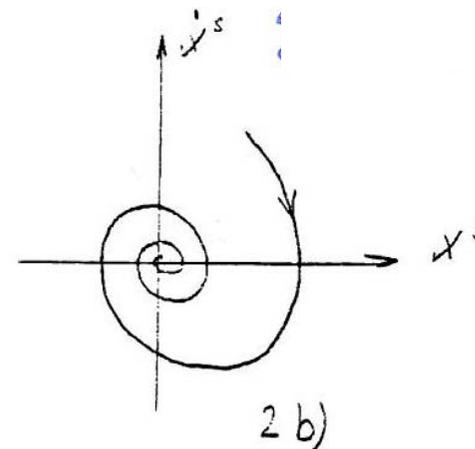
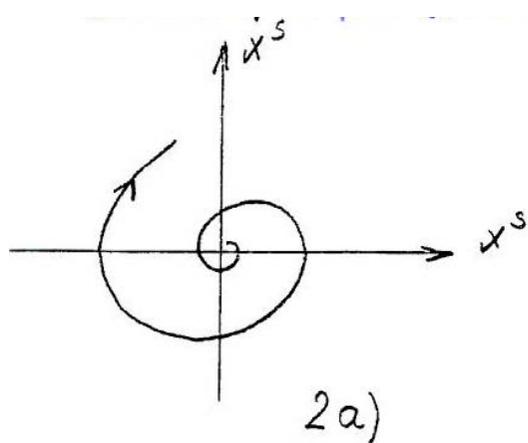
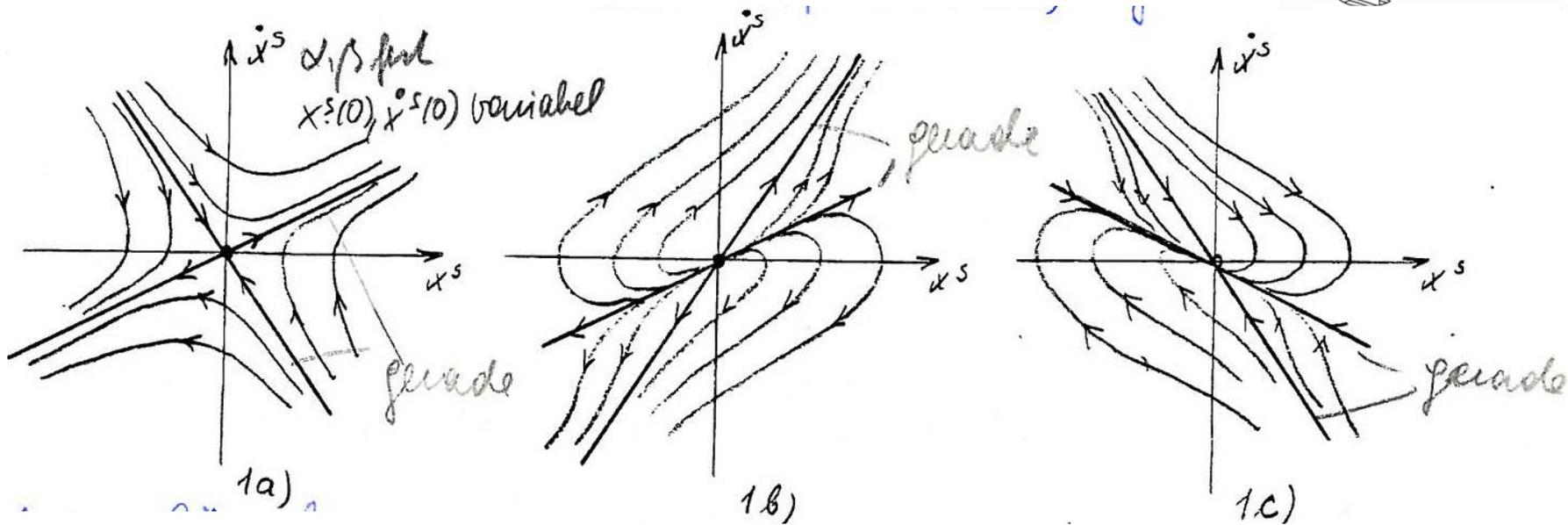
$K = \frac{D^2}{4T^2}$  (quadr. Parabel)



Skizzieren Sie die Phasenkurven für Punkte auf den Grenzlinien!



# Phasendiagramme ( $\dot{x}/dt = f(x(t))$ ) der Lösungen (1)



# Phasendiagramme ( $\dot{x}/dt = f(x(t))$ ) der Lösungen (2)

Grenzkurven:  $x(t) = e^{-\beta t} \left[ \frac{1}{a} (\dot{x}_0 + \beta x_0) e^{at} + \frac{x_0}{b} e^{-at} \right]$  : unabhängig vom Vorzeichen von  $\alpha$  (\*)  
 $x(t)$  prop. zu  $x(t)$ :

$$\dot{x}(t) = e^{-\beta t} (a e^{at} + b e^{-at}) (-\beta) + e^{-\beta t} [\alpha] [a e^{at} + b e^{-at}]$$

$$= e^{-\beta t} [ \underbrace{a e^{at}}_{x(t)} (-\beta a + \alpha b) + \underbrace{e^{-at}}_{x(t)} (-\beta b + \alpha a) ] = k \cdot x(t)$$

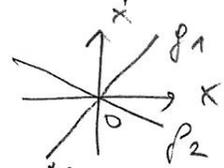
$$k = \frac{-\beta a + \alpha b}{a} = \frac{-\beta b + \alpha a}{b} \Rightarrow -\beta + \alpha \frac{b}{a} = -\beta + \alpha \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{a}{b} \Rightarrow a = b$$

$$a = b : \frac{1}{a} (\dot{x}_0 + \beta x_0) = x_0 \Rightarrow \dot{x}_0 = (\alpha - \beta) x_0 \Rightarrow$$

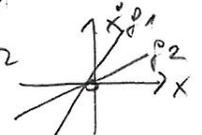
$\Rightarrow \dot{x}(t) = (\alpha - \beta) x(t)$  Grenzkurven sind parallel durch  $(x, \dot{x}) = (0, 0)$   
 \*)  $\Rightarrow \pm \alpha - \beta$  für Gleichlösung

$\alpha - \beta$ : Fallunterscheidung:

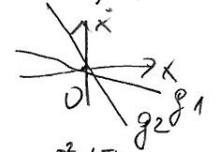
1) a):  $k < 0, D$  beliebig:  $\alpha > |\beta| > 0$ :  $\alpha - \beta > 0$ :  $f_1$   
 $-\alpha - \beta < 0$ :  $f_2$



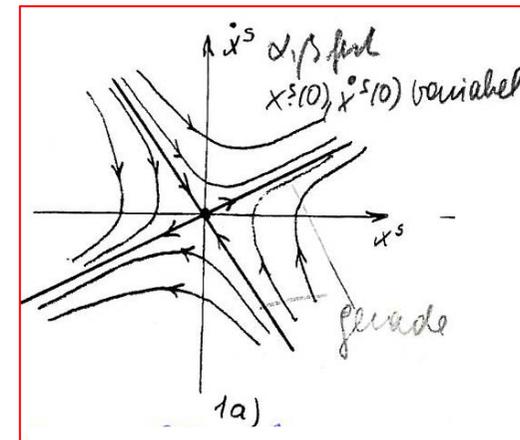
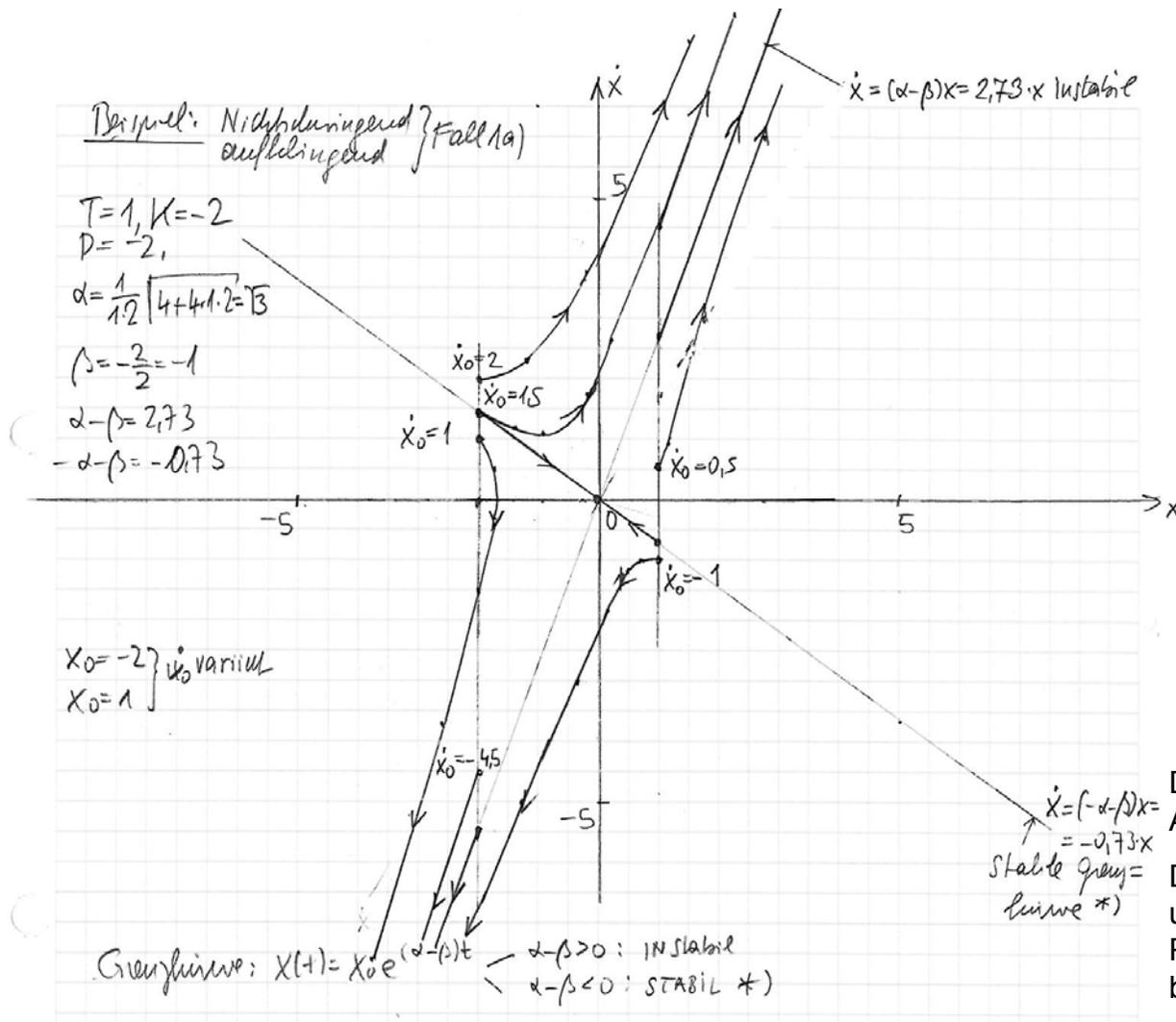
2) b):  $k > 0, D < -2\sqrt{|k|}$ :  $-\beta > \alpha > 0$ :  $\alpha - \beta > 0$ :  $f_1$   
 $-\alpha - \beta > 0$ :  $f_2$



3) c):  $k > 0, D > 2\sqrt{|k|}$ :  $\beta > \alpha > 0$ :  $\alpha - \beta < 0$ :  $f_1$   
 $-\alpha - \beta < 0$ :  $f_2$



## Phasendiagramme ( $dx/dt = f(x(t))$ ) der Lösungen (Fall 1a))



Diese stabile Lösung tritt nur auf bei der Anfangsbedingung:  $\dot{x}_0 = (-\alpha - \beta)x_0$

Dann wird der instabile Teil der Lösung  $e^{(\alpha - \beta)t}$  unterdrückt, und es verbleibt nur  $e^{(-\alpha - \beta)t}$ ! In der Praxis lässt sich so eine „singuläre“ Anfangsbedingung nicht wirklich realisieren!



# Phasendiagramme ( $dx/dt = f(x(t))$ ) der Lösungen (Fall 1b))

Beispiel: Nichtschwingend  
aufklingend } Fall 1b)

$T=1$

$D=-4$

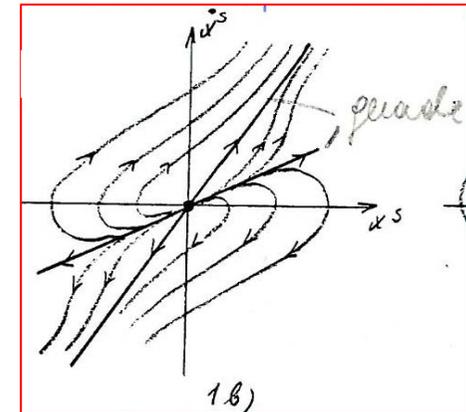
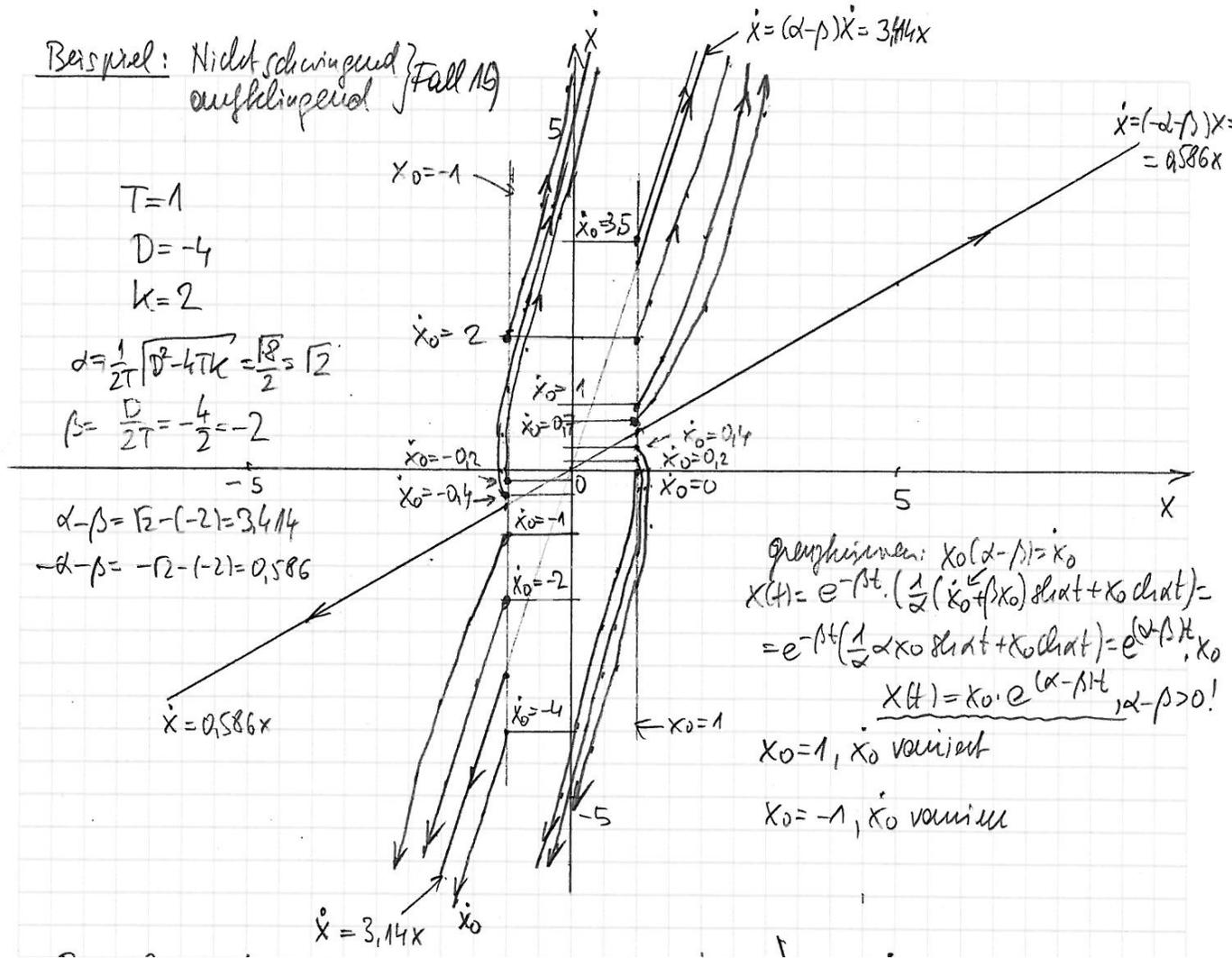
$k=2$

$\alpha = \frac{1}{2T} \sqrt{D^2 - 4Tk} = \frac{\sqrt{16}}{2} = 2$

$\beta = \frac{D}{2T} = -\frac{4}{2} = -2$

$\alpha - \beta = 2 - (-2) = 3,414$

$-\alpha - \beta = -2 - (-2) = 0,586$



grenzfällen:  $x_0(\alpha - \beta) = \dot{x}_0$   
 $x(t) = e^{-\beta t} \cdot \left( \frac{1}{2} (\dot{x}_0 + \beta x_0) e^{\alpha t} + x_0 \right) =$   
 $= e^{-\beta t} \left( \frac{1}{2} \alpha x_0 e^{\alpha t} + x_0 \right) = e^{(\alpha - \beta)t} \cdot x_0$   
 $x(t) = x_0 \cdot e^{(\alpha - \beta)t}, \alpha - \beta > 0!$

$x_0 = 1, \dot{x}_0$  variiert

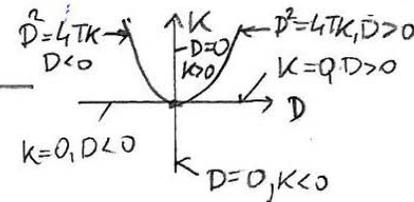
$x_0 = -1, \dot{x}_0$  variiert





# Phasendiagramme ( $dx/dt = f(x(t))$ ) der Lösungen an den K(D)-Grenzen (1)

Phasendiagramme an den Bereichsgrenzen:



1)  $K=0, D \geq 0: \alpha = \frac{D}{2T} = \beta$

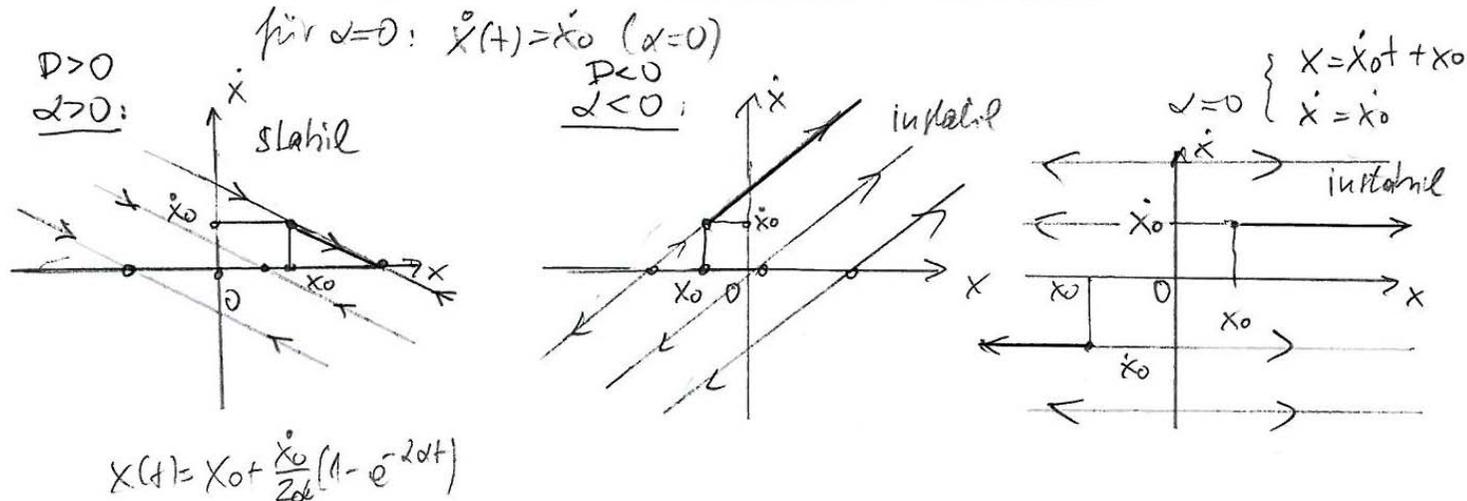
$$X(t) = e^{-\alpha t} \left[ \frac{1}{2}(\dot{x}_0 + \alpha x_0) \cdot e^{\alpha t} + x_0 \cdot e^{-\alpha t} \right] = \frac{1}{\alpha} \cdot [\dot{x}_0 + \alpha x_0] \cdot \frac{e^0 - e^{-2\alpha t}}{2} + x_0 \cdot \frac{e^0 + e^{-2\alpha t}}{2} = \frac{\dot{x}_0}{2\alpha} + x_0 - \frac{\dot{x}_0}{2\alpha} e^{-2\alpha t}$$

stabil für  $D > 0, \alpha > 0$   
instabil für  $D < 0, \alpha < 0$

$\alpha = 0$ : für  $D=0, K=0: X(t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[ x_0 + \dot{x}_0 \frac{(1 - e^{-2\alpha t})}{2\alpha} \right] = x_0 + \dot{x}_0 \frac{2t}{2} = x_0 + \dot{x}_0 t$ : instabil

$T\ddot{x} + D\dot{x} + Kx = 0 \Rightarrow T\ddot{x} = 0 \Rightarrow \ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = \text{const} = c_1, x = c_1 t + c_2 = \dot{x}_0 t + x_0$  ( $\alpha = 0$ )

$\dot{x} = \dot{x}_0 e^{-2\alpha t} \Rightarrow x(t) = \frac{\dot{x}_0}{2\alpha} + x_0 - \frac{1}{2\alpha} \dot{x}(t) \Rightarrow \dot{x}(t) = \dot{x}_0 + 2\alpha(x_0 - x(t))$  ( $\alpha \geq 0$ )



# Phasendiagramme ( $dx/dt = f(x(t))$ ) der Lösungen an den K(D)-Grenzen (2)

b)  $D > 0, K < 0: \beta = 0, \alpha = \frac{1}{2T} \sqrt{-4TK} > 0$

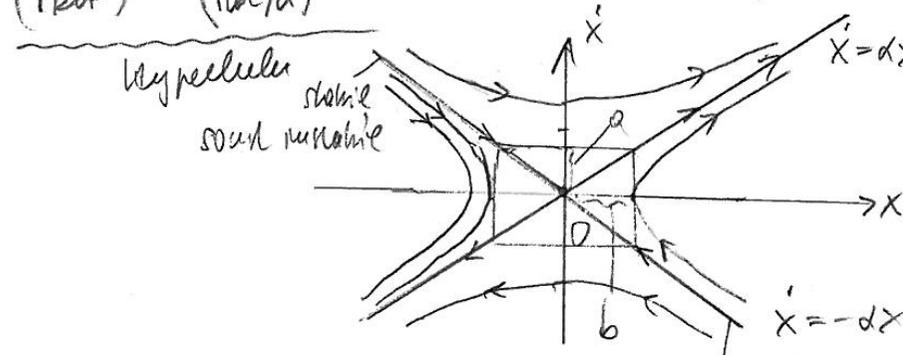
$$x(t) = \left\{ \frac{1}{\alpha} [\dot{x}_0] \sin \alpha t + x_0 \cos \alpha t \right\} \quad \dot{x}(t) = \dot{x}_0 \sin \alpha t + \alpha x_0 \cos \alpha t$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_0 & \alpha x_0 \\ \alpha x_0 & \dot{x}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \alpha t \\ \cos \alpha t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} \quad \sin \alpha t = \alpha \frac{x \dot{x}_0 - x_0 \dot{x}}{\dot{x}_0^2 - \alpha^2 x_0^2}, \quad \det = (\dot{x}_0^2 - \alpha^2 x_0^2) = \det(M)$$

$$\cos \alpha t = \frac{\dot{x} \dot{x}_0 - \alpha^2 x x_0}{\dot{x}_0^2 - \alpha^2 x_0^2}$$

$$(M) \quad \cos^2 \alpha t - \sin^2 \alpha t = 1 \Rightarrow \frac{(\dot{x} \dot{x}_0 - \alpha^2 x x_0)^2}{\det^2} - \frac{(x \dot{x}_0 - x_0 \dot{x})^2}{\det^2} = 1$$

$$\left( \frac{\dot{x}}{\frac{\det}{\alpha}} \right)^2 - \left( \frac{x}{\frac{\det}{\alpha}} \right)^2 = 1 \quad \Leftarrow \frac{\dot{x}^2 (\dot{x}_0^2 - \alpha^2 x_0^2)}{\det^2} + x^2 \frac{(\alpha^4 x_0^2 - \alpha^2 \dot{x}_0^2)}{-\alpha^2 \det^2} = 1$$



Grenzlinien ( $\beta=0$ ):  
 $\dot{x} = \pm \alpha \cdot x$   
 (Asymptoten der Hyperbeln)

$$\left( \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}_0^2 - \alpha^2 x_0^2}} \right)^2 - \left( \frac{x}{\frac{[\dot{x}_0^2 - \alpha^2 x_0^2]}{\alpha}} \right)^2 = 1$$

$$\left( \frac{\dot{x}}{a} \right) - \left( \frac{x}{b} \right)^2 = 1$$

- $K < T: \alpha > 1$ : y-Halbachse  $>$  x-Halbachse: steile Asymptoten
- $K > T: \alpha < 1$ : y-Halbachse  $<$  x-Halbachse: flache Asymptoten
- $K = T: \alpha = 1$ : y-Halbachse = x-Halbachse: 45°-Asymptoten



# Phasendiagramme ( $\dot{x}/dt = f(x(t))$ ) der Lösungen an den K(D)-Grenzen (3)

c)  $D=0, k>0: \rho=0, \lambda=j\omega = j \frac{1}{2T} \sqrt{4T^2 k} = j \sqrt{\frac{k}{T}}$

$$x(t) = \left[ \frac{1}{\omega} (\dot{x}_0 + 0) \sin \omega t + x_0 \cos \omega t \right] \Rightarrow$$

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_0 \cos \omega t - x_0 \omega \sin \omega t$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t + x_0 \cos \omega t = A \cos(\omega t - B)$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = \dot{x}_0 \cos \omega t - x_0 \omega \sin \omega t = C \cos(\omega t + D)$$

$$A \cos(\omega t - B) = A \cos \omega t \cos B + A \sin \omega t \sin B \Rightarrow A \cos B = x_0, A \sin B = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \Rightarrow A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2}$$

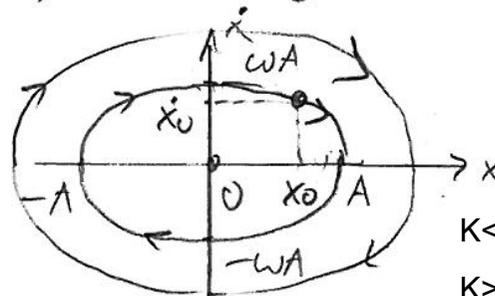
$$C \cos(\omega t + D) = C \cos \omega t \cos D - C \sin \omega t \sin D \Rightarrow C \cos D = \dot{x}_0, C \sin D = \omega x_0 \Rightarrow C = \omega \cdot A$$

$$\tan B = \frac{\dot{x}_0}{\omega x_0}, \tan D = \frac{\omega x_0}{\dot{x}_0} = \frac{1}{\tan B}, \arctan(\varphi) + \arctan\left(\frac{1}{\varphi}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \underbrace{\arctan\left(\frac{1}{\omega B}\right)}_B + \underbrace{\arctan\left(\frac{\omega}{D}\right)}_D = \frac{\pi}{2} = B + D$$

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t - B) = A \cos$$

$$\dot{x}(t) = \omega A \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - B\right) = \omega A \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - B\right) = -\omega A \sin \omega t$$

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= A \cdot \cos(\omega t - B) = A \cos \\ \dot{x}(t) &= \omega A \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - B\right) = -\omega A \sin \omega t \end{aligned} \right\} \left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{\dot{x}}{-\omega A}\right)^2 = 1 \text{ Ellipse}$$



$$\left(\frac{x}{\sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2}}}\right)^2 + \left(\frac{\dot{x}}{\omega \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2}}}\right)^2 = 1$$

$K < T: \omega < 1$ : x-Halbachse > y-Halbachse: horizontale Ellipse

$K > T: \omega > 1$ : x-Halbachse < y-Halbachse: vertikale Ellipse

$K = T: \omega = 1$ : x-Halbachse = y-Halbachse: Kreis



# Phasendiagramme ( $\dot{x}/dt = f(x(t))$ ) der Lösungen an den K(D)-Grenzen (4)

a)  $\alpha = 0: D^2 = 4TK, K > 0 \begin{cases} D > 0 \\ D < 0 \end{cases}$

$x(t) = e^{-\beta t} \left\{ (\dot{x}_0 + \beta x_0)t + x_0 \right\}$   
 $\ddot{x}(t) = -\beta \cdot x + e^{-\beta t} \cdot (\dot{x}_0 + \beta x_0)$

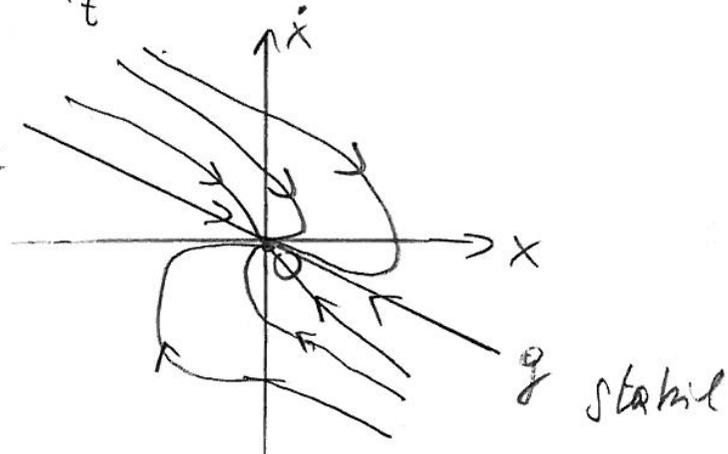
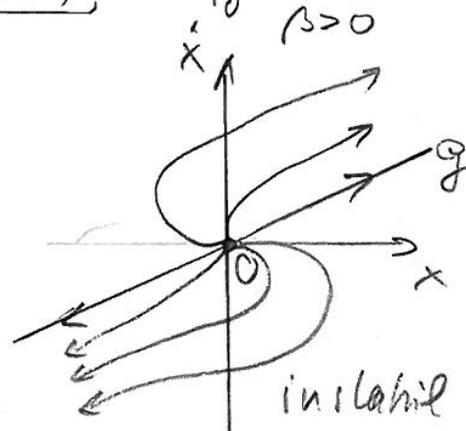
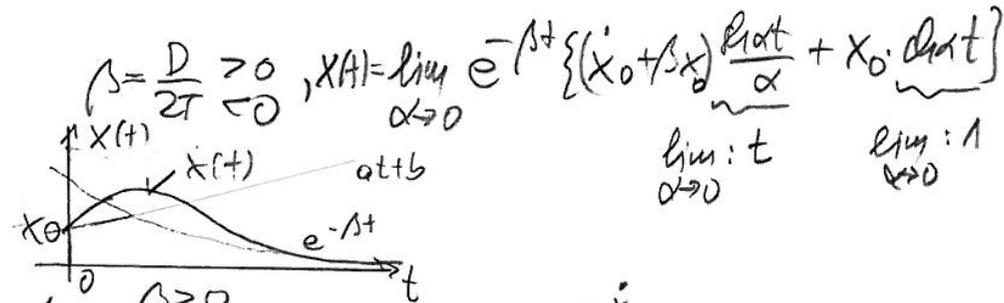
Grenzverhalten:

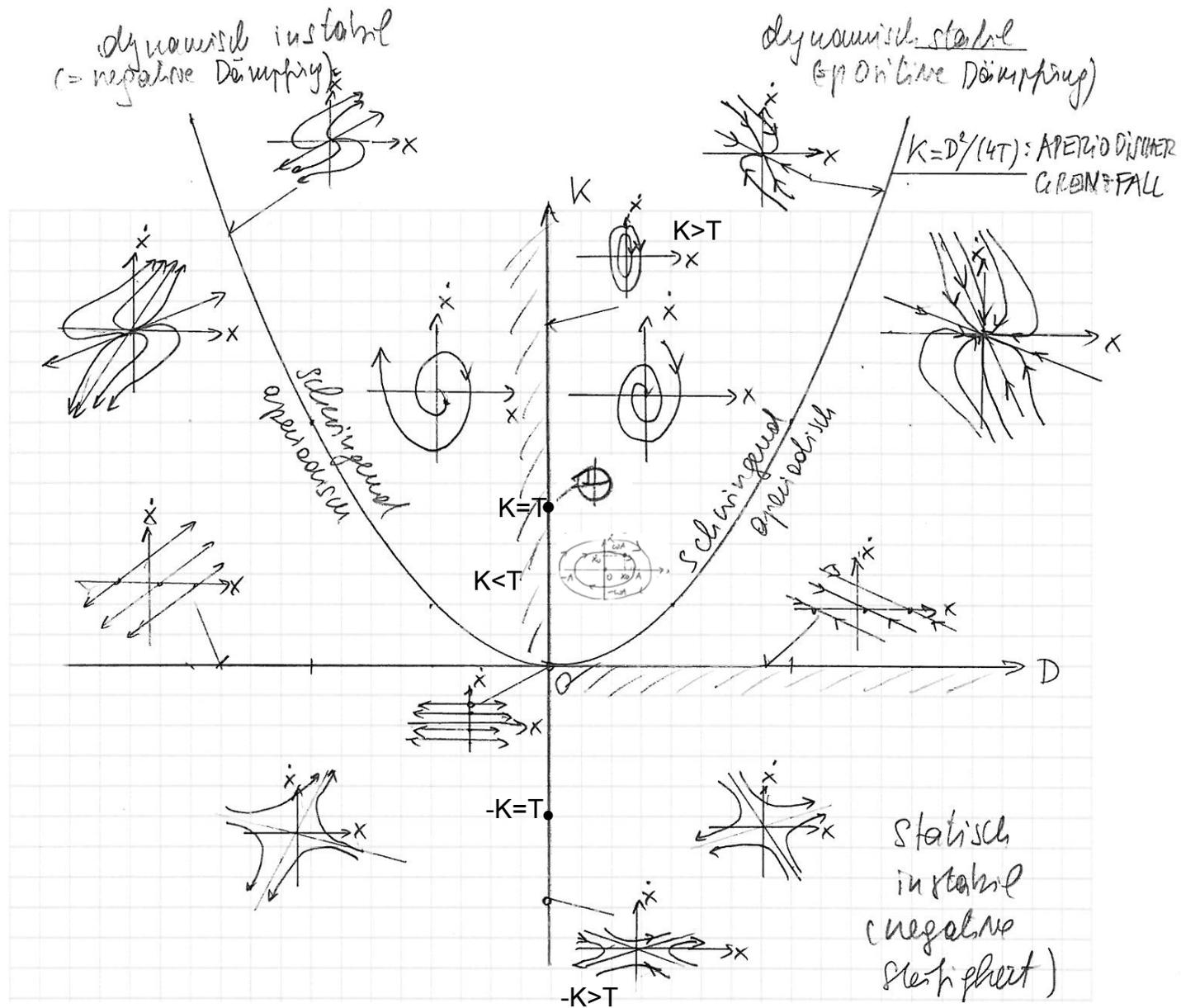
$\alpha = 0 \quad \alpha = 0$   
 $\beta < 0 \quad \beta > 0$

$-\beta > 0$

$\dot{x} = (0 - \beta)x \quad \dot{x} = (0 - \beta)x$

$g = g_1 = g_2 \quad g = g_1 = g_2$





## "Statische" Instabilität

Angenommen, die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung sei durch Linearisierung der nichtlinearen Gleichung

$$\mu(\dot{x}, x)\ddot{x} + \kappa(\dot{x}, x) = f = \text{konst}$$

entstanden. Der Wert  $x_0$ , gegeben durch eine Lösung der Gleichung  $\kappa(0, x_0) = f$ , kennzeichne eine Gleichgewichtslage des Systems. Wir untersuchen die gestörte Bewegung  $x(t) = x_0 + x_s(t)$ .

Linearisierung:  $\frac{\partial \mu}{\partial \dot{x}} \dot{x}\ddot{x} + \frac{\partial \mu}{\partial x} x\ddot{x}$  ist nichtlinear und daher  $\ll$

$$\mu(0, x_0)\ddot{x}_s + \kappa(0, x_0) + \frac{\partial \kappa}{\partial \dot{x}}(0, x_0)\dot{x}_s + \frac{\partial \kappa}{\partial x}(0, x_0)x_s = f, \quad \mu(0, x_0) > 0,$$

$$\Rightarrow T = \mu(0, x_0), \quad D = \frac{\partial \kappa}{\partial \dot{x}}(0, x_0) \text{ dyn. Inst.}, \quad K = \frac{\partial \kappa}{\partial x}(0, x_0) \text{ stat. Inst.}$$

Für  $K < 0$  ist die Störbewegung nicht-oszillierend und aufklingend (Fall 1a)), die Gleichgewichtslage ist instabil. Diese Untersuchung läßt sich für alle möglichen Punkte  $x_0$  anhand der "Gleichgewichtskurve"  $\kappa(0, x_0) = f$  durchführen,

$$\frac{\partial \kappa}{\partial x}(0, x_0) < 0 : \text{Instabilität für } f = \text{konst.},$$

die Linearisierung muß nicht explizit durchgeführt werden.  $K > 0$  ist notwendig für Stabilität, nicht aber hinreichend: Formen der dynamischen Instabilität können nicht mit diesem "statischen" Test entdeckt werden.



# Nichtlineare Differentialgleichung 2. Ordnung und ihre Linearisierung

$$\mu(\dot{x}, x) \cdot \ddot{x} + \chi(\dot{x}, x) = f(x) \quad \ddot{x} = d^2x/dt^2 \quad \dot{x} = dx/dt$$

Gleichgewicht:  $\ddot{x} = 0, \dot{x} = 0, x = x_0 : \mu(0, x_0) \cdot 0 + \chi(0, x_0) = f(x_0)$

Stabilitätsuntersuchung durch  
 Störungsrechnung:  $x(t) = x_0 + x_s(t)$

$$[\mu(0, x_0) + \frac{\partial \mu}{\partial x} \cdot x_s + \frac{\partial \mu}{\partial \dot{x}} \cdot \dot{x}_s] (\ddot{x}_0 + \ddot{x}_s) +$$

$$+ [\chi(0, x_0) + \frac{\partial \chi}{\partial x} \cdot x_s + \frac{\partial \chi}{\partial \dot{x}} \cdot \dot{x}_s] = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot x_s$$

$$\mu(0, x_0) \ddot{x}_s + \frac{\partial \mu}{\partial x} \cdot x_s \cdot \ddot{x}_s + \frac{\partial \mu}{\partial \dot{x}} \cdot \dot{x}_s \cdot \ddot{x}_s + \frac{\partial \chi}{\partial x} \cdot x_s + \frac{\partial \chi}{\partial \dot{x}} \cdot \dot{x}_s = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot x_s$$

$$\mu(0, x_0) \cdot \ddot{x}_s + \frac{\partial \chi}{\partial \dot{x}} \Big|_{\dot{x}=0} \cdot \dot{x}_s + \frac{\partial \chi}{\partial x} \Big|_{x=x_0} \cdot x_s = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_0} \cdot x_s$$

$$T \cdot \ddot{x}_s + D \cdot \dot{x}_s + K \cdot x_s = 0$$

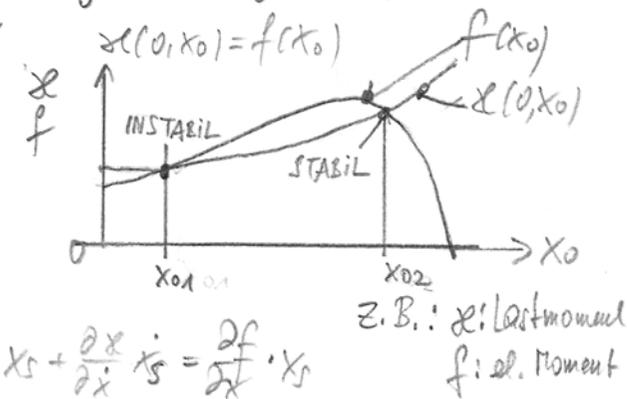
$$T = \mu(0, x_0)$$

$$D = \frac{\partial \chi}{\partial \dot{x}}(0, x_0)$$

$$K = \frac{\partial \chi}{\partial x}(0, x_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$$

Statische Stabilität!  $K > 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \chi}{\partial x}(0, x_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) > 0$

Dynamische Stabilität!  $D > 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \chi}{\partial \dot{x}}(0, x_0) > 0$



z. B.:  $x$ : Lastmoment  
 $f$ : el. Moment

# Nichtlineare Differentialgleichung 1. Ordnung und ihre Linearisierung

$$v(x) \cdot \dot{x} + x(x) = f(x) \quad \text{gleichgew. d. : } x(x_0) = f(x_0)$$

Linearisierung:  $v(x_0 + x_s)(x_0 + x_s) + x(x_0 + x_s) = f(x_0 + x_s)$

$$\left( v(x_0) + \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x_0} \cdot x_s \right) \cdot \dot{x}_s + \left[ x(x_0) + \frac{\partial x}{\partial x} \Big|_{x_0} \cdot x_s \right] = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_0} \cdot x_s$$

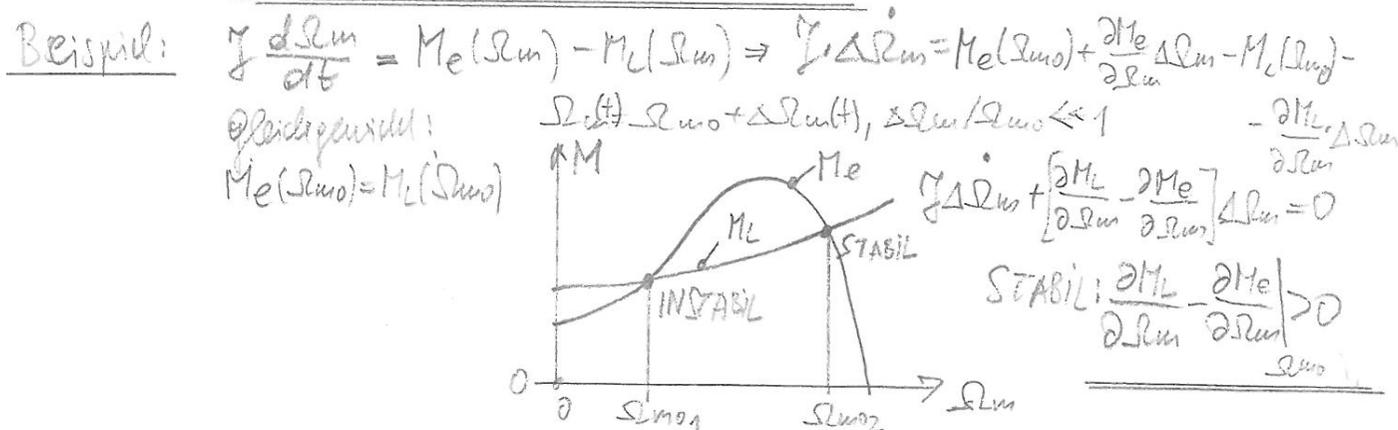
$$v(x_0) \cdot \dot{x}_s + \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x_0} \cdot x_s \cdot \dot{x}_s + \left[ \frac{\partial x}{\partial x} \Big|_{x_0} - \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_0} \right] \cdot x_s = 0$$

$$v(x_0) \cdot \dot{x}_s + k \cdot x_s = 0 \Rightarrow \dot{x}_s + \frac{k}{v(x_0)} x_s = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{k}{v(x_0)}; x_s(t=0) = x_{s0}$$

$$x_s(t) = x_{s0} \cdot e^{-\frac{k}{v(x_0)} t}, \text{ mit } v(x_0) > 0 \text{ folgt: } k > 0: \text{ stabil}$$

$$k < 0: \text{ instabil}$$

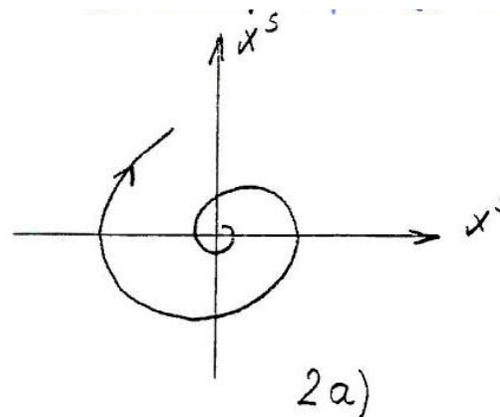
$$\frac{\partial x}{\partial x} \Big|_{x_0} - \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_0} > 0 \text{ stabil}$$



### "Dynamische" Instabilität

kommt durch negative "Dämpfung" zustande; die Bewegung kann oszillierend (Fall 2a)) oder nicht oszillierend (Fall 1b)) sein. Sei z.B.

$K > 0$ ,  $D < 0$ ,  $\dot{x}_s(0) = 0$ ,  $x_s(0) > 0$ . Im Anfangszeitpunkt wird das System gegen  $x_s = 0$  beschleunigt. Mit wachsender Geschwindigkeit steigt die rücktreibende Kraft ( $D < 0$ ), das System wird über den Punkt  $-x_s(0)$  hinaus beschleunigt und kehrt im Fall 1b) nicht mehr um. Für hinreichend große  $K$  (Rückstellkraft!) kehrt das System zwar immer wieder um (Fall 2b)), die Abstände der Umkehrpunkte von der Ruhelage nehmen aber immer mehr zu.



Beispiel: Vergleich der Volterring EMA: Ob. exakte Symmetrieänderung  
 - Verlustneutral

OHNE Dämpfung:  $J \frac{d\Omega_m}{dt} = M_e - \underbrace{M_d}_{=0} - M_L + M_{Diss}^{\leftarrow} = 0$

$M_e(\omega) = -\frac{ms}{\Omega_{syn}} \cdot \frac{V_{SV}}{X_d} \sin(\delta) \quad (R_s=0); \quad \Omega_m = \Omega_{syn} + \Delta\Omega_m$   
 - störung

$\Delta\Omega_m = \frac{\Delta\omega}{p}$ ,  $\Delta\omega$ : Änderung des Polwinkels.

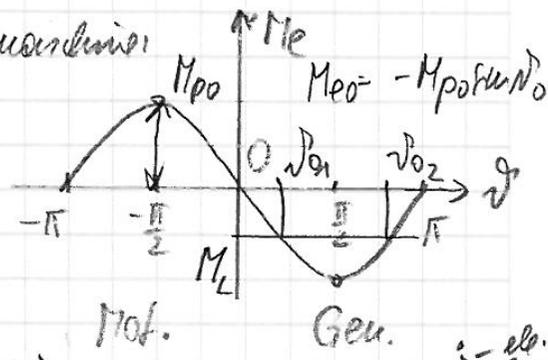
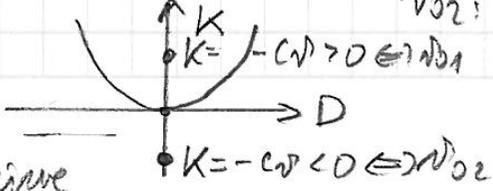
$\Omega_m(\omega_0 + \Delta\omega(t)) = \Omega_m(\omega_0) + \frac{d\Omega_m}{d\omega} \cdot (\omega - \omega_0) = \Omega_m(\omega_0) + C_D \cdot \Delta\omega$   
 - stat. Arbeitspunkt  
 - el. grade  
 - mech. grade

$\omega(t) = \omega_0 + \Delta\omega(t)$

$d\omega/dt = 0 + d\Delta\omega/dt \Rightarrow J \frac{d^2\Delta\omega}{dt^2} = M_{e0} + C_D \Delta\omega - M_L = C_D \Delta\omega$

$J \Delta\ddot{\omega} - C_D \Delta\omega = 0 \Leftrightarrow T \Delta\ddot{\omega} + K \Delta\omega = 0 : K = -C_D$   
 $\omega_{01}: C_D < 0 \Rightarrow K > 0$ : Dauer-schwingung  
 $\omega_{02}: C_D > 0 \Rightarrow K < 0$ : statisch instabil

Statische Stabilität =  
 Ableitung aus dem  
 der statischen  $M_e(\omega)$ -Kurve



Beispiel: Dynamische Stabilität, d.h. exakte Synchrongleichung mit Dämpferwicklung (vgl. Vorlesung EHA)

$$J \frac{d\Omega_m}{dt} = M_e - M_L + M_{Dm} \quad M_{Dm} = \frac{2M_b}{\frac{s}{s_0} + \frac{s_b}{s}} \quad (\text{Dämpfercharakteristik - Nennwert für } R_s=0)$$

$$\Omega_m = \Omega_{syn} + \Delta\Omega_m(t) \quad \Delta\Omega_m(t) = \Delta\omega/p \quad M_e = -\frac{m_s}{I_{syn}} \cdot \frac{U_s U_p}{X_d} \sin\delta \quad (\text{d.h. Nennwert für } R_s=0)$$

Linearisierung für  $\frac{\Delta\Omega_m}{\Omega_{syn}} \ll 1$ :  $M_e \approx -\frac{m_s}{I_{syn}} \frac{U_s U_p}{X_d} [\sin\delta_0] + [C_D \cdot \Delta\delta] = M_{e0} + C_D \Delta\delta$

$$s = \frac{\Omega_{syn} - \Omega_m}{\Omega_{syn}} = \frac{\Omega_{syn} - (\Omega_{syn} + \Delta\Omega_m)}{\Omega_{syn}} \quad M_{Dm} \Big|_{s \ll 1} \approx \frac{2M_b}{\frac{s_b}{s}} = \frac{2M_b}{s_b} \cdot \left(-\frac{\Delta\dot{\delta}}{p \Omega_{syn}}\right)$$

$$= -\frac{\Delta\Omega_m}{\Omega_{syn}} = -\frac{\Delta\dot{\delta}}{p \Omega_{syn}} \ll 1 \quad s \ll 1$$

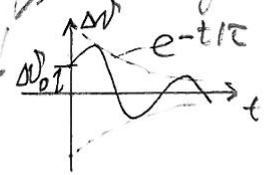
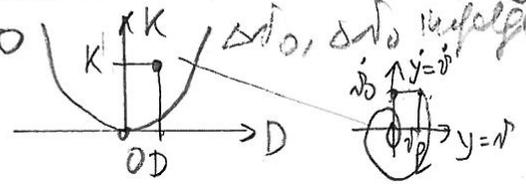
$$J \frac{d^2\Delta\delta}{dt^2} = \underbrace{M_{e0} + C_D \cdot \Delta\delta}_{\text{station. Arbeitspunkt}} - M_L - \frac{2M_b}{s_b} \cdot \frac{1}{p \Omega_{syn}} \cdot \Delta\dot{\delta} \Rightarrow J \Delta\ddot{\delta} + \frac{2M_b}{s_b} \frac{\Delta\dot{\delta}}{p \Omega_{syn}} - C_D \Delta\delta = 0$$

$$T \Delta\ddot{\delta} + D \Delta\dot{\delta} + K \Delta\delta = 0$$

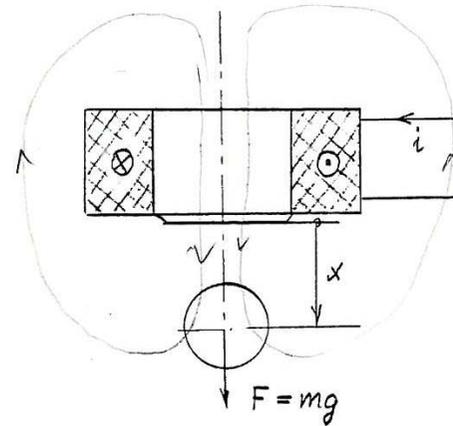
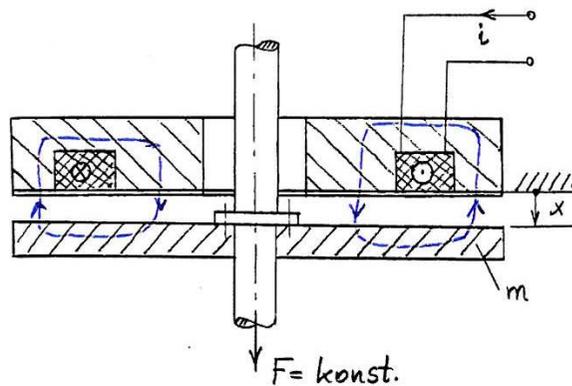
$T > 0, D > 0, K > 0$  (für  $D_{on}$ :  $C_D < 0$ )

dynamisch stabil! Polradablenkung klingt nach Aufzugsüberholung ab!  $\Delta\delta_0, \Delta\dot{\delta}_0$  infolge einer Störung ab!

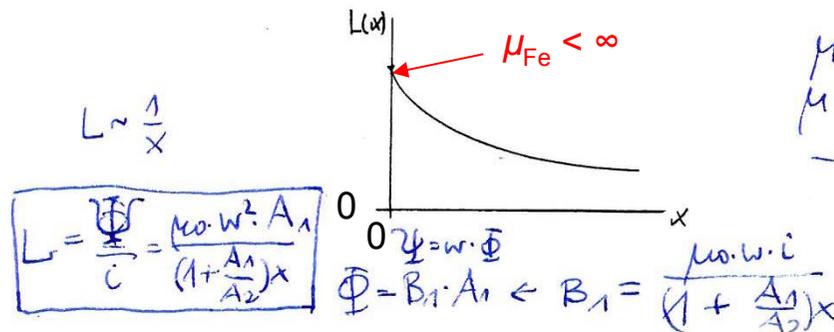
$$\tau = \frac{J D_{syn} s_b}{M_b} > 0$$



Beispiel: Magnetisches Tragsystem



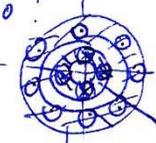
Die Eisenteile seien ungesättigt, - das System also elektrisch linear.  
Qualitativer Verlauf von  $L(x)$ :



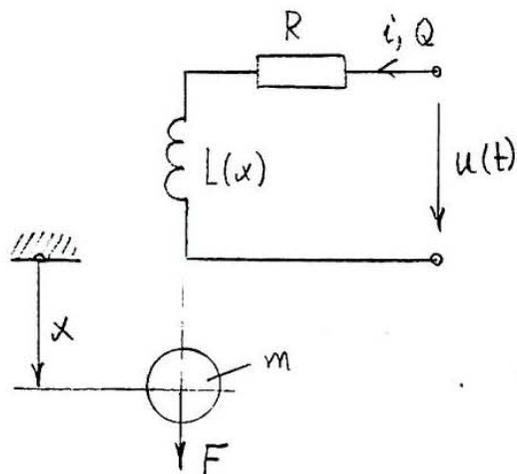
Qualität:  $\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = w \cdot i$

$\mu_{Fe} = \infty$   
 $\mu_0!$   
 $H_2 x + H_1 \cdot 2x = w \cdot i$   
 $B = \mu_0 H \neq \frac{\mu_0 w i}{2x}$

$\Phi \approx B_1 \cdot A_1 = B_2 \cdot A_2$   
 $B_1 x + B_2 x = \mu_0 w i$   
 $\leftarrow B_1 x + B_1 \frac{A_1}{A_2} x = \mu_0 w i$



a) Aufstellen der Bewegungsgleichungen



$$n=2 : x, Q$$

$$W_k^* = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} L(x) i^2, \quad W_p = 0 \quad \leftarrow \begin{array}{l} F \text{ nicht} \\ \text{als Wirkung hier} \\ \text{erklärt} \end{array}$$

$$\delta V = R i \delta Q, \quad \delta A = F \delta x + u \delta Q$$

$$\frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{x}} = m \dot{x}, \quad \frac{\partial W_k^*}{\partial x} = \frac{1}{2} L'(x) i^2, \quad f_x = F$$

$$\frac{\partial W_k^*}{\partial i} = L(x) i, \quad f_Q^d = R i, \quad f_Q = u$$

$$\left. \begin{array}{l} m \ddot{x} - \frac{1}{2} L'(x) i^2 = F \\ [L(x) i]^{\cdot} + R i = u \end{array} \right\} (1) \quad \text{gleichungen vom Typ 5.44}$$



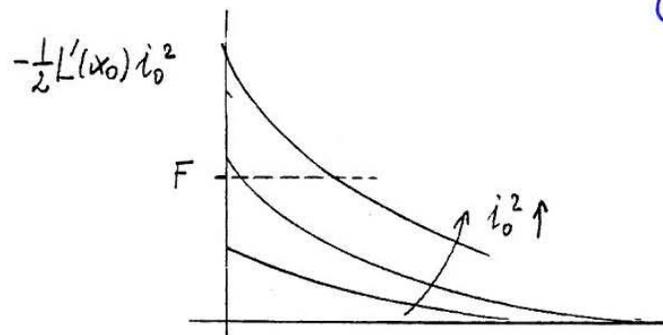
b) Gleichgewichtslagen

$$x = x_0, \quad i = i_0, \quad u = u_0 : \text{ konst.}$$

$$-\frac{1}{2} L'(x_0) i_0^2 = F, \quad R i_0 = u_0$$

$$K = \frac{\partial \mathcal{L}(0, x_0)}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (L'(x) i^2) \Big|_{x_0} < 0$$

Wegen  $L'(x) < 0$  sind Gleichgewichtslagen für  $F > 0$  grundsätzlich möglich: ~~(\*)~~ jedoch  $(\Rightarrow -L'(x) > 0 \hat{=} K < 0$ : Stabilität prinzipiell unmöglich)



$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ -\frac{1}{2} L'(x_0) i_0^2 \right] = -\frac{1}{2} L''(x_0) i_0^2 < 0 \rightarrow \boxed{\text{Instabil}}$$

$$\text{Sei } L \sim \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial L}{\partial x} \sim -\frac{1}{x^2}, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} \sim \frac{2}{x^3}$$

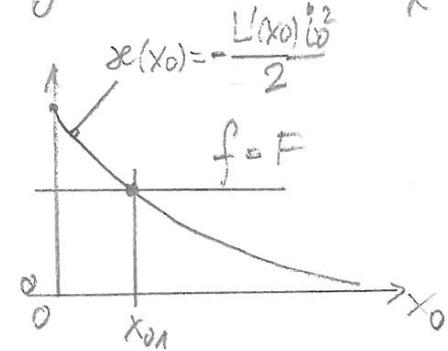
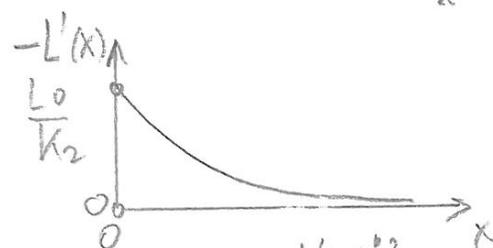
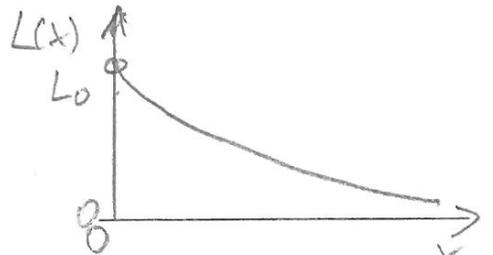
$x < 0$   
 $(x > 0)$

Das System ist statisch instabil und daher in dieser Form nicht brauchbar.





Qualitative Untersuchung der Instabilität:



$\frac{\partial x}{\partial x} \Big|_{x_0} - \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial x} < 0$  : INSTABIL

Störungsrechnung:  $x(t) = x_0 + x_s(t)$

$m \ddot{x}_s - \frac{1}{2} L''(x_0) l_0^2 x_s = 0$  für  $l = l_0 = \text{konst.}$

$\Phi = A_a B_a = A_b B_b$

$s_2 \frac{B_2}{\mu} + x \frac{B_a}{\mu_0} + \frac{B_1}{\mu} s_1 + \frac{B_b}{\mu_0} x = NI$

vereinfacht:  $B_1 \approx B_2 \approx B_b$

$s_2 \frac{B_1}{\mu} + x \frac{B_b A_b l}{A_a \mu_0} + \frac{B_b s_1}{\mu} + \frac{B_b}{\mu_0} x = NI$

$B_b \cdot \left[ \frac{s_1 + s_2}{\mu} + x \left( \frac{A_b}{A_a} + 1 \right) \frac{l}{\mu_0} \right] = NI$

$\Psi = N \Phi = N \cdot \frac{NI \cdot A_b}{\frac{s_1 + s_2}{\mu} + \frac{l}{\mu_0} \left( \frac{A_b}{A_a} + 1 \right)} = L(x) \cdot I$

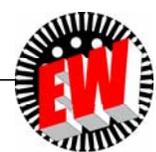
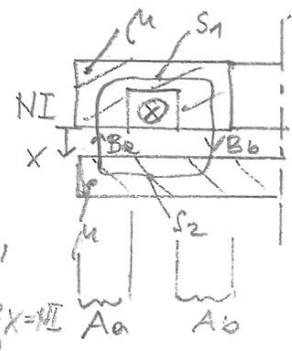
$L(x) = \mu_0 N^2 \frac{A_b}{\frac{l}{\mu} (s_1 + s_2) + x \cdot \left( \frac{A_b}{A_a} + 1 \right)}$   $l_0 = \frac{\mu N^2 A_b}{s_1 + s_2}$

$L'(x) = \frac{d}{dx} \frac{K_1}{K_2 + x} = K_1 (-1) \frac{1}{(K_2 + x)^2}$   $K_1 = \frac{\mu_0 N^2 A_b}{\frac{A_b}{A_a} + 1}$

$-L'(x) = \frac{K_1}{(K_2 + x)^2} > 0$   $K_2 = \frac{\mu_0 l (s_1 + s_2)}{\mu \left( \frac{A_b}{A_a} + 1 \right)}$

$\frac{\partial x}{\partial x} \Big|_{x_0} = -\frac{L''(x_0) l_0^2}{2} < 0$

$\frac{\partial R}{\partial x} \Big|_{x_0} = -\frac{l_0^2}{2} \cdot \frac{\partial \left( \frac{-K_1}{(K_2 + x)^2} \right)}{\partial x} \Big|_{x_0} = -\frac{l_0^2}{2} \cdot \frac{2 K_1}{(K_2 + x)^3} \Big|_{x_0} < 0$





c) Linearisierung der Bewegungsgleichungen

$$x = x_0 + x_s, \quad i = i_0 + i_s, \quad u = u_0 + u_s$$

$$m \ddot{x}_s - \frac{1}{2} [L'(x_0) + L''(x_0)x_s + \dots] (i_0^2 + 2i_0 i_s + i_s^2) = F$$

$$\{ [L(x_0) + L'(x_0)x_s + \dots] (i_0 + i_s) \}' + R(i_0 + i_s) = u_0 + u_s$$

$i_s^2 \ll !$  (quadr.)

$$m \ddot{x}_s - \frac{1}{2} L''(x_0) i_0^2 x_s = F$$

$$L(x_0) \dot{i}_s + L'(x_0) i_0 \dot{x}_s + R i_0 + R i_s = u_0 + u_s$$

quadr.!

$$\{ [L(x_0) + L'(x_0)x_s] (i_0 + i_s) \}' = L(x_0) \cdot \overset{=0}{i_0} + L(x_0) \cdot \dot{i}_s + L'(x_0) \dot{x}_s i_0 + L'(x_0) x_s \dot{i}_s + 0$$

$$m \ddot{x}_s - \frac{1}{2} L''(x_0) i_0^2 x_s = L'(x_0) i_0 \dot{x}_s$$

$$L(x_0) \dot{i}_s + R i_s + L'(x_0) i_0 \dot{x}_s = u_s$$

(2)

$$L(x_0) \cdot \ddot{Q}_s + R \dot{Q}_s + L'(x_0) \cdot \ddot{Q}_0 \cdot \dot{x}_s = u_s$$

$\dot{Q}_s = 0:$

Für  $i_s = 0$  (eingepprägter Strom) ist die "Federkonstante" negativ.

$$i_s = 0 \rightarrow m \ddot{x}_s - \frac{1}{2} L''(x_0) i_0^2 x_s = 0, \quad L'(x_0) i_0 \dot{x}_s = u_s$$

$< 0$  negativ ( $K < 0$ : INSTABIL)





Störungsrechnung:  $x(t) = x_0 + x_s(t)$

$$m\ddot{x}_s - \frac{1}{2}L''(x_0)\dot{i}_0^2 x_s = 0 \quad \text{für } \dot{i} = \dot{i}_0 = \text{konst.}$$

$$T\ddot{x}_s + kx_s = 0 \Rightarrow K = -\frac{1}{2}L''(x_0)\dot{i}_0^2 = \left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2} \right|_{x_0} < 0 : \text{statisch instabil}$$

Stabilisierung über  $\dot{i} = \dot{i}_0 + \dot{i}_s(t) = i(t)$

$$\dot{i}_s(t) = A \cdot x_s(t), \quad A > -\frac{L'(x_0)\dot{i}_0}{2L'(x_0)} > 0$$

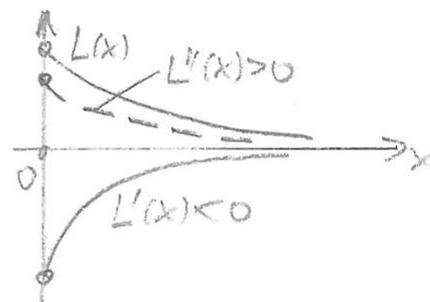
Dynamische Stabilisierung:

$$\dot{i}_s(t) = A \cdot x_s(t) + B \cdot \dot{x}_s(t), \quad A > 0, B > 0$$

$$m\ddot{x}_s + \underbrace{[-L'(x_0)\dot{i}_0 B]}_{D > 0} \cdot \dot{x}_s(t) + \underbrace{[-L'(x_0)A - \frac{1}{2}L''(x_0)\dot{i}_0^2]}_{K > 0} x_s(t) = 0$$

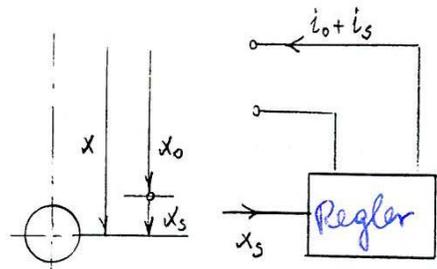
$D > 0$   
positive Dämpfung

$K > 0$   
positive Steifigkeit



d) Stabilisierung

Durch entsprechende Adaptierung der rechten Seite der ersten Gleichung (2) kann man erreichen, daß die Gleichgewichtslagen statisch stabil werden.



Erfassen der Position,  
Überlagerung eines Stromsignals  
proportional der Abweichung:.

$$i_s = A x_s \quad (\text{P-Regler}) \quad (3)$$

*soll 70 sein*

Damit wird (2)<sub>1</sub>  $m \ddot{x}_s + [-L'(x_0)A - \frac{1}{2}L''(x_0)i_0]i_0 x_s = 0.$  (4)

Da  $L'(x_0) < 0$  können wir durch entsprechend große Verstärkung  $A > L''(x_0)i_0 / (-2L'(x_0))$  positive Werte der "Federkonstanten" erreichen.

Nachteil: Das System arbeitet an der Stabilitätsgrenze ( $D=0, K>0$  im Diagramm auf S. 44, Dauerschwingungen).

Dynamische Stabilisierung: Wir ersetzen (3) durch

$$i_s = A x_s + B \dot{x}_s \quad (\text{PD-Regler})$$

$$m \ddot{x}_s + K x_s = 0$$

$$x_s = \tilde{A} \cos \omega t$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

und erhalten anstelle der Bewegungsgleichung (4)

$$m \ddot{x}_s + [-L'(x_0)i_0 B] \dot{x}_s + [-L'(x_0)A - \frac{1}{2}L''(x_0)i_0]i_0 x_s = 0.$$

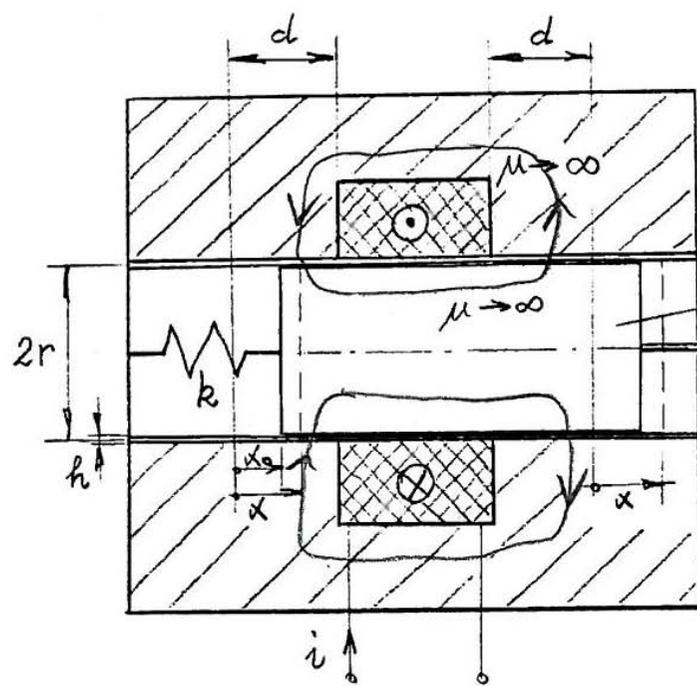
Für  $B > 0$  ist die Dämpfung positiv, und die Schwingungen klingen für hinreichend große Verstärkung  $A$  ab.

Gleichung (2)<sub>2</sub> gibt den Verlauf des zugehörigen Spannungssignals an; sie unterstützt den Reglerentwurf.

### 1.12.2. Systeme mit nicht konstanten Koeffizienten

Diskussion einer charakteristischen Eigenschaft anhand eines Beispiels.

#### Schwingantrieb



*Parametrischer  
Verstärker!  
(Kinderschraubel,  
Pendel mit  
veränderlicher  
Pendellänge)*

Ruhelage (Feder entspannt)  
für  $x = x_0$ ,  $i = 0$ .



Magnetkreis ist Spezialfall von Beispiel 3) S.17 ( $i_2$  n. d. d. d.  $\rightarrow 0$ )

$$\psi(i; x) = L_0 \left[ 1 - \left( \frac{x}{d} \right)^2 \right] i, \quad L_0 = \mu_0 N^2 \frac{\pi r d}{h}$$

*in  $\rightarrow i$   
a  $\rightarrow 0$  ✓  
( $L_{12} = 0, L_{22} = 0!$ )*

Bewegungsgleichung für eingepprägten Strom:

$$n=1, x: W_k^* = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} L_0 \left[ 1 - \left( \frac{x}{d} \right)^2 \right] i^2, \quad W_p = \frac{1}{2} k (x - x_0)^2,$$

$$\underline{m \ddot{x} + \left( k + \frac{L_0}{d^2} i^2 \right) x = k x_0} \quad (1)$$

Bei Strom = Null:  $m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = 0$

Rein mechanisch bedingte Eigen-Schwingfrequenz:  $\Omega_m = \sqrt{k/m}$

Bei Strom =  $I = \text{konst.}$  und keine Feder ( $k = 0$ ):  $m \cdot \ddot{x} + k_e \cdot x = 0 \quad k_e = L_0 I^2 / d^2$

Rein elektrisch bedingte Eigen-Schwingfrequenz:  $\Omega_e = \sqrt{k_e/m}$

Bei Strom =  $I = \text{konst.}$  und Feder  $k > 0$ :  $m \cdot \ddot{x} + (k + k_e) \cdot x = 0 \quad k_e = L_0 I^2 / d^2$

Mechanisch und elektrisch bedingte Eigen-Schwingfrequenz:  $\Omega = \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{k_e}{m}} = \sqrt{\Omega_m^2 + \Omega_e^2}$



Speisung mit Wechselstrom  $i = I\sqrt{2} \sin \omega t$ :  $\sqrt{2}I^2 \cos^2 \omega t = (1 + \cos 2\omega t) \frac{1}{2} \cdot 2I^2$   
 $m\ddot{x} + [k + k_e(1 - \cos 2\omega t)]x = kx_0$   $\sqrt{2}I^2 \sin^2 \omega t = (1 - \cos 2\omega t)I^2 (2)$

mit  $k_e = L_0 I^2 / d^2$  ... "elektrische Federkonstante"

Wir setzen weiter

$$\Omega_m = \sqrt{k/m}, \quad \Omega_e = \sqrt{k_e/m}$$

$$\frac{1}{\omega^2} \frac{d^2 x}{dt^2} + \left[ \frac{\Omega_m^2}{\omega^2} + \frac{L_0 I^2 (1 - \cos 2\omega t)}{\omega^2 m} \right] x = \frac{\Omega_m^2 x_0}{\omega^2}$$

und bringen die Gleichung über die Normierung

$$y = x/d, \quad \tau = \omega t$$

auf die Standardform

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + (a - 2q \cos 2\tau) y = (\Omega_m/\omega)^2 y_0,$$

nicht konst. Koeff.!

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + [a - 2q \cos 2\tau] y = \left(\frac{\Omega_m}{\omega}\right)^2 y_0 \quad (3)$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{1}{2} \left(\frac{\Omega_e}{\omega}\right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\Omega_m}{\omega}\right)^2 \frac{L_0 I^2}{k d^2}, \\ a &= \frac{\Omega_m^2 + \Omega_e^2}{\omega^2} = \left(\frac{\Omega_m}{\omega}\right)^2 + 2q, \quad y_0 = x_0/d \end{aligned} \right\} \checkmark$$

Lineare Differentialgleichung  
zweiter Ordnung mit  
nichtkonstanten, aber  
periodischen Koeffizienten

# Lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit nichtkonstanten, aber periodischen Koeffizienten



Lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit periodisch veränderlichen

Koeffizienten:  $a(x), b(x), c(x)$ :  $a(x+\tilde{\omega})=a(x), b(x+\tilde{\omega})=b(x), c(x+\tilde{\omega})=c(x)$

$$a(x) \cdot y''(x) + b(x) \cdot y'(x) + c(x) \cdot y(x) = 0$$

Transformation:  $y(x) = u(x) \cdot e^{-\frac{1}{2} \int_0^x \frac{b(x)}{a(x)} dx} \Rightarrow u = y e^{\frac{1}{2} \int \frac{b}{a} dx} = y \cdot e^f$

$$u''(x) + g(x) \cdot u(x) = 0, \text{ mit } g(x) = \frac{c(x)}{a(x)} - \left(\frac{b(x)}{2a(x)}\right)^2 - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{b(x)}{a(x)}\right)$$

$$(y e^f)'' + g(x) \cdot y \cdot e^f = 0, \quad g(x+\tilde{\omega}) = g(x), \text{ weil } a, b, c \text{ periodisch mit } \tilde{\omega}!$$

$$e^f \cdot y'' + 2y' \cdot (e^f \cdot f') + y \cdot (e^f \cdot f'^2 + e^f \cdot f'') + g(x) y e^f = 0, \quad f = \frac{1}{2} \int \frac{b}{a} dx, \quad f' = \frac{b}{2a}$$

$$y'' + 2y' \cdot \frac{1}{2} \frac{b}{a} + y \left( \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{d}{dx} \left(\frac{b}{2a}\right) \right) + \left( \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a}\right)' \right) y = 0$$

$$y'' + y' \frac{b}{a} + \frac{c}{a} y = 0 \Rightarrow y'' a + y' b + c y = 0, \quad :$$

Es genügt also,  $u''(x) + g(x) u(x) = 0$  zu untersuchen: ob man  $y''(x) + g(x) y(x) = 0$

Theorem von FLOQUET: Lösungen  $y(x)$  sind i. A. nicht periodisch,

aber multipliziert:  $y(x+\tilde{\omega}) = \rho \cdot y(x)$ , nur wenn  $\rho = 1$ :  $y(x+\tilde{\omega}) = y(x)$  periodisch mit  $\tilde{\omega}$

$$\text{wenn } \rho = -1: y(x+\tilde{\omega}) = -y(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x+\tilde{\omega}+\tilde{\omega}) = -y(x+\tilde{\omega}) = y(x):$$

$$\Rightarrow y(x+2\tilde{\omega}) = y(x)$$

periodisch mit  $2\tilde{\omega}$





Beweis des Theorems von FLOQUET:  $y(x+\tilde{\omega}) = p \cdot y(x)$

(1) Wenn  $y(x)$  Lösung ist, dann ist auch  $y(x+\tilde{\omega})$  Lösung:

$$y''(x+\tilde{\omega}) + g(x) \cdot y(x+\tilde{\omega}) = y''(x+\tilde{\omega}) + g(x+\tilde{\omega}) \cdot y(x+\tilde{\omega}) = y''(u) + g(u) \cdot y(u) = 0$$

(2) Da DGL. 2. Ordnung, existieren zwei linear unabhängige Lösungen  $y_1(x), y_2(x)$

Da  $y_1(x), y_2(x)$  zwei lin. unabh. Lösungen, sind auch  $y_1(x+\tilde{\omega}), y_2(x+\tilde{\omega})$  Lösungen. Diese müssen daher linear abhängig von  $y_1, y_2$  sein.

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad y_1(x+\tilde{\omega}) &= a_{11} \cdot y_1(x) + a_{12} \cdot y_2(x) = p \cdot y_1(x) \\ (b) \quad y_2(x+\tilde{\omega}) &= a_{21} \cdot y_1(x) + a_{22} \cdot y_2(x) = p \cdot y_2(x) \end{aligned} \right\} \text{Ansatz gemäß FLOQUET}$$

Damit (a), (b) für  $y_1 \neq y_2$  gelten, muss  $\begin{vmatrix} a_{11}-p & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-p \end{vmatrix} = 0$  sein.

$$p^2 - (a_{11}+a_{22})p + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$$

$$p_{1,2} = \frac{a_{11}+a_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_{11}+a_{22}}{2}\right)^2 - (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}$$

I. Wenn  $p_1 \neq p_2$ , dann existieren zwei linear unabhängige Lösungen  $\eta_1(x), \eta_2(x)$ :

mit der Eigenschaft:  $\eta_1(x+\tilde{\omega}) = p_1 \cdot \eta_1(x)$ ,  $\eta_2(x+\tilde{\omega}) = p_2 \cdot \eta_2(x)$ . Wie sehen diese

Lösungen aus? Nun, es ist mit  $p = e^{\frac{2\pi i p}{\tilde{\omega}}} = e^{\alpha \tilde{\omega}}$  die Funktionen

$$\eta(x) \cdot e^{-\alpha x} \text{ periodisch mit } \tilde{\omega}, \text{ denn } \eta(x+\tilde{\omega}) \cdot e^{-\alpha(\tilde{\omega}+x)} = p \cdot \eta(x) \cdot e^{-\alpha \tilde{\omega}} \cdot e^{-\alpha x} = \eta(x) \cdot e^{-\alpha x}$$

Also:  $\eta(x) \cdot e^{-\alpha x} = \varphi(x) = \varphi(x+\tilde{\omega})$ , daher:  $\eta(x) = e^{\alpha x} \varphi(x)$

Es existieren also nach FLOQUET zwei linear unabhängige Lösungen

bei  $p_1, p_2$ : mit  $\alpha_1 = \frac{2\pi p_1}{\tilde{\omega}}$ ,  $\alpha_2 = \frac{2\pi p_2}{\tilde{\omega}}$

$$\underline{\eta_1(x) = e^{+\alpha_1 x} \cdot \varphi(x), \quad \eta_2(x) = e^{+\alpha_2 x} \cdot \varphi(x)} \text{ mit } \varphi(x) = \varphi(x+\tilde{\omega}),$$

denn periodisch wie  $\varphi(x)$ .





II. Wenn  $p_1 = p_2 = p = e^{\alpha x}$ , dann können wir uns eine Lösung  $\eta_1(x) = e^{\alpha x} \cdot \psi(x)$

Die zweite Lösung ist  $\eta_2(x) = \left[ \frac{cx}{\omega} \psi_1(x) + \psi_2(x) \right] e^{\alpha x}$ ;  $\psi_1(x), \psi_2(x)$ : periodisch mit  $\tilde{\omega}$

↑ wegen  $x \rightarrow \infty$ : instabile Lösung, nicht periodisch!

Beweis:  $\eta_1'' + g\eta_1 = 0$ ,  $\eta_2'' + g\eta_2 = 0$

$(\psi_2(x) = \psi_1(x) \cdot \psi(x))$

$\eta_2 = \left( \frac{cx}{\omega} + \psi \right) \cdot \eta_1 \Rightarrow \eta_2'' = \psi'' \eta_1 + 2 \left( \frac{c}{\omega} + \psi' \right) \eta_1' + \left( \frac{cx}{\omega} + \psi \right) \eta_1'' = -g \eta_2$   
 $\psi(x + \tilde{\omega}) = \psi(x)$   
 $= -g \cdot \left( \frac{cx}{\omega} + \psi \right) \eta_1$

$\psi'' \eta_1 + 2 \frac{c}{\omega} \eta_1' + 2 \psi' \eta_1' + \left( \frac{cx}{\omega} + \psi \right) \left[ \eta_1'' + g \eta_1 \right] = 0$

$\psi'' \eta_1 + 2 \psi' \eta_1' = (\psi \cdot \eta_1)'' - \psi \cdot \eta_1'' \Rightarrow \frac{2c}{\omega} \eta_1' + (\psi \eta_1)'' - \psi \eta_1'' = 0$

$(\eta_2 - \frac{cx}{\omega} \eta_1)'' + g \eta_2 \cdot \psi = g(\eta_2 - \frac{cx}{\omega} \eta_1)$   
 $\frac{2c}{\omega} \eta_1' + \eta_2'' - \left( \frac{cx}{\omega} \eta_1 \right)'' + g \eta_2 - g \frac{cx}{\omega} \eta_1 = 0$

$\frac{2c}{\omega} \eta_1' - \left[ \eta_1'' + 2 \frac{c}{\omega} \eta_1' + \frac{cx}{\omega} \eta_1'' \right] - g \frac{cx}{\omega} \eta_1 = 0 \rightarrow \frac{2c}{\omega} \eta_1' - \frac{2c}{\omega} \eta_1' = 0 \checkmark$





Wegen der Wronski-Determinante  $W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$

folgt mit  $W'(x) = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_1'' y_2 - y_1' y_2'$  für  $y'' + g(x)y = 0$ :

$$W' = y_1' (-g y_2) - y_2' (-g y_1) = 0, \text{ also } W(x) = \text{konst. unabh. von } x$$

Also wegen  $y_1(x+\tilde{\omega}) = a_{11} y_1(x) + a_{12} y_2(x)$

$$y_2(x+\tilde{\omega}) = a_{21} y_1(x) + a_{22} y_2(x)$$

$$y_1'(x+\tilde{\omega}) = a_{11} y_1'(x) + a_{12} y_2'(x)$$

$$y_2'(x+\tilde{\omega}) = a_{21} y_1'(x) + a_{22} y_2'(x)$$

$$\begin{pmatrix} y_1(\tilde{\omega}) & y_1'(\tilde{\omega}) \\ y_2(\tilde{\omega}) & y_2'(\tilde{\omega}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) & y_1'(0) \\ y_2(0) & y_2'(0) \end{pmatrix}$$

$$(A) = (L) \cdot (Z)$$

$$\text{Det}(A) = \text{Det}(L) \cdot \text{Det}(Z)$$

$$W(\tilde{\omega}) = y_1(\tilde{\omega}) y_2'(\tilde{\omega}) - y_1'(\tilde{\omega}) y_2(\tilde{\omega}) = (a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}) \cdot (y_1(0) y_2'(0) - y_2(0) y_1'(0)) = W(0)$$

Da  $W(\tilde{\omega}) = W(0)$  unabhängig von  $x$  ist, muss  $a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} = 1$  sein.

$$\Rightarrow p_{1,2} = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_{11} + a_{22}}{2}\right)^2 - 1} = A \pm \sqrt{A^2 - 1}$$

$$\text{Wegen } p^2 - (a_{11} + a_{22})p + 1 = 0 \Rightarrow p_1 + p_2 = a_{11} + a_{22} = 2A = p_1 + \frac{1}{p_2}$$

$$p_1 \cdot p_2 = 1 \Rightarrow p_1 = \frac{1}{p_2}$$



Fallunterscheidung:

a)  $\rho > 0$ :

1)  $|A| > 1 \Rightarrow \rho_1 \neq \rho_2$  reell:  $\ln \rho_1 > 0, \ln \rho_2 = \ln(\frac{1}{\rho_1}) = -\ln(\rho_1) < 0$

$$\eta_1 = e^{\frac{\ln \rho_1}{\omega} x} \varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty, \eta_2 = e^{-\frac{\ln \rho_1}{\omega} x} \varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

$\varphi$ -Periode:  $\omega$  instabil

2)  $A = 1$ :  $\rho = \rho_1 = \rho_2 = 1, \ln \rho = \ln 1 = 0$ :  $\eta_1 = e^{0x} \cdot \varphi(x) = \varphi(x)$

$\eta_1(x)$  ist periodische Lösung mit  $\tilde{\omega}$ !  $\eta_1(x + \tilde{\omega}) = \varphi(x + \tilde{\omega}) = \varphi(x) = \eta_1(x)$

Zweite Lösung ist  $\eta_2(x) = \frac{Cx}{\omega} \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$  instabil, da  $A_2 = 0$ .

3)  $A = -1$ :  $\rho = \rho_1 = \rho_2 = -1: \ln \rho = \ln(-1) = j\pi$

$$\eta_1(x) = e^{\frac{j\pi}{\omega} x} \varphi_1(x) = \left[ \cos\left(\frac{\pi x}{\omega}\right) + j \sin\left(\frac{\pi x}{\omega}\right) \right] \cdot \varphi_1(x)$$

$e^{\ln(-1)} = -1 = e^{j\pi}$   
 $\tilde{\omega}$ -periodisch  
 Periodisch mit  $x \rightarrow x + 2\tilde{\omega}$ : stabil - frequenz periodisch!  
 (Periode doppelt so lang)

$\eta_2 = e^{\frac{j\pi}{\omega} x} \left( \frac{C}{\omega} \varphi_1(x) + \varphi_2(x) \right)$ : nicht periodisch, instabil für  $C \neq 0$

4)  $A = 0$ :  $\rho_1 = j, \rho_2 = -j$ :  $e^{\frac{j\pi}{2\omega} x} = e^{\frac{\ln j}{\omega} x} = e^{\frac{j\pi}{2\omega} x}$  ( $j = e^{j\pi/2} = e^{j\pi/2}$ ):  $\ln j = j\frac{\pi}{2}$

$$\eta_1(x) = e^{j\frac{\pi}{2\omega} x} \cdot \varphi(x) \quad \eta_2(x) = e^{-j\frac{\pi}{2\omega} x} \cdot \varphi(x)$$

$\cos\left(\frac{\pi x}{2\omega}\right) + j \sin\left(\frac{\pi x}{2\omega}\right)$  ( $4\tilde{\omega}$ -periodisch): instabil! (Hochfrequenz)

5)  $|A| < 1$ :  $\rho_{1,2} = A \pm j\sqrt{1-A^2}$   $e^{\alpha x} = e^{\frac{\ln(A \pm j\sqrt{1-A^2})}{\omega} x} = e^{\frac{\ln|A| + j\beta}{\omega} x} = e^{\frac{\ln|A|}{\omega} x} \cdot e^{j\frac{\beta}{\omega} x}$

Für  $\rho_{1,2} = 0$ : stabile Lösungen:  $\left( \cos\left(\frac{\beta_0 x}{\omega}\right) + j \sin\left(\frac{\beta_0 x}{\omega}\right) \right) \varphi_1(x)$

$\beta_0 \neq \omega$ : Frequenzperiode  $\neq \tilde{\omega}, 2\tilde{\omega}$ !

b)  $\rho < 0$ :

$$-\rho = e^{\ln(-\rho)} = -e^{\ln \rho} = e^{jk\pi} e^{\ln \rho}$$

$\ln(-\rho) = \ln \rho + jk\pi$ ,  $k$  ungerade ganz

$$\eta(x) = e^{(\ln \rho / \omega)x} \cdot e^{j\pi x / \omega} \cdot \varphi(x)$$

$$e^{j\pi x / \omega} = \cos(\pi x / \omega) + j \sin(\pi x / \omega)$$

Periode:  $2\omega$



HILL'sche Differentialgleichung: Sonderfall von  $g(x) = \lambda + \Phi(x)$

Einfluss des Parameters  $\lambda$  auf  $\rho$ , denn:  $A = A(\lambda)$   $\Phi(x + \tilde{\omega}) = \Phi(x)$

$$\rho_{1,2} = A \pm \sqrt{A^2 - 1} = A \pm \sqrt{(A-1)(A+1)} \quad F_0(\lambda) \stackrel{!}{=} A-1, \quad F_1(\lambda) \stackrel{!}{=} A+1 \Rightarrow \bar{\Gamma}_1 = F_0 + 2$$

Fallunterscheidung: 1)  $F_0 = 0, F_1 = 2$ :  $F_0 = A-1 = 0 \Rightarrow A = 1 \Rightarrow \rho_1 = \rho_2 = 1$

$\tilde{\omega}$ -periodische Lösung

Aus  $F_0(\lambda) = 0$  ergibt sich  $\lambda = \alpha_0, \alpha_2, \alpha_4, \dots$  abhängig von  $\lambda$  und  $\Phi(x)$ .

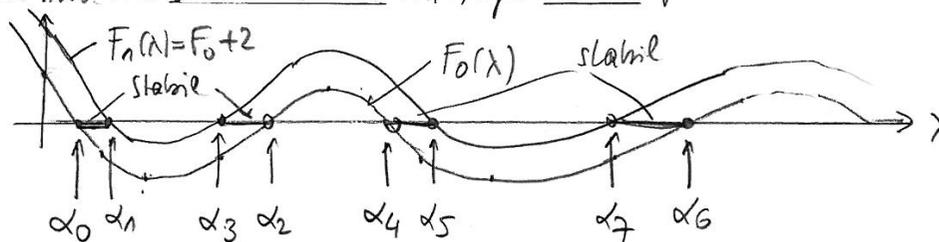
2)  $F_1 = 0, F_0 = -2$ :  $F_1 = A+1 = 0 \Rightarrow A = -1$ ;  $\rho_1 = \rho_2 = -1$   
 $2\tilde{\omega}$ -periodische Lösung (= halb-periodisch)

Aus  $F_1(\lambda) = 0$  folgt  $\lambda = \alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \dots$

3) Falls  $\lambda < 0$  und  $|\lambda|$  hinreichend groß:  $g(x) = \lambda + \Phi(x) < 0, |\lambda| \gg |\Phi|$   
 $y'' + (\lambda + \Phi(x))y = 0 \Rightarrow y'' + \lambda y = 0 \Rightarrow y \sim e^{\frac{|\lambda|x}{-1}} + e^{-\frac{|\lambda|x}{-1}}$  instabil!  
beschränkt, periodisch mit  $\tilde{\omega}$

Dies entspricht dem Fall  $|A| > 1$ ! also  $F_0(\lambda) > 0, F_1(\lambda) > 0, \lambda < 0$

Also sind die stabilen Fälle 1), 2) für  $\lambda > 0$  zu finden!



$$\alpha_0 < \alpha_1 \leq \alpha_3 < \alpha_2 \leq \alpha_4 < \alpha_5 \leq \alpha_7 \dots$$

stabil stabil stabil ... entspricht Fall  $|A| < 1$ !

## MATHIEU'sche Differentialgleichung



Bei  $\alpha_0$  beginnt stabiler Bereich mit  $\tilde{\omega}$ -periodischer Lösung, im nächsten Bereich ändert sich die Frequenz ( $\neq \tilde{\omega}$ ) der stabilen Lösung und ist bei  $\alpha_1$   $2\tilde{\omega}$ -periodisch, also halb frequenz: dann folgt aufblühende (also instabile) schwingende Lösung, bis zum nächsten stabilen Bereich  $\alpha_2$  mit  $2\tilde{\omega}$ -periodischer Lösung. Im stabilen Bereich steigt die Frequenz, ist bei  $\alpha_2$   $\tilde{\omega}$ -periodisch, wird dann wieder instabil usw.

Spezialfall:  $\Phi(x) = -2h^2 \cos 2x$  MATHIEU'sche Differentialgleichung

$$y''(x) + (\lambda - 2h^2 \cos 2x) \cdot y(x) = 0$$

Stabile Bereiche für  $\lambda > 0$ , bei  $\lambda < 0$  stets instabil!

Für  $\lambda > 0$  wieder stabile und instabile Bereiche, wobei die

$\alpha_i = \alpha_i(\lambda, h^2) = \alpha_i(\lambda, -h^2)$ . Für  $h^2 = 0$ :  $y'' + \lambda y = 0$  mit

$$y_1 = \sin \sqrt{\lambda} x, y_2 = \cos \sqrt{\lambda} x, \lambda > 0$$



• Die Werte  $\sqrt{\lambda}$  ergeben für  $(\lambda - 2h^2 \cos 2x)$ ,  $h^2=0$ :

$\lambda = 0, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots$ , also  $\sqrt{\lambda} = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$

bei  $h^2=0$  die Schwinggruppen  $\sin 0x=0, \sin x, \sin 2x, \sin 3x, \sin 4x, \dots$  und  $\cos 0x=1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \cos 4x, \dots$

stets stabil  $\rightarrow$

dazwischen konstant, jedoch die Frequenzen  $\frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi}$ .

a) gemäß  $A=1, p_1=p_2=1, p=e^{\pm j\omega} = e^{\pm j2\pi m} = 1, m=0,1,2,3, \dots$

$\eta_1(x) = e^{\frac{e^{j\omega x}}{\omega}} \cdot \varphi(x) = e^{\pm j \frac{2\pi m}{\omega} x} \varphi(x) = (\cos \frac{2\pi m x}{\omega} + j \sin \frac{2\pi m x}{\omega}) \varphi(x)$

$\cos(2x) = \cos(2(x+\pi)) = \cos(2(x+2\pi)) = \cos 2x, \tilde{\omega} = \pi$   
 $\cos(2x) = \Phi(x), \Phi(x+\tilde{\omega}) = \Phi(x)$   
 $\eta_1(x) = (\cos 2mx + j \sin 2mx) \varphi(x)$

„ganz periodisch“  
Perioden  $m=1, 2, 3, \dots$   
 $\tilde{\omega} = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \dots$

b) gemäß  $A=-1, p_1=p_2=1; p=e^{\pm j2\pi(\frac{2n+1}{2})}, n=0,1,2,3, \dots$

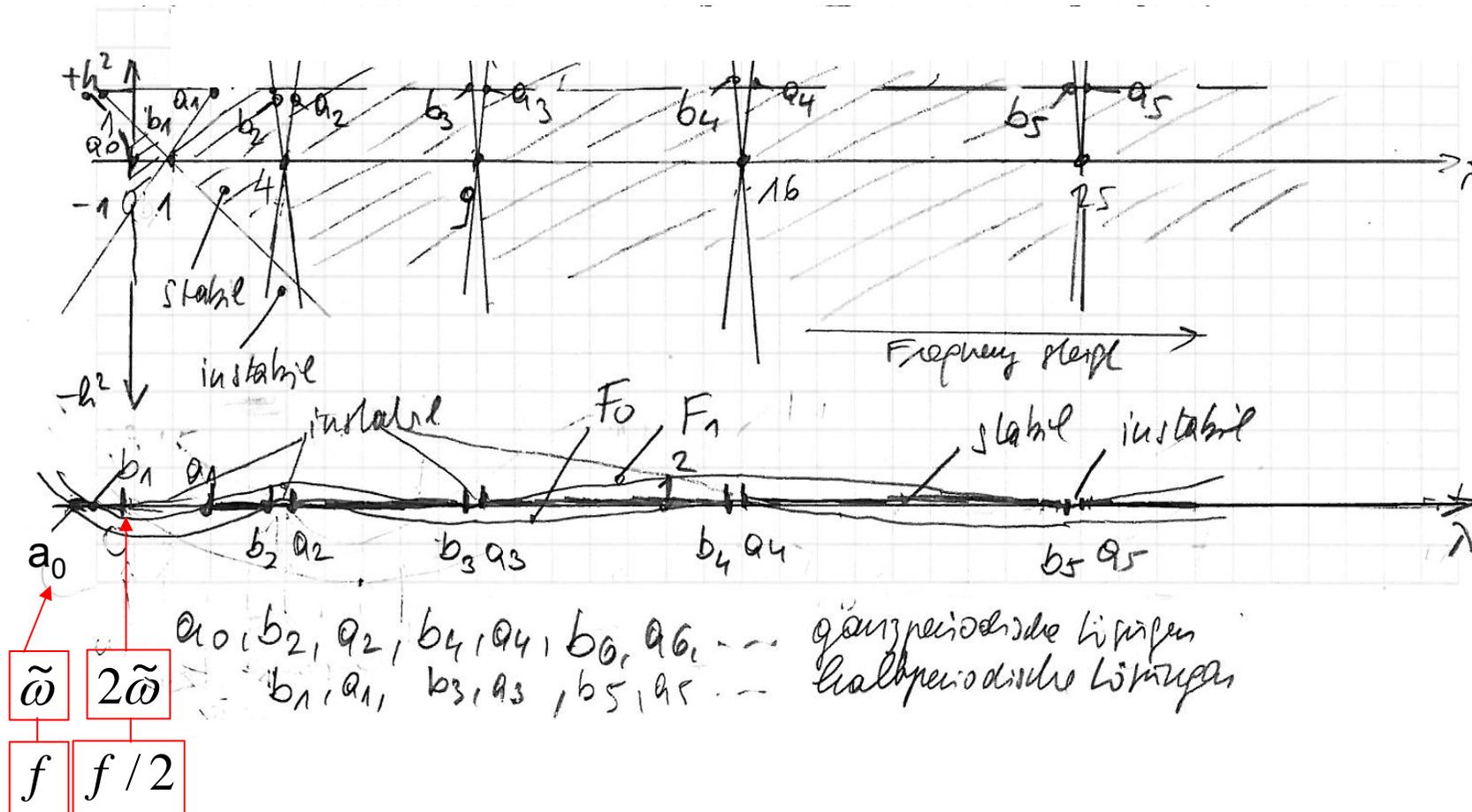
$\eta_1(x) = e^{\frac{e^{j\omega x}}{\omega}} \cdot \varphi(x) = e^{\pm j \frac{\pi(2n+1)}{\omega} x} \cdot \varphi(x) = [\cos(2n+1)x + j \sin(2n+1)x] \varphi(x)$

( $\tilde{\omega} = \pi$ )  
Perioden  $n=0, 1, 2, 3, \dots$   
„halbperiodisch“ (= halbfrequenz)  
 $\tilde{\omega} = \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{7}, \dots$

a)  $m=0 \cos 0x, m=1 \cos 2x, m=2 \cos 4x, \dots \xrightarrow{h^2=0} \cos \sqrt{\lambda} x \rightarrow \lambda = 0, 2^2, 4^2, \dots (2m)^2, m=0,1,2, \dots$

b)  $n=0 \cos x, n=1 \cos 3x, n=2 \cos 5x, \dots \xrightarrow{h^2=0} \cos \sqrt{\lambda} x \rightarrow \lambda = 1^2, 3^2, 5^2, \dots (2n+1)^2, n=0,1,2, \dots$







Überblick der Lösungen der Mathieu-Gleichung: mit  $d\tilde{\omega} = 2\pi\mu$ ,  $\tilde{\omega} = \pi$

FLOODET:  $\eta(x+\pi) = \underbrace{e^{2\pi\mu}}_S \cdot \eta(x)$ ;  $S_1 + S_2 = 2A = S_1 + \frac{1}{S_1} F$  ( $\alpha = 2\mu$ )  
 $L = e^{2\pi\mu} + e^{-2\pi\mu} = 2 \operatorname{ch} 2\mu\pi$   
 $\boxed{\operatorname{ch} 2\pi\mu = A}$

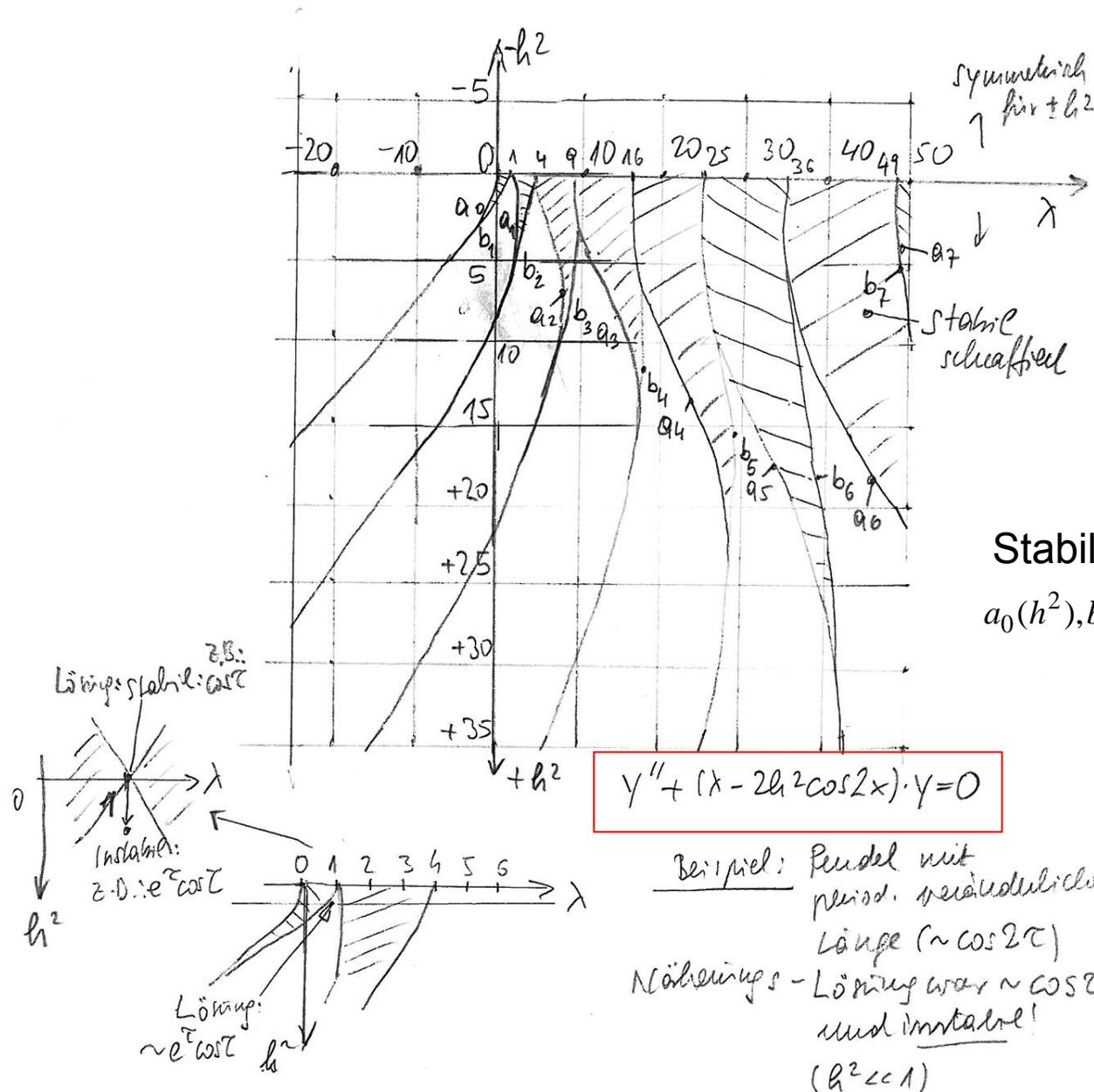
Bedingung	Allg. Lösung $y(x)$	Periode von $\varphi_1, \varphi_2$	Exponent
$\operatorname{ch} 2\pi\mu = A > 1$	$C_1 e^{2\mu x} \varphi_1(x) + C_2 e^{-2\mu x} \varphi_2(x)$	$\pi$	$\mu$ reelle Pol: Lösung instabil
$\operatorname{ch} 2\pi\mu = A < -1$	$C_1 e^{\tilde{\sigma}x} \varphi_1(x) + C_2 e^{-\tilde{\sigma}x} \varphi_2(x)$	$2\pi$	$\mu = \tilde{\sigma} + \frac{1}{2}ji$ , $j = \sqrt{-1}$ , $\tilde{\sigma} = \operatorname{Re}(\mu)$ : —
$ A  = \operatorname{ch} 2\pi\mu < 1$	$(C_1 \cos \nu x + C_2 \sin \nu x) \cdot \varphi_1(x) + (C_1 \cos \nu x - C_2 \sin \nu x) \cdot \varphi_2(x)$	$\pi$	$\mu = j\nu$ , $\cos(2\pi\nu) = A$ : Lösung stabil
$\operatorname{ch} 2\pi\mu = A = \pm 1$	$C_1 \varphi_1(x) + C_2 \cdot x \cdot \varphi_2(x)$	$\pi$	$\mu = 0$ : Lösung instabil



## Stabilitätskarte der MATHIEU'schen Differentialgleichung

Stabilitätsgrenzkurven:

$$a_0(h^2), b_1(h^2), a_1(h^2), b_2(h^2), a_2(h^2), \dots$$



# MATHIEU'sche Differentialgleichung für numerische Integration

...  
Numerische Lösung mit Runge-Kutta:

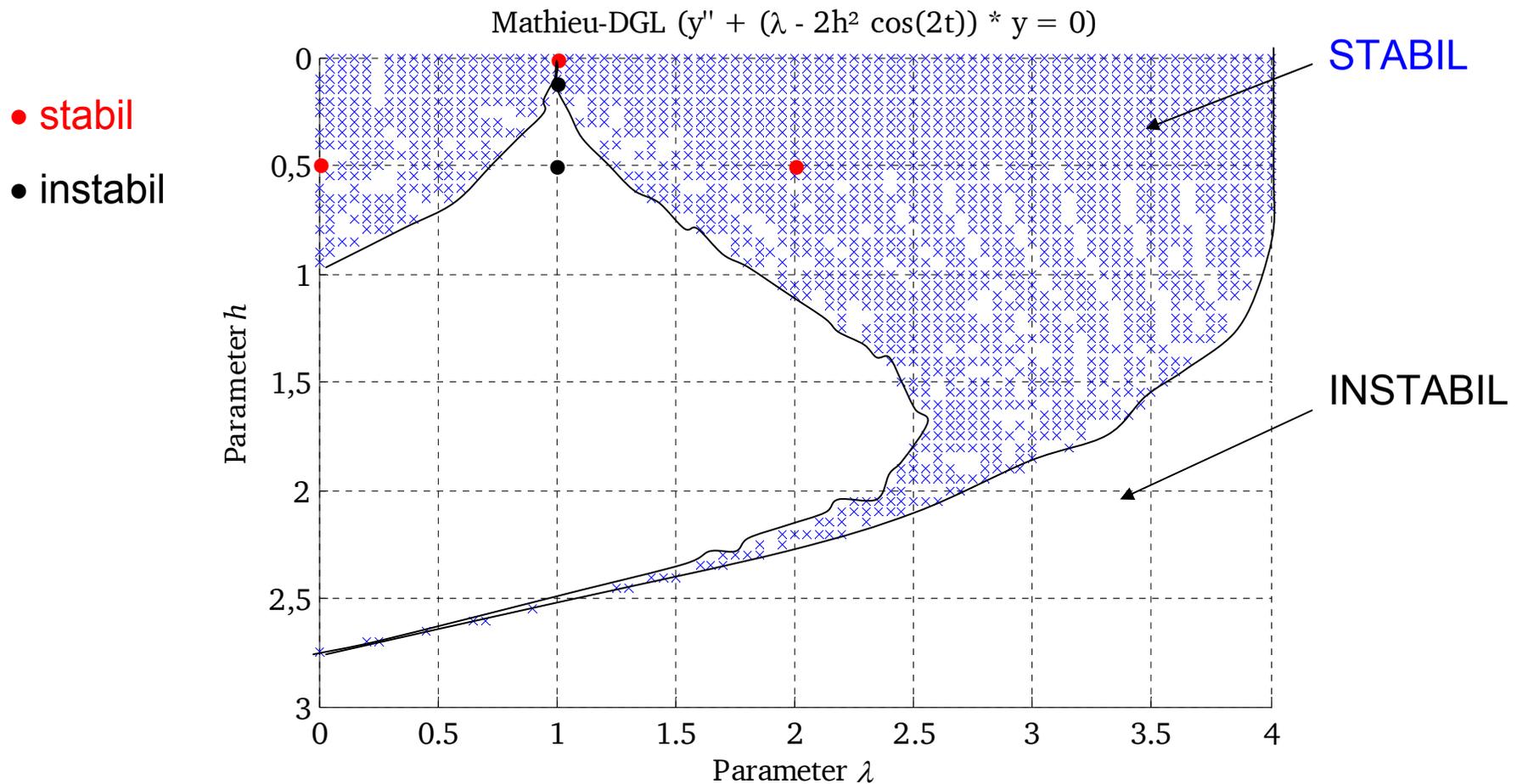
Zwei DGL. 1. Ordnung:  $y'(x) = v(x)$

$$v'(x) = -(\lambda - 2h^2 \cos 2x) y$$

z. B.: Anfangsbedingung:  $y(0) = 1, y'(0) = 0 \Rightarrow \underline{v(0) = 0}, \underline{v'(0) = -(\lambda - 2h^2)y(0)}$

# Mathieu-Differentialgleichung

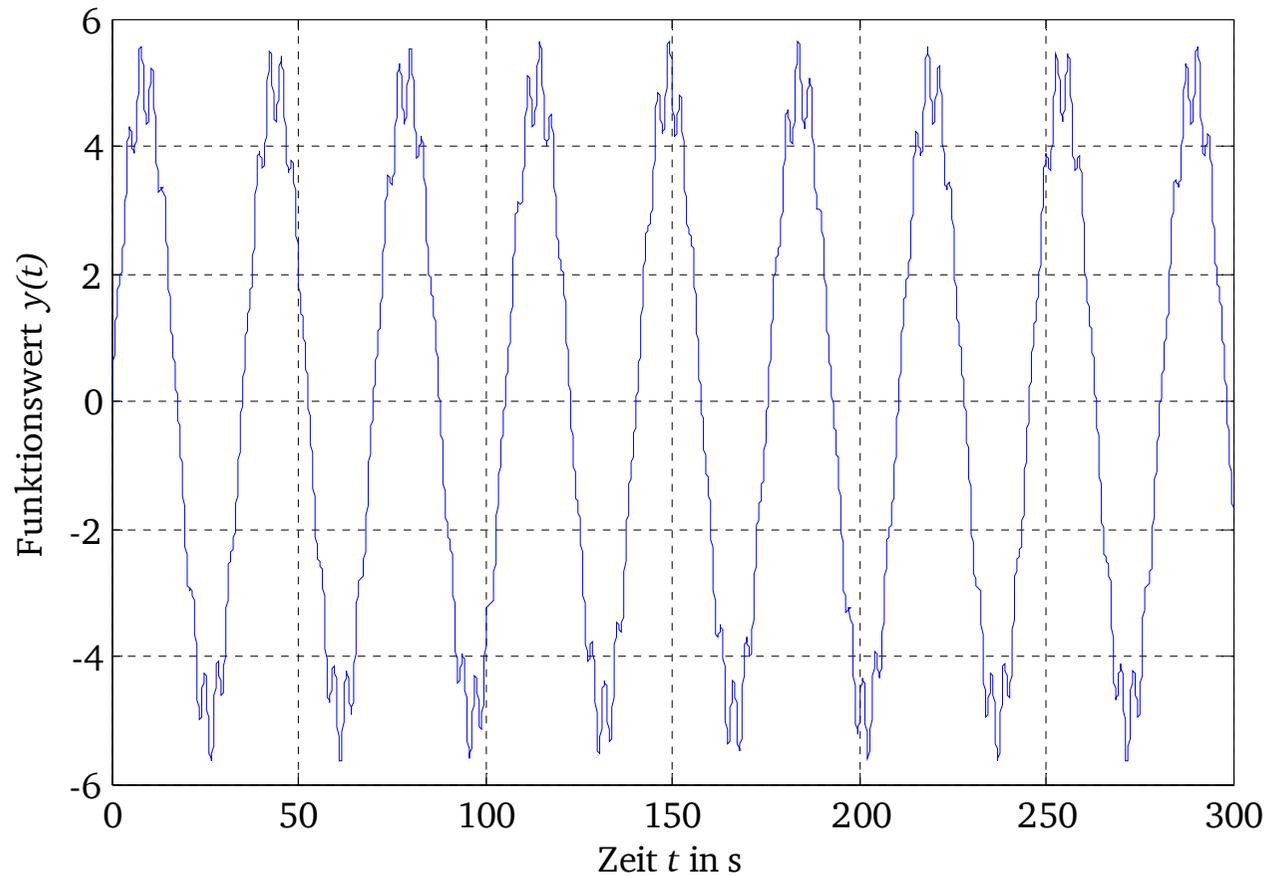
## Stabilitätskarte numerisch ermittelt



- Numerische Beispiele auf Folgefolien (Rechnung: M. Lehr)

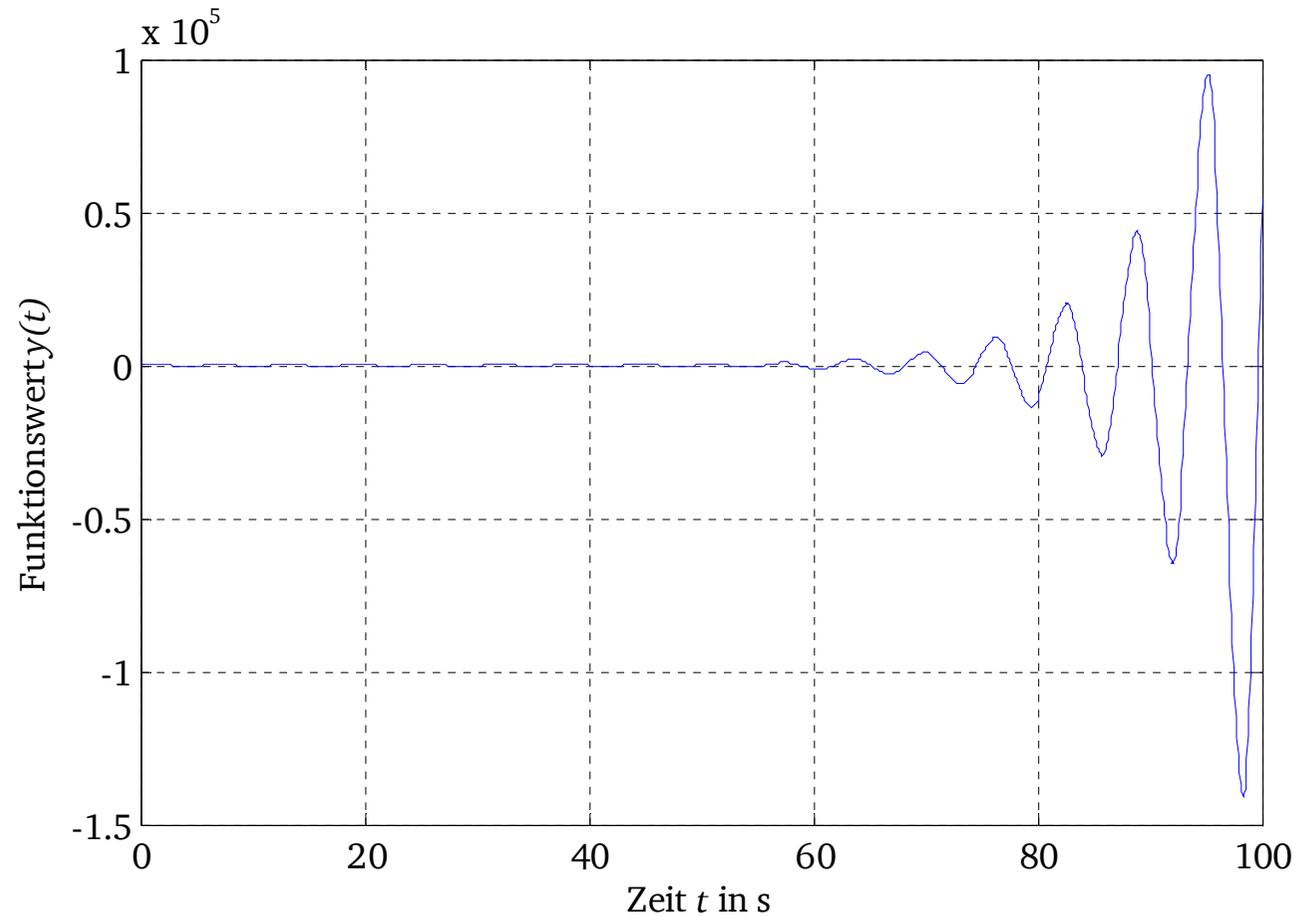
# Mathieu-Differentialgleichung numerisch gelöst

**Bsp.: stabile Lösung:  $h = 0.5, \lambda = 0$**



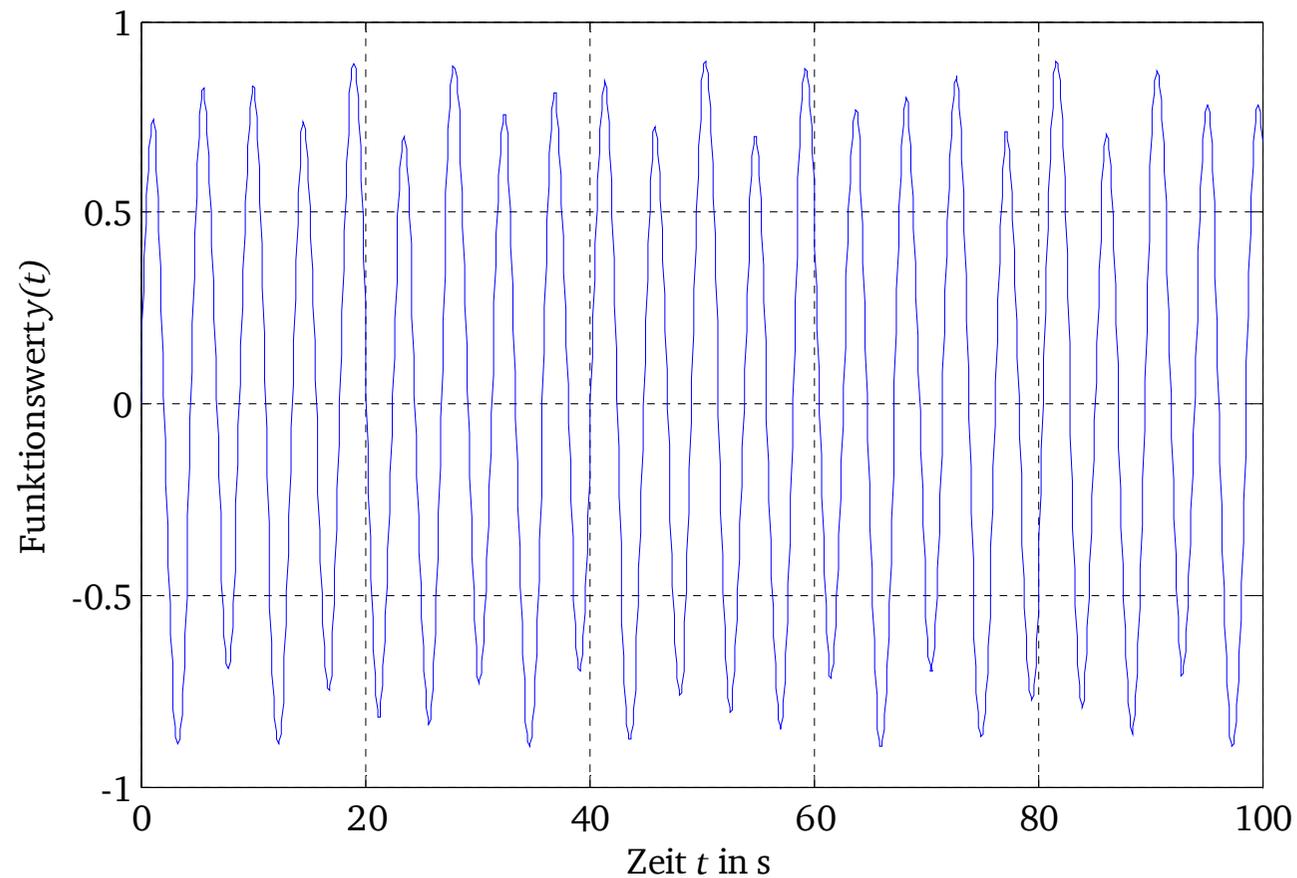
# Mathieu-Differentialgleichung numerisch gelöst

**Bsp.: instabile Lösung:  $h = 0.5, \lambda = 1$**



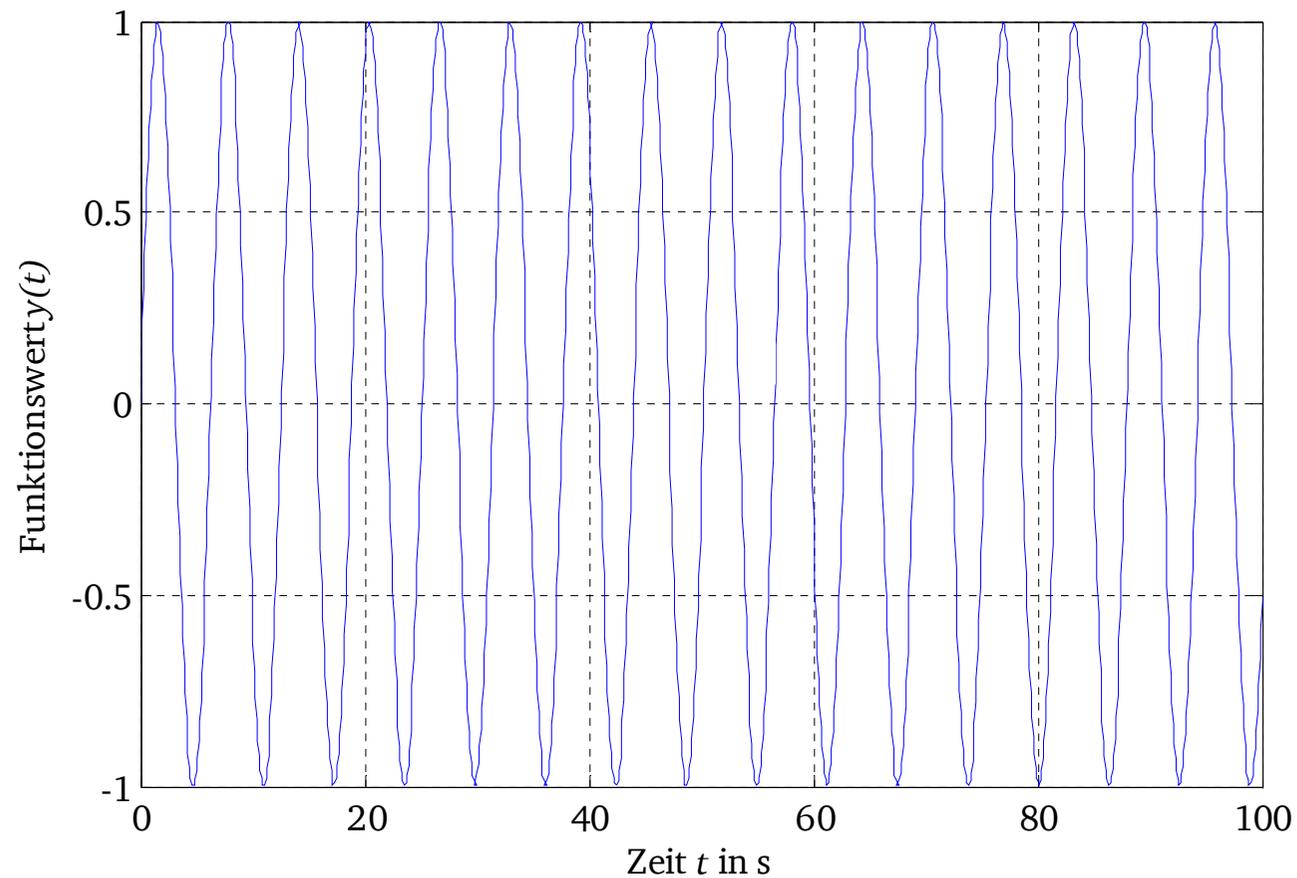
# Mathieu-Differentialgleichung numerisch gelöst

**Bsp.: stabile Lösung:  $h = 0.5, \lambda = 2$**



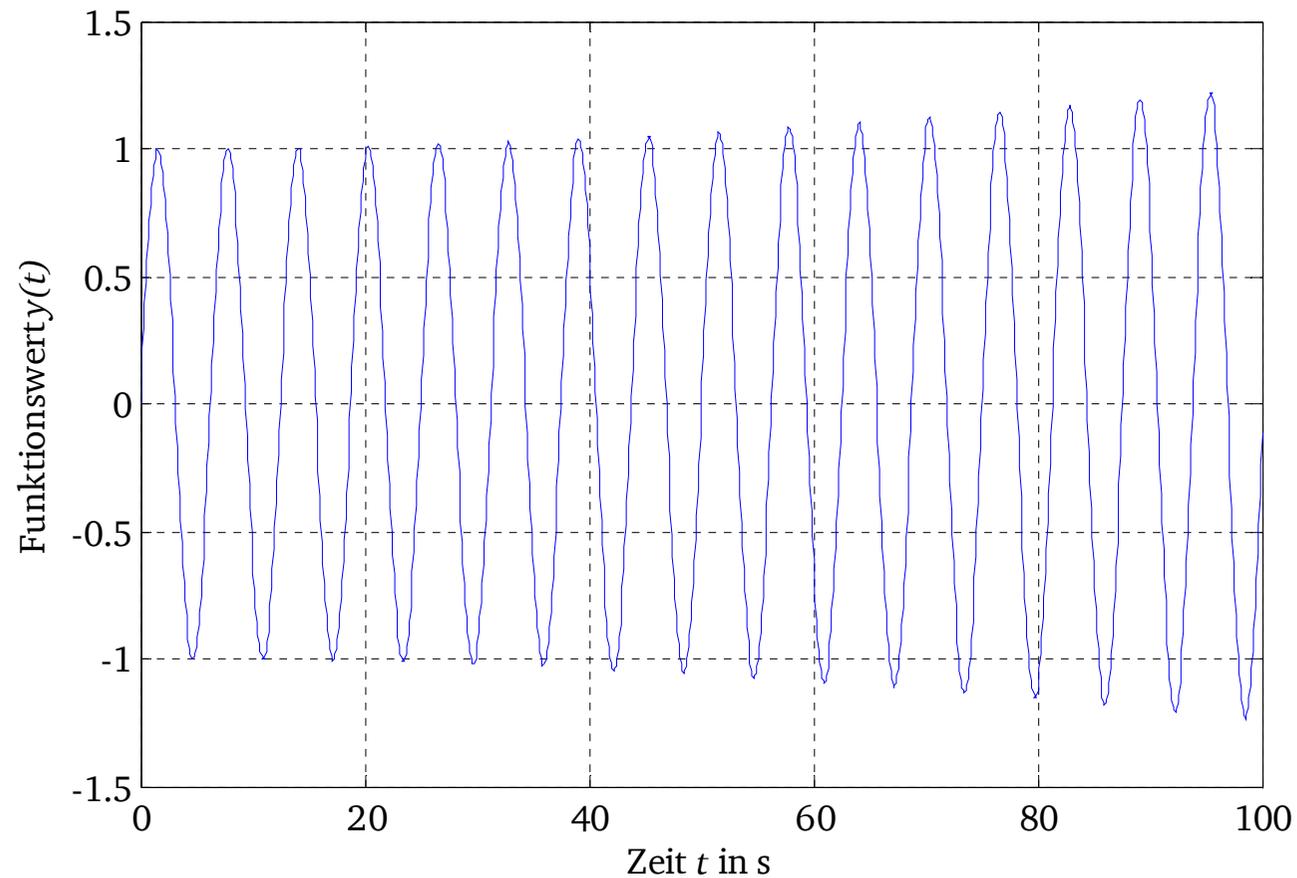
# Mathieu-Differentialgleichung numerisch gelöst

**Bsp.: stabile Lösung:  $h = 0, \lambda = 1$**



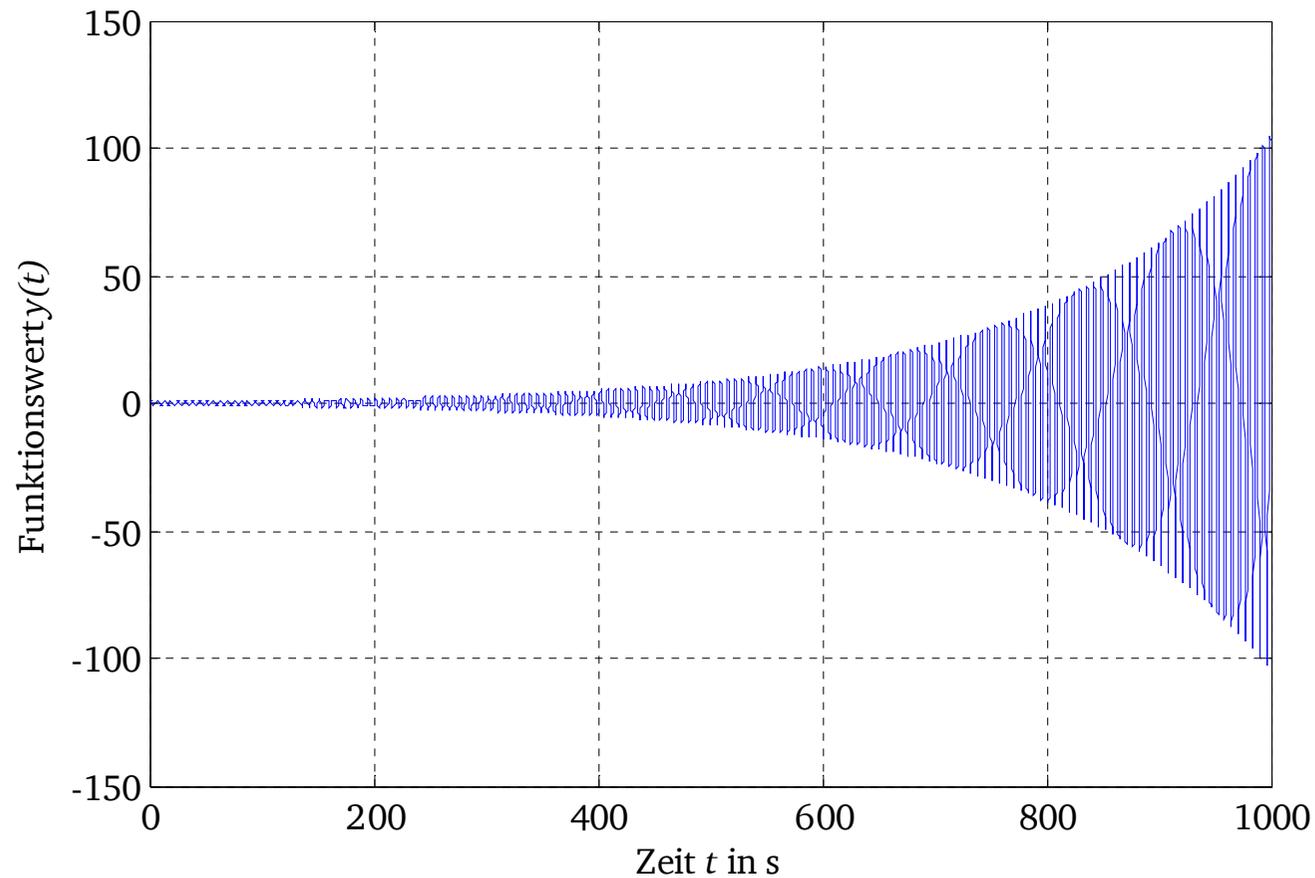
# Mathieu-Differentialgleichung numerisch gelöst

**Bsp.:** instabile Lösung:  $h = 0.1, \lambda = 1$



# Mathieu-Differentialgleichung numerisch gelöst

**Bsp.:** instabile Lösung:  $h = 0.1, \lambda = 1$



Stabile, also periodische Lösungen der MATHIEU'schen Differentialgleichung an den Stabilitätsgrenzen heißen MATHIEU'sche Funktionen  $ce_n(x, q)$  (gerade),  $se_n(x, q)$  (ungerade)



$$\lambda = a \quad h^2 = q \quad y''(x) + (a - 2q \cdot \cos(2x)) \cdot y(x) = 0$$

Stabile Lösungen der Mathieu-Gleichung! heißen  $ce_n(x|q), se_n(x|q)$

gerade Funktionen ( $f(x) = f(-x)$ ) Näherung für  $q \ll 1$

$$ce_0(x|q) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{q}{2} \cos 2x \right), \quad a_0(q) = -\frac{q^2}{2} + \frac{7q^4}{128}$$

$$ce_1(x|q) = \cos x - \frac{q}{8} \cos 3x, \quad a_1(q) = 1 + q$$

$$ce_2(x|q) = \cos 2x + \frac{q}{4} \left( 1 - \frac{\cos 4x}{3} \right), \quad a_2(q) = 4 + \frac{5q^2}{12}$$

$$ce_n(x|q) = \cos nx + \frac{q}{4} \left[ \frac{\cos(n+2)x}{n+1} - \frac{\cos(n-2)x}{n-1} \right]$$

$$a_n(q) = n^2 + \frac{q^2}{2(n^2-1)} \quad n \geq 3$$

ungerade Funktionen ( $f(x) = -f(-x)$ )

\* stabile Lösungen auf den Grenzlinien  $a_n(q), b_n(q), n=0,1,2,\dots$

$$se_1(x|q) = \sin x - \frac{q}{8} \sin 3x, \quad b_1(q) = 1 - q$$

$$se_2(x|q) = \sin 2x - \frac{q}{12} \sin 4x, \quad b_2(q) = 4 - \frac{q^2}{12}$$

$$se_n(x|q) = \sin nx - \frac{q}{4} \left[ \frac{\sin(n+2)x}{n+1} - \frac{\sin(n-2)x}{n-1} \right]$$

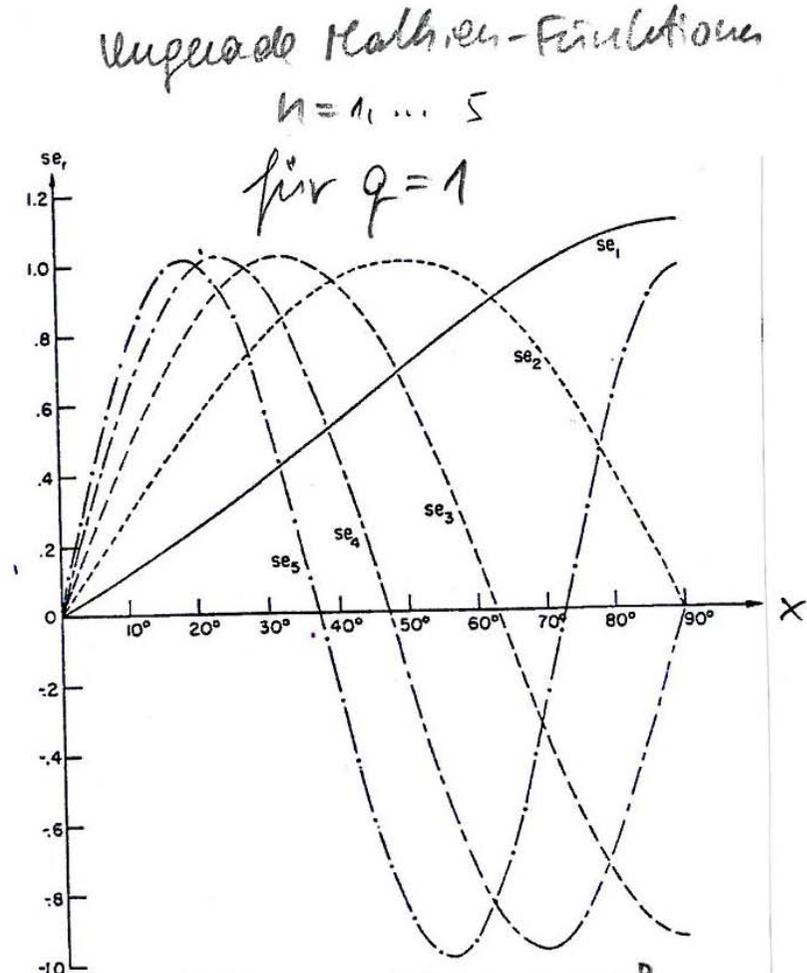
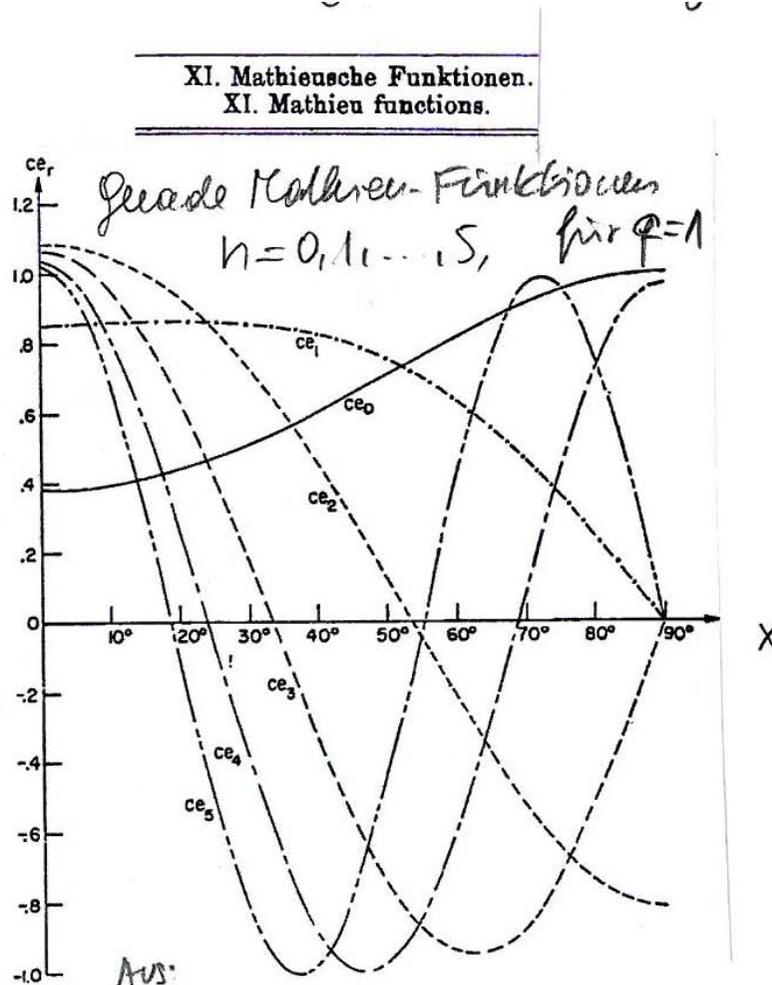
$$b_n(q) = n^2 + \frac{q^2}{2(n^2-1)} = a_n(q)$$

Dabei sind die Konstanten  $C_1, C_2$  willkürlich so

$$\text{bestimmt, dass } \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} ce_0^2 dx = 1, \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} ce_m^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} se_m^2 dx = \frac{1}{2}, \quad m \geq 1$$



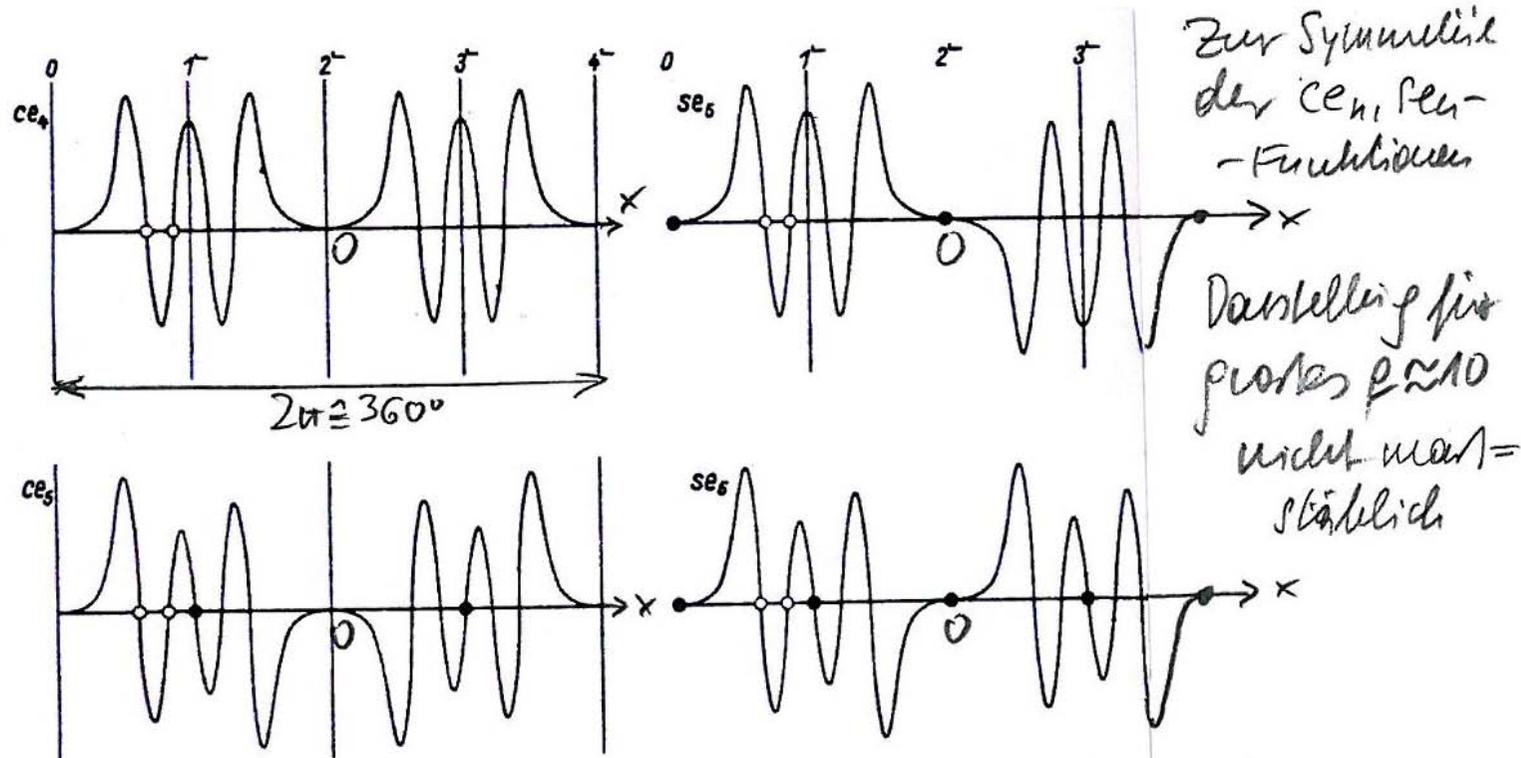
# MATHIEU'sche Funktionen $ce_n(x, q)$ (gerade), $se_n(x, q)$ (ungerade)



*Aus: Abramowitz-Stegun: Handbook of Mathem. Functions, Dover Publ., 1972;  $-180^\circ \leq x \leq 180^\circ$*

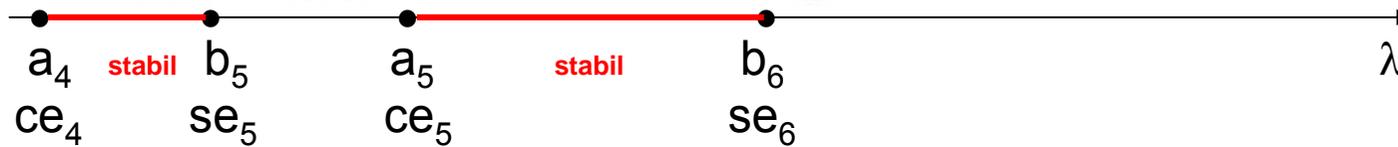


# Typische Periodizität der MATHIEU'sche Funktionen $ce_n(x, q)$ (gerade), $se_n(x, q)$ (ungerade)



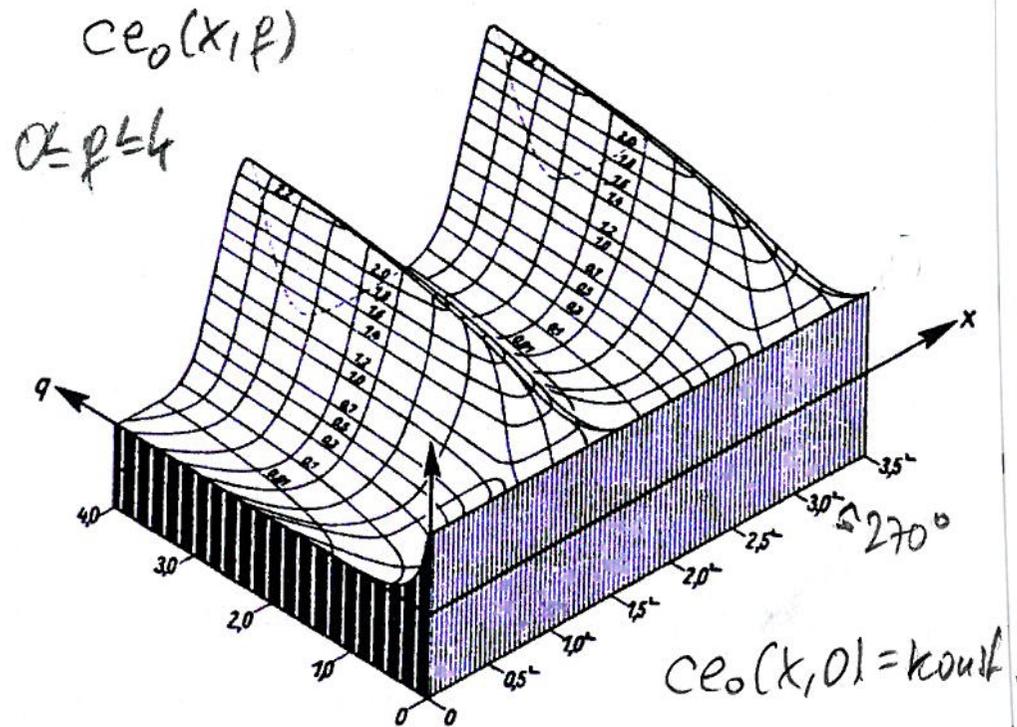
Zur Symmetrie  
der  $ce_n, se_n$ -  
Funktionen  
Darstellung für  
großes  $q \approx 10$   
nicht mehr =  
stabil

aus: JAHNKE-EMDE: Tables of Functions, Dover Publ., 1945



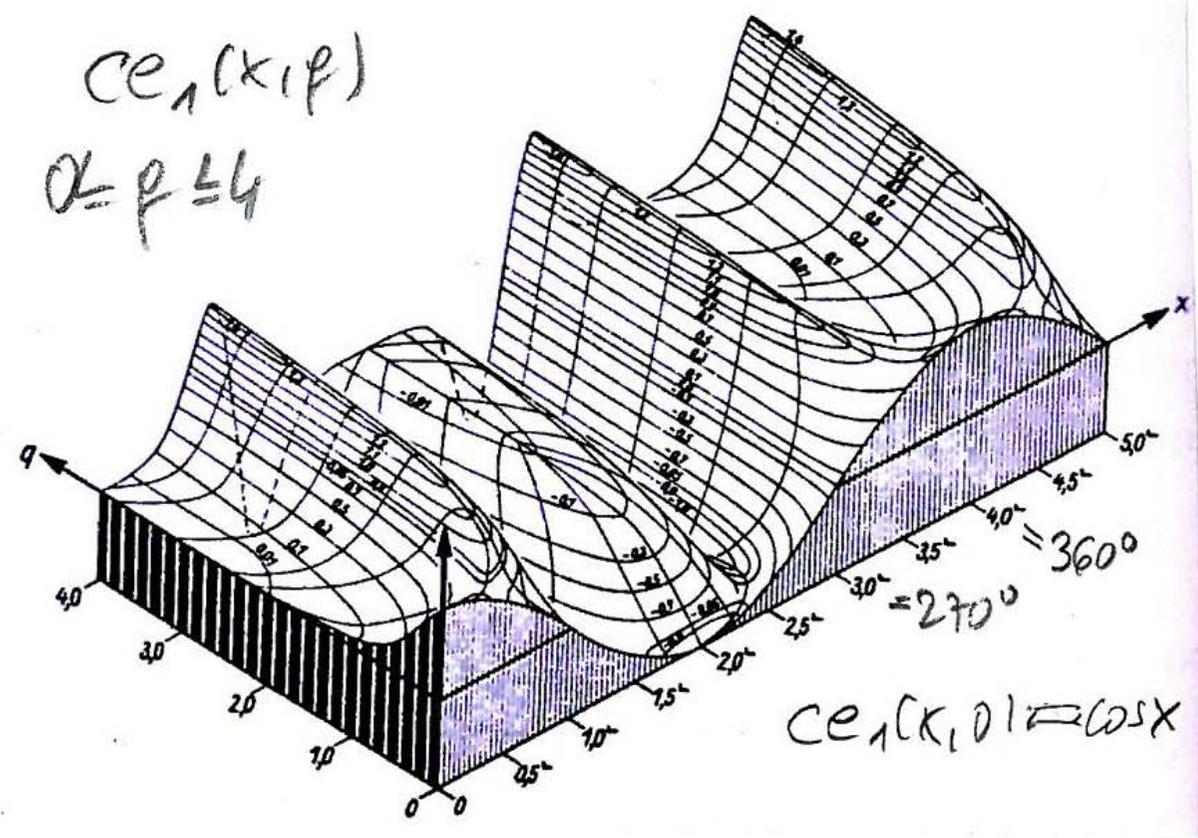
# Abhängigkeit der MATHIEU'schen Funktion $ce_0(x, q)$

Abhängigkeit der Mathieu Funktionen von  $x$  und  $q$

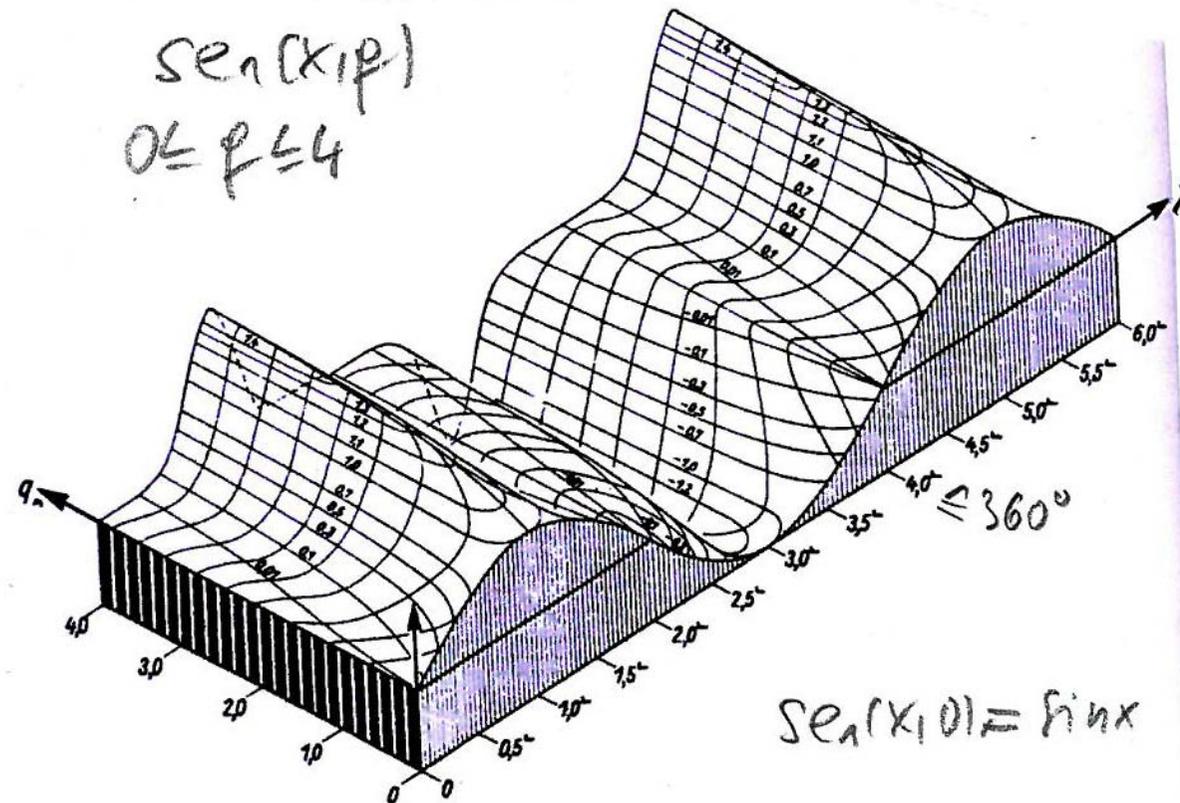


aus:  
JAHNKE - EMDE  
Tables of Functions,  
Dover Publ., 1945

# Abhängigkeit der MATHIEU'schen Funktion $ce_1(x, q)$



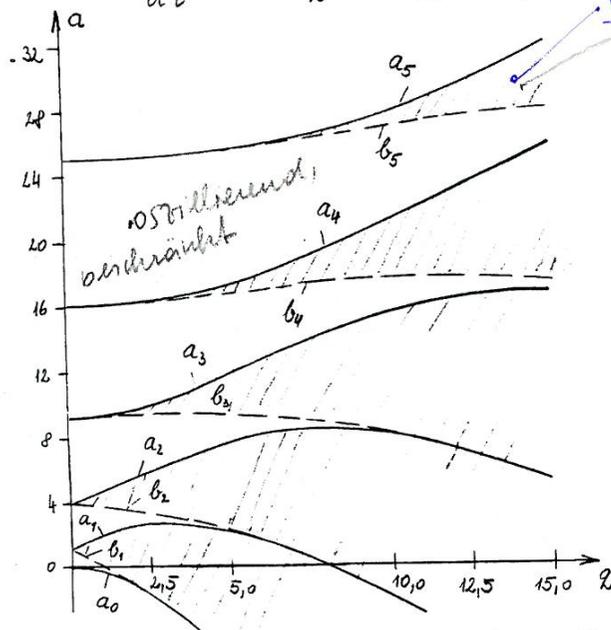
# Abhängigkeit der MATHIEU'schen Funktion $se_1(x, q)$



$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + (a - 2q \cos 2\tau) y = (\Omega_m/\omega)^2 y_0, \quad (3)$$

Für die Untersuchung der Stabilität und für die Konstruktion einer allgemeinen Lösung von (3) ist der homogene Teil

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + (a - 2q \cos 2\tau) y = 0, \quad \text{schiefal: instabil (nicht beschr.)} \quad (5)$$



die Mathieu'sche Differentialgleichung, heranzuziehen. Lösungen lassen sich in der Form

$$y = A F_\nu(\tau) + B F_\nu(-\tau) \quad (6)$$

über

$$F_\nu(\tau) = e^{i\nu\tau} P(\tau)$$

mit einer periodischen Funktion  $P(\cdot)$  der Periode  $\pi$  darstellen. Ihr Charakter hängt von den Parametern  $a$  und  $q$  ab. Die Wertepaare  $(a, q)$  bestimmen den charakteristischen

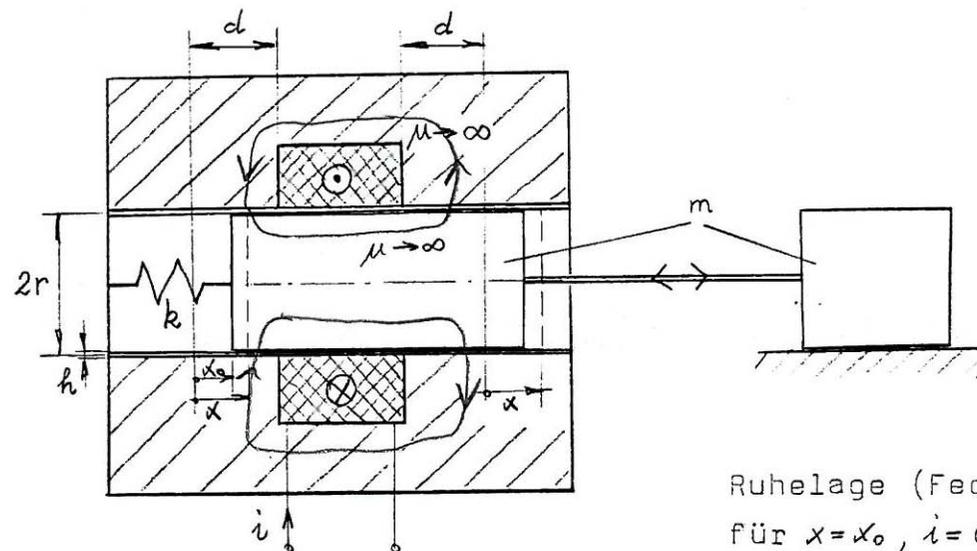
Exponenten  $\nu$ . Liegen sie auf den Kurven  $a_r(q)$  oder  $b_r(q)$ , so sind die  $\nu$  ganze Zahlen ( $\nu = r$  für  $a_r(q)$ ,  $\nu = -r$  für  $b_r(q)$ );  $F_\nu(\tau)$  und  $F_\nu(-\tau)$  sind dann nicht linear unabhängig. Liegen sie nicht auf den Kurven, so ist (6) die allgemeine Lösung von (5). Für  $\nu = m_1/m_2 =$  eigentlicher Bruch ist jede Lösung periodisch mit einer Periode von höchstens  $2\pi m_2$ . Im allgemeinen ist die Lösung nicht periodisch.

$$y = AF_\gamma(\tau) + BF_\gamma(-\tau)$$

$$F_\gamma(\tau) = e^{i\gamma\tau} P(\tau)$$

$\gamma$  ist reell, wenn für  $q \gg 0$  das Paar  $(a, q)$  in einem Bereich zwischen  $a_r(q)$  und  $b_{r+1}(q)$  liegt. Alle Lösungen sind dann beschränkt und oszillierend. Im Bereich zwischen  $b_r(q)$  und  $a_r(q)$  sind die  $\gamma$  komplex, die allgemeinen Lösungen (6) sind nicht beschränkt.

## Schwingantrieb



Ruhelage (Feder entspannt)  
für  $x = x_0$ ,  $i = 0$ .

Speisung mit Wechselstrom  $i = I\sqrt{2} \overset{\text{sin}}{\cos} \omega t$ :

$$m\ddot{x} + [k + k_e(1 - \cos 2\omega t)]x = kx_0$$

$$y = x/d, \quad \tau = \omega t$$

Standardform

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + (\alpha - 2q \cos 2\tau)y = (\Omega_m/\omega)^2 y_0$$

# Schwingsystem:

Sonderfälle: a)  $i=0$ :  $m\ddot{x} + kx = 0$ ,  $x = \hat{x} \cdot \cos \Omega_m t$ ,  $\Omega_m = \sqrt{\frac{k}{m}}$ : mech. Eigenkreisfrequenz  
 homogene DGL., Lösung z.B. 1

b)  $k \rightarrow 0$ : sehr weiche Feder:  $k \ll L_0 \frac{i^2}{d^2}$   
 $i = \text{konst.}$   $m\ddot{x} + L_0 \frac{i^2}{d^2} x = 0$ :  $x = \hat{x} \cos \Omega_e t$ ,  $\Omega_e = \sqrt{\frac{L_0 i^2}{m d^2}}$ : el. mech. Eigenfrequenz

c)  $i = I = \text{konst.}$ ,  $k > 0$ :  $m\ddot{x} + (k + L_0 \frac{I^2}{d^2}) x = 0$ :  $\Omega = \sqrt{(k + L_0 \frac{I^2}{d^2}) / m}$   
 $x = \hat{x} \cos \Omega t$   $\Omega^2 = \Omega_m^2 + \Omega_e^2$   
 $k + L_0 \frac{I^2}{d^2} = k_{\text{eff}}$ : effektive Steifigkeit

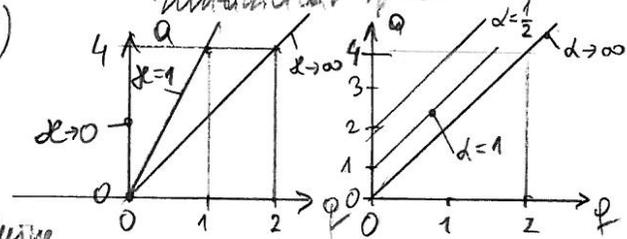
d)  $i = \hat{I} \sin \omega t$ :  $\frac{d^2}{dt^2}(\frac{x}{d}) + (\frac{\Omega_m^2 + \Omega_e^2}{\omega^2} - \frac{\Omega_e^2 \cos 2\omega t}{\omega^2}) \cdot \frac{x}{d} = 0$   $\frac{x}{d} = y, \omega t = \tau \Rightarrow y(\tau)$

periodische Änderung der effektiven Steifigkeit:  $k + \frac{L_0 I^2}{d^2} (1 - \cos 2\omega t) = k_{\text{eff}}(t) > 0$   
 zwar stets positiv, aber schwankend  $\rightarrow$  kann für Instabilität führen.

$$a = \underbrace{\left(\frac{\Omega_m}{\omega}\right)^2}_{\frac{1}{\alpha}} + \underbrace{\left(\frac{\Omega_m}{\omega}\right)^2}_{\frac{1}{\alpha}} \cdot \underbrace{\frac{L_0 I^2}{d^2 k}}_{\alpha} \quad \varphi = \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{\Omega_m}{\omega}\right)^2}_{\frac{1}{2\alpha}} \cdot \alpha$$

$a(\varphi)$  und Parameter  $\alpha$ :  $a = 2\varphi \left(\frac{1}{2\alpha} + 1\right)$

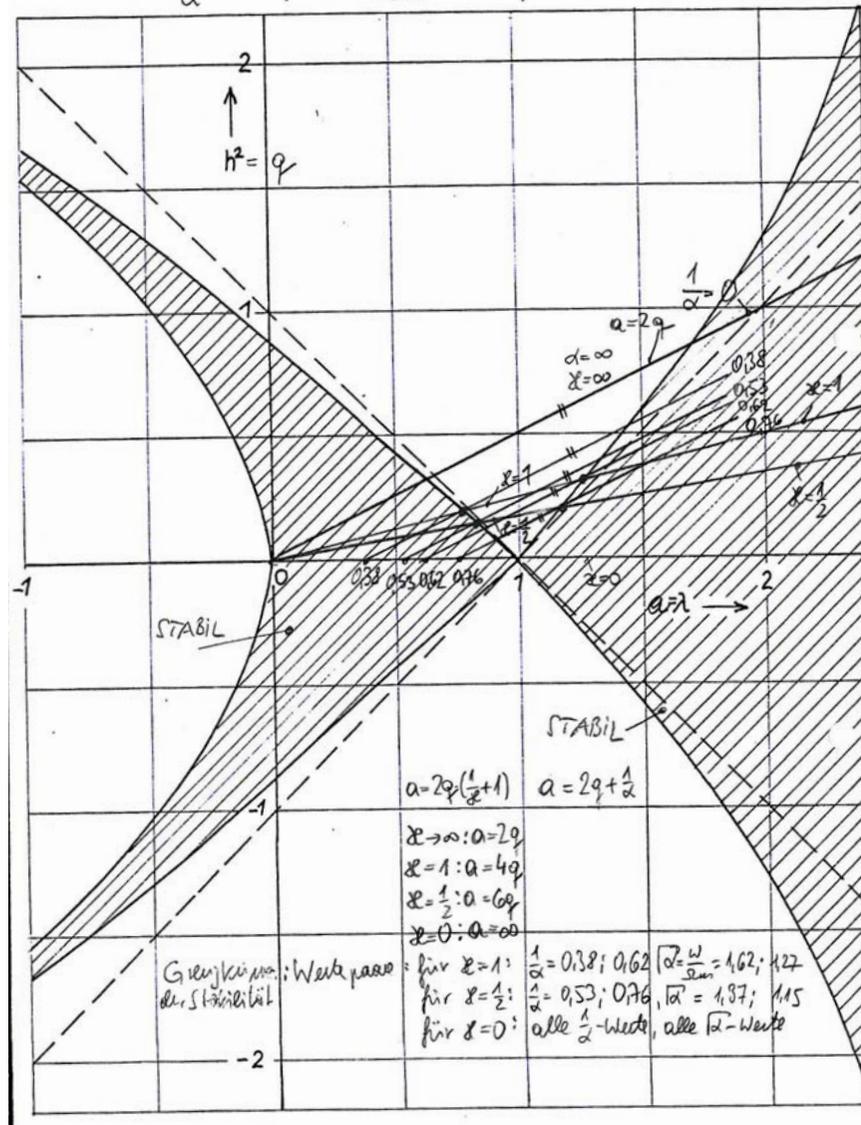
$a(\varphi)$  und Parameter  $d$ :  $a = 2\varphi + \frac{1}{\alpha}$



Eintragen von  $a(\varphi, \alpha)$  &  $a(\varphi, d)$  in die Stabilitätskurve  $a(\varphi)$  der Mathieu-Gleichung liefert mit den Schnittpunkten  $a(\varphi, \alpha)$  und  $a(\varphi, d)$  mit den Stabilitätsgrenzkurven die Wechsellast  $(\alpha, \alpha) \sim (\alpha, \sqrt{\alpha}) \sim (I^2 \frac{L_0}{\Omega_m})$  für stabile bzw. instabile Schwingungen.



Konstantlinien der Werte  $\alpha$ , ausgehend  
von  $\frac{1}{\alpha} = 1$  respektive  $\frac{w}{\alpha_{\text{un}}} = \sqrt{\alpha} = 1$  für  $x=0; 0,5; 1$ .





Konstruktion der Wertepaare  $(\alpha, \beta)$   
für  $\beta = 0, 0,5, 1$ , ausgehend von  
 $\frac{\Delta}{\alpha} = 4, 9, 16$ , resp.  $\frac{w}{\Sigma u} = \sqrt{\alpha} = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$

Numerische Lösung: Beispiel:

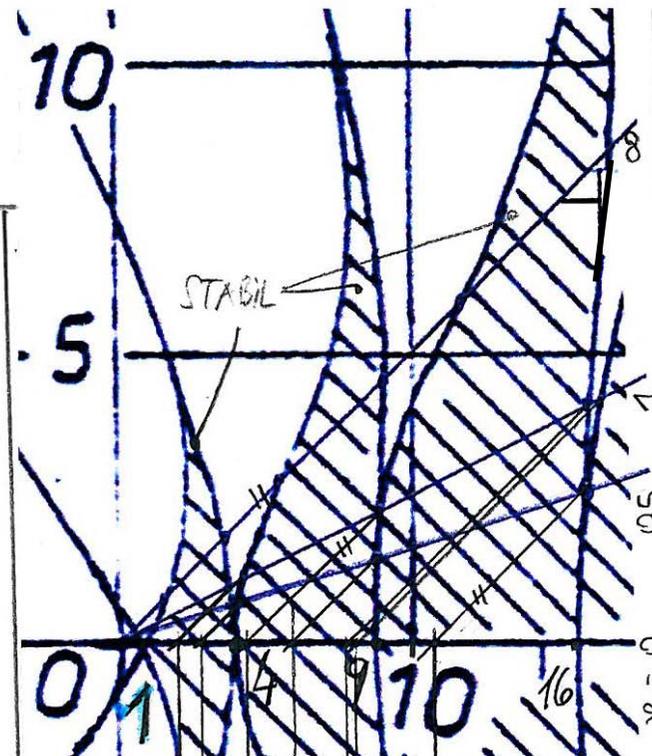
$I^2$  so, dass  $\beta = 0,5$

$\frac{w}{\Sigma u}$  so, dass  $\frac{w}{\Sigma u} = \sqrt{\alpha} = 0,2; \dots; 1,5$

$a = \frac{1+\beta}{\alpha}$   $\beta = \frac{\beta}{2\alpha}$   $\alpha = 0,04; \dots; 2,25$

$\frac{dy}{dt} = u, \frac{du}{dt} = -\left(\frac{1+\beta}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} \cos 2\tau\right)y + \frac{y_0}{\alpha}$

$y_0' = u_0 = 0, y_0 = 0,3$  ( $x_0 = 0,3, \alpha$ )  
( $\dot{x}_0 = 0$ )



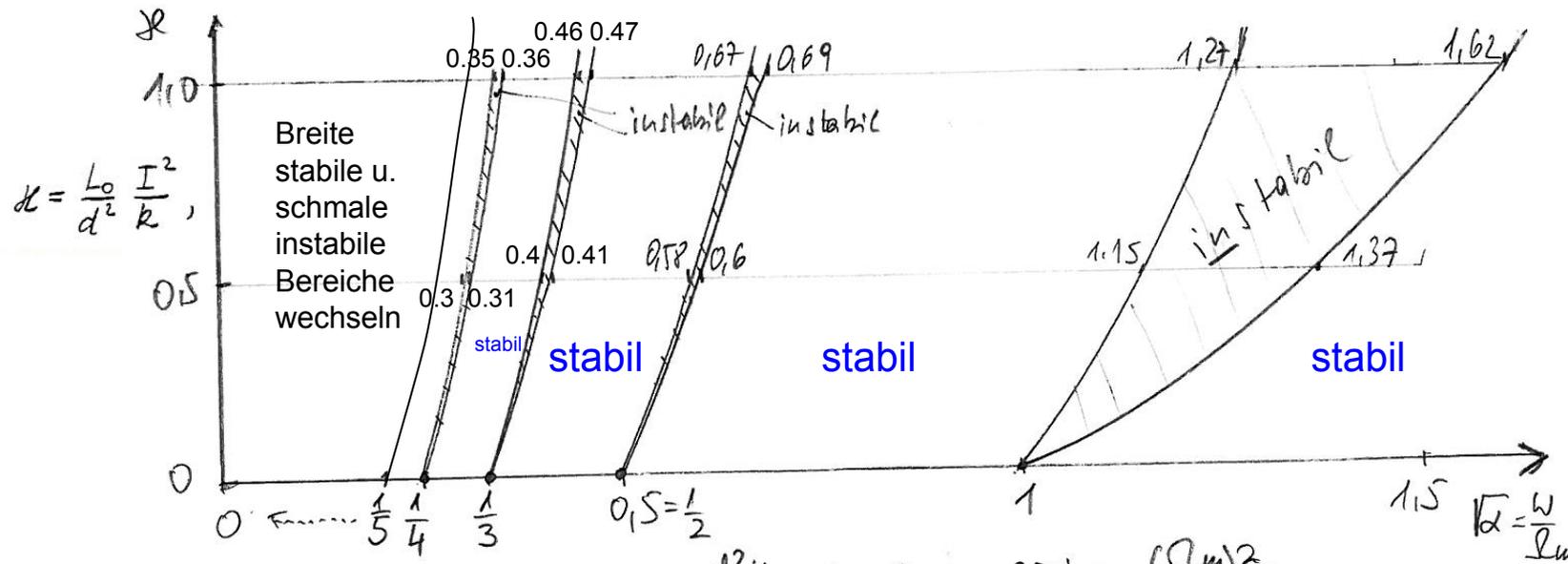
$\frac{1}{\alpha} = 2,1; 2,9; 4,5; 6,0; 7,9; 8,15; 10,8$

$\beta = 0,5: \frac{1}{\alpha} = 2,9; 2,95; 6,0; 6,1; 10,7; 10,8$   
 $\sqrt{\alpha} = 0,6; 0,58; 0,41; 0,40; 0,3; 0,31$

$\beta = 1: \frac{1}{\alpha} = 2,1; 2,2; 4,4; 4,6; 7,85; 8,15$   
 $\sqrt{\alpha} = 0,89; 0,67; 0,47; 0,46; 0,36; 0,35$



# Stabile und instabile Lösungen zu den Paaren $I, \omega$ des anregenden Spulenwechselstroms



Numerische Lösung der Gleichung:  $\frac{d^2 y}{d\tau^2} + (a - 2q \cdot \cos 2\tau) y = \left(\frac{\Omega_m}{\omega}\right)^2 y_0$

mit RUNGE-KUTTA:

$$\frac{dy}{d\tau} = u(\tau)$$

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0 = u(0) = u_0$$

$$\frac{du}{d\tau} = -(a - 2q \cdot \cos 2\tau) y + \left(\frac{\Omega_m}{\omega}\right)^2 \cdot y_0$$

$$\text{also } y(0) = y_0, \quad u(0) = u_0$$

$\tau$  normiert auf  $\omega$ ,  $y$  normiert auf  $d$   
 $u$  normiert!

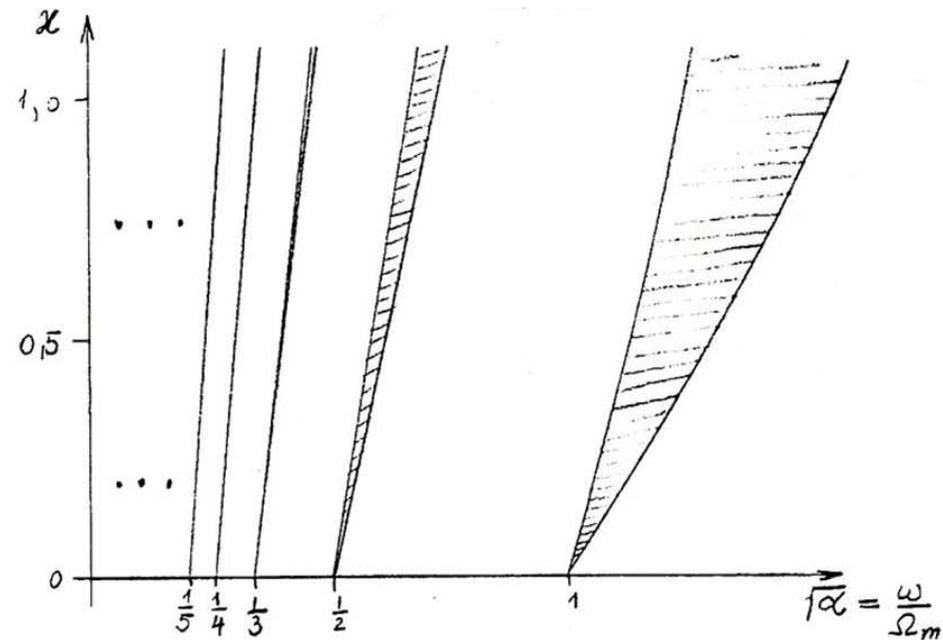
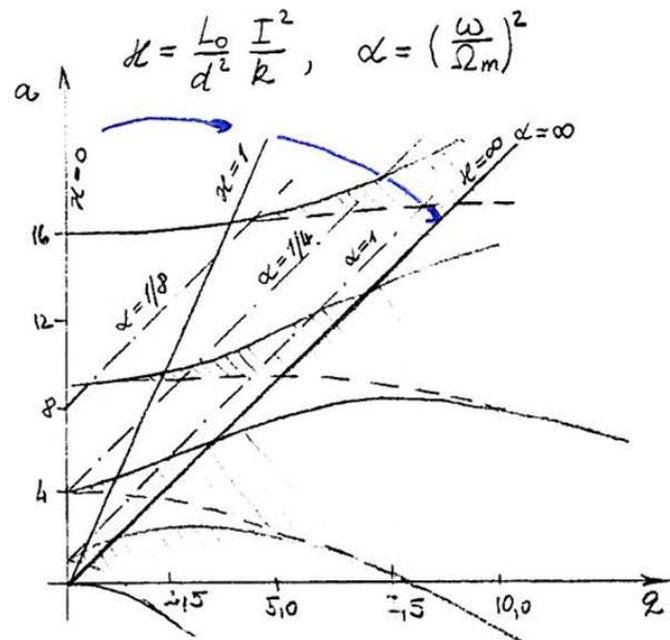


$$y = AF_{\nu}(\tau) + BF_{\nu}(-\tau)$$

$$F_{\nu}(\tau) = e^{j\nu\tau} P(\tau)$$

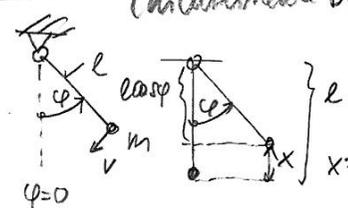
Wir halten fest: Ein Charakteristikum von Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten ist die Existenz abwechselnd stabiler und instabiler Frequenzbänder. Stellen wir etwa in unserer Anordnung eine feste Stromamplitude  $I\sqrt{2} = \text{konst. ein}$ , so liegen Paare  $(a, q)$  auf einer Geraden  $\kappa = \text{konst.}$ . Bei sinkender Speisefrequenz gelangt man abwechselnd in stabile und instabile Frequenzbereiche ( $\alpha \downarrow$ ). Die Instabilitäten kommen durch die periodischen Änderungen der "effektiven Federsteifigkeit" zustande.







Beispiel A: Mechan. Pendel: ungedämpft:  $W_k = W_k^* = \frac{mv^2}{2} = m \frac{1}{2} (l\dot{\varphi})^2$   
(nichtlineare DGL)



$W_p = mgx$ , bei  $\varphi=0$ :  $W_p=0 \Rightarrow W_p = mgl(1 - \cos\varphi)$

$n=1$ :  $\varphi = \varphi_1$

$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) - \frac{\partial W_k^*}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial W_p}{\partial \varphi_1} + f_1^{(d)} = f_1^{(e)}$   
 $= 0$  keine äußeren Kräfte  
 $= 0$  keine Dämpfungskraft

$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial W_k^*}{\partial \varphi} + \frac{\partial W_p}{\partial \varphi} = 0$ ;  $\frac{d}{dt} (ml\dot{\varphi}) - 0 + mgl \sin\varphi = 0$

1) Schwingungsgleichung:  $ml\ddot{\varphi} + mgl \sin\varphi = 0$  DGL. 2. Ordnung, nichtlinear!

$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin\varphi = 0$  oder  $\frac{d}{dt}(\dot{\varphi}) - \frac{g}{l} \cdot \frac{d}{dt}(\cos\varphi) \cdot \frac{1}{\dot{\varphi}} = 0 \Rightarrow$

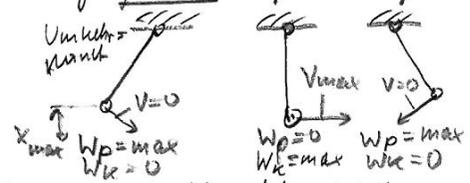
$\dot{\varphi} \frac{d}{dt}(\dot{\varphi}) - \frac{g}{l} \frac{d}{dt} \cos\varphi = 0$  oder  $\frac{d}{dt}(\dot{\varphi}^2/2) - \frac{g}{l} \frac{d}{dt} \cos\varphi = 0 \quad | \int dt$

$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} - \frac{g}{l} \cos\varphi = \text{Konst.} \Rightarrow$  zu jedem Zeitpunkt t!

t=0: Anfangsbedingung:  $\varphi(0) = \varphi_0$ ,  $\dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0$

$\frac{l^2 m \dot{\varphi}^2}{2} - mgl \cos\varphi = \frac{ml^2 \dot{\varphi}_0^2}{2} - mgl \cos\varphi_0 \quad | : +mgl$

$\frac{l^2 m \dot{\varphi}^2}{2} + mgl(1 - \cos\varphi) = \frac{ml^2 \dot{\varphi}_0^2}{2} + mgl(1 - \cos\varphi_0) = \text{Konst.}$ , also  $W_k + W_p = \text{const.}$   
 („konservatives“ System)



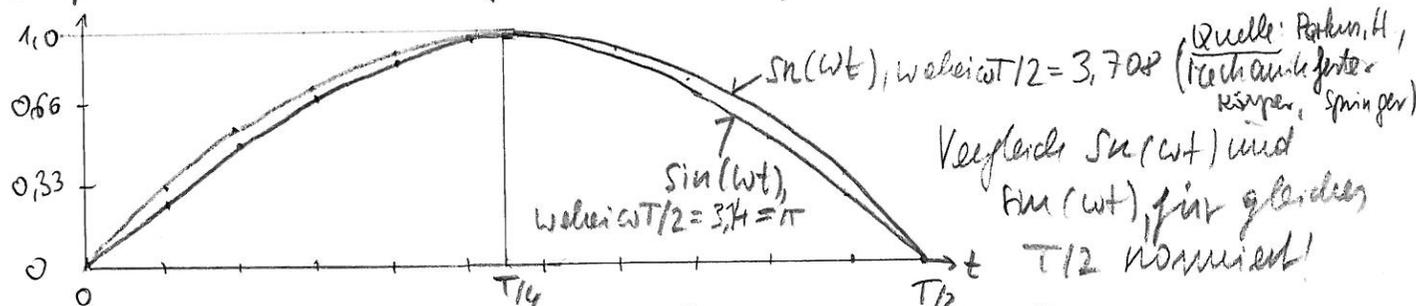


Lösung der Differentialgleichung ist eine Schwingung mit der periodischen JACOBI'schen elliptischen Sn-Funktion:  $sn(\omega t + c)$

$$\varphi = 2 \operatorname{arcsin} [k \cdot sn(\omega t + c)], \quad k = \sin \frac{\alpha}{2},$$

$$= \alpha \cdot sn(\omega t + c), \quad \text{Kreiszugweg } \omega = \omega(\alpha)$$

Die Schwingungsdauer  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  hängt von der Schwingungsamplitude  $\alpha$  ab! (typisch für nichtlineare Schwingungen). Je größer die Schwingungsamplitude  $\alpha$ , desto langsamer schwingt das Pendel.



2) Lösung für kleine Amplituden  $\alpha = \varphi_0 \ll 1$ :  $\cos \varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$ ,  $\sin \varphi \approx \varphi$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi \approx \ddot{\varphi} + \frac{g}{2l} \varphi = 0, \quad \omega_p = \omega_{pl} \sqrt{1 - \frac{\varphi_0^2}{2}} \approx \omega_{pl} \sqrt{\frac{\varphi_0^2}{2}}$$

$$T = 1, \quad \tilde{K} > 0, \quad D = 0$$

$$\omega_K + \omega_p = \frac{l^2 m \dot{\varphi}^2}{2} + mgl \frac{\varphi_0^2}{2} = \frac{l^2 m \dot{\varphi}_0^2}{2} + mgl \frac{\varphi_0^2}{2} = \text{konst.}$$

stabil, schwingend (linearisierte DGL).





$\varphi = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$ ,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$  um abhängig von Schwingung amplituden  $\alpha$

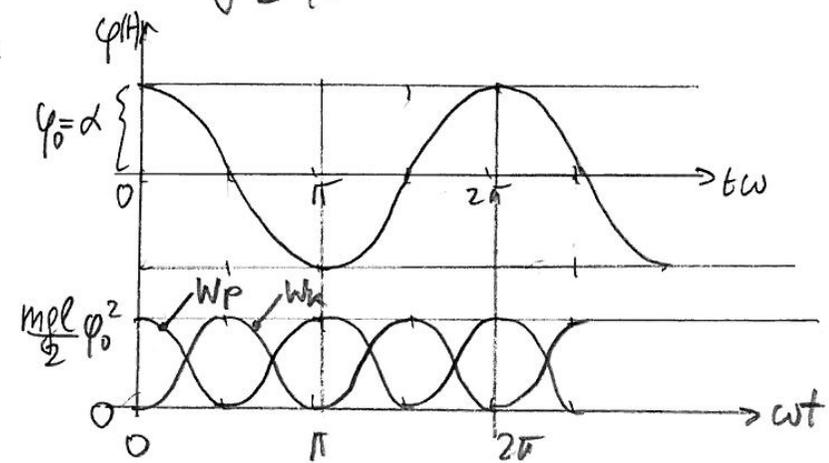
$\dot{\varphi} = (-A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t) \omega_0 \Rightarrow \varphi_0 = A, \dot{\varphi}_0 = \omega_0 B$

$\varphi = \varphi_0 \cos \omega_0 t + \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t = \alpha \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ ,  $\varphi_0 = -\arctan\left(\frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_0 \varphi_0}\right)$

Z.B.  $\dot{\varphi}_0 = 0 \Rightarrow \varphi(t) = \varphi_0 \cos \omega_0 t$

$W_k + W_p = mgl \frac{\varphi_0^2}{2} = \frac{ml^2}{2} (\varphi_0 \omega_0)^2 \sin^2 \omega_0 t + mgl \frac{\varphi_0^2}{2} \cos^2 \omega_0 t$

$\frac{mgl}{2} \varphi_0^2$





Beispiel B: Wie Bsp. A, jedoch

die Pendellänge  $l$  wird periodisch mit  $\omega_p$  verändert:  $l(t) = l_0 + l_1 \cdot \cos \omega_p t$

Lösung für:  $l_1/l_0 \ll 1$ ,  $\varphi \ll 1$ :  $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l_0 + l_1 \cos \omega_p t} \cdot \underbrace{\sin \varphi}_{\approx \varphi} = 0$   $\frac{1}{1 + \frac{l_1}{l_0} \cos \omega_p t} \approx 1 - \frac{l_1}{l_0} \cos \omega_p t$

$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l_0} (1 - \frac{l_1}{l_0} \cos \omega_p t) \varphi = 0$ : lineare DGL. 2. Ordnung mit nicht konstanten Koeffizienten

1. HILL'sche Differentialgleichung

Näherungslösung für relativ langsame Änderungen der Amplitudenänderung:  $\ddot{\varphi}(t) \ll 1$

Ansatz für die Lösung:  $\varphi(t) = \varphi_0(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \mu_0)$ ,  $\varphi(0) = \varphi_0$ ,  $\frac{g}{l_0} = \omega_0^2$   
↑ unbekannt

$$\frac{\ddot{\varphi}}{\omega_0^2} + (1 - \frac{l_1}{l_0} \cos \omega_p t) \varphi = 0$$

$$\frac{1}{\omega_0^2} (\underbrace{\ddot{\varphi}_0(t)}_{\ll 1}) \cos(\omega_0 t + \mu_0) - 2 \dot{\varphi}_0(t) \omega_0 \sin(\omega_0 t + \mu_0) - \varphi_0(t) \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \mu_0) + (1 - \frac{l_1}{l_0} \cos \omega_p t) \varphi_0(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \mu_0) = 0$$

$$- 2 \dot{\varphi}_0(t) \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t + \mu_0) - \cancel{\varphi_0(t) \cos(\omega_0 t + \mu_0)} + \cancel{\varphi_0(t) \cos(\omega_0 t + \mu_0)} - \frac{g}{l_0} \varphi_0(t) \cos \omega_p t \cdot \cos(\omega_0 t + \mu_0) = 0$$

$$- 2 \dot{\varphi}_0(t) \cdot \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 t + \mu_0) - \frac{g}{2} \cos((\omega_0 - \omega_p)t + \mu_0) + \varphi_0(t) = 0$$

$\frac{1}{2} [\cos((\omega_0 + \omega_p)t + \mu_0) + \cos((\omega_0 - \omega_p)t + \mu_0)]$   
 niedrigfrequente, hochfrequente  
 und Wechselströme

$$\frac{\dot{\varphi}_0(t)}{\varphi_0(t)} = - \frac{\omega_0 g}{4} \frac{\cos((\omega_0 - \omega_p)t + \mu_0)}{\sin(\omega_0 t + \mu_0)}$$

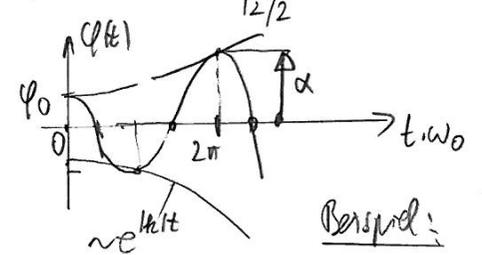




Falls  $\dot{\varphi}_0(t)/\varphi_0(t) = k = \text{konst.}$ , dann  $\dot{\varphi}_0(t) - k\varphi_0 = 0 : \varphi_0(t) = K e^{kt}$  kann  
aufgelöst werden!  
 Bedingung:  $\omega_p = 2\omega_0 : \frac{\cos(\omega_0 t - \varphi_0)}{\sin(\omega_0 t + \varphi_0)} = \frac{\cos(\omega_0 t + \varphi_0 - 2\varphi_0)}{\sin(\omega_0 t + \varphi_0)} = 1$   
 $= \frac{\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \cos 2\varphi_0 + \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \sin 2\varphi_0}{\sin(\omega_0 t + \varphi_0)} = \cot(\omega_0 t + \varphi_0) \frac{\cos 2\varphi_0 + \sin 2\varphi_0}{\sin 2\varphi_0} = \text{konst.}$   
 minus Nullterm  $\Rightarrow 2\varphi_0 = \pm \frac{\pi}{2}$   
 $\varphi_0 = \pm \frac{\pi}{4}, k = -\frac{\omega_0}{4} \cdot \sin(\pm \frac{\pi}{4})$

$k = \mp \frac{\omega_0}{4}, \varphi_0 = \pm \frac{\pi}{4} : \text{Lösung: } \varphi(t) = K \cdot e^{-kt} \cdot \cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}) + K e^{kt} \cdot \cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{4})$

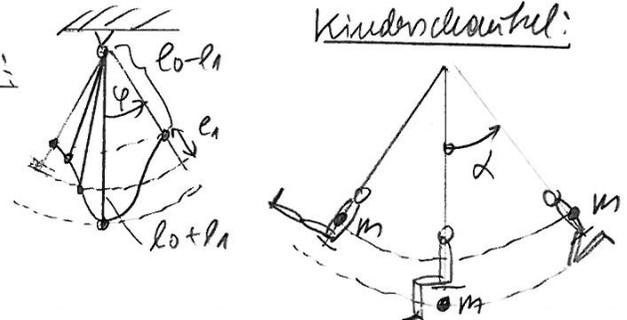
$\varphi(0) = \varphi_0 = K (\cos \frac{\pi}{4} \cdot 2) = \sqrt{2} \cdot K, K = \varphi_0 / \sqrt{2}$



$$\varphi(t) = \frac{\varphi_0}{\sqrt{2}} \left[ e^{-kt} \cdot \cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}) + e^{kt} \cdot \cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{4}) \right]$$

abklingend      aufklingend

Kinderschaukel:



Mit  $\omega_p = 2\omega_0$  (doppelter Freigang) „Pendellängen“ =  
 Änderung drehl. Beinbewegung (Schwergewicht  
 verlagert sich mit  $2\omega_0$ , entspricht  $l_0 \pm l_1$ )  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  Die Schaukelamplitude  $\alpha$  nimmt zu! = „instabiles“ Verhalten!  
 Prinzip der „parametrischen“ Verstärkung!

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l_0} (1 - \frac{l_1}{l_0} \cos 2\omega_0 t) \varphi = 0 \quad \text{bzw.} \quad \ddot{\varphi} + (\lambda - 2l^2 \cos 2\tau) \varphi = 0$$

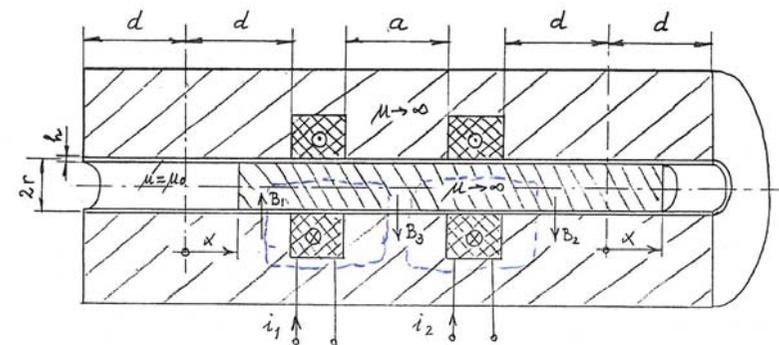
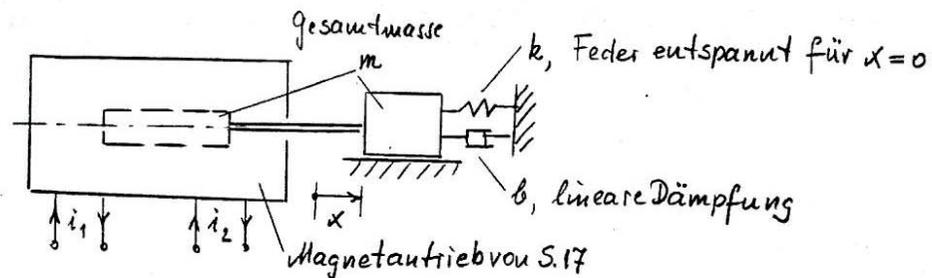
MATHIEU'sche Differentialgleichung



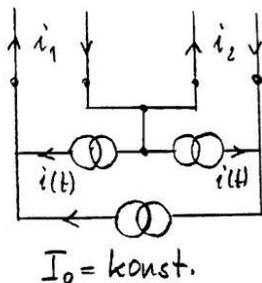
## 1.13. Übungsaufgaben

(= Teil 1, Folie 49)

- 1) Der im Beispiel 3) S.17 untersuchte Magnetantrieb mit zwei Spulen soll als Schwingungserreger verwendet werden.



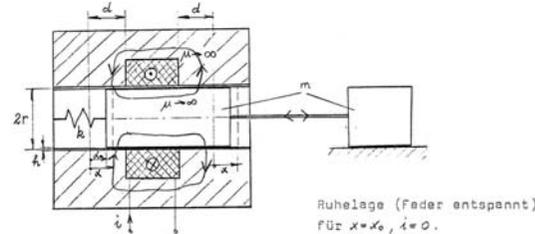
- a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für eingeprägte Ströme  $i_1, i_2$  auf.
- b) Die Speisung erfolge durch drei Stromquellen derart, daß



$$i_1 = I_0 + i(t),$$

$$i_2 = I_0 - i(t), \quad I_0 = \text{konst.}$$

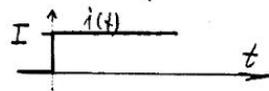
Spezialisieren Sie die Bewegungsgleichung für diesen Fall und diskutieren Sie die Stabilität von Gleichgewichtslagen  $\dot{i} = \text{konst.}$



Worin besteht der wesentliche Unterschied zum Schwingantrieb von Teil 3, Folie 45?

c) Bestimmen Sie stationäre Lösungen  $x(t) = \operatorname{Re}\{\hat{x} e^{j\omega t}\}$  für  $i(t) = I \cos \omega t$  und skizzieren Sie die Abhängigkeit der Amplitude  $|\hat{x}|$  von der Kreisfrequenz  $\omega$  bei schwacher und bei starker Dämpfung.

d) Berechnen und skizzieren Sie  $x(t)$  für sprungartigen Verlauf von  $i(t)$  und die Anfangsbedingungen  $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$ . bei schwacher Dämpfung.



Lösung:

$$a) \quad m\ddot{x} + b\dot{x} + \left[ \frac{L_0}{d^2} (i_1 + i_2)^2 + k \right] x = \frac{L_0 a}{2d^2} (i_2 + i_1)(i_2 - i_1) \checkmark$$

b) System ist stabil für alle Werte  $I_0$ .

$$c) \quad |\frac{\hat{x}}{x_1}| = [(1-\zeta^2)^2 + \delta^2 \zeta^2]^{-\frac{1}{2}} \quad \text{mit } \zeta = \frac{\omega}{\Omega}, \quad \Omega = \sqrt{K/m}, \quad K = k + 4 \frac{L_0 I_0^2}{d^2},$$

$$x_1 = \frac{2}{K} \frac{L_0 a}{d^2} I_0 I, \quad \delta = \frac{b}{m \Omega}$$

$$d) \quad x(t) = \left[ e^{-\beta t} \left( \cos \omega t + \frac{\beta}{\omega} \sin \omega t \right) - 1 \right] x_1, \quad \beta = \frac{b}{2m} = \frac{\delta}{2} \Omega, \quad \omega = \Omega \sqrt{1 - (\delta/2)^2} = \sqrt{\Omega^2 - \beta^2}$$

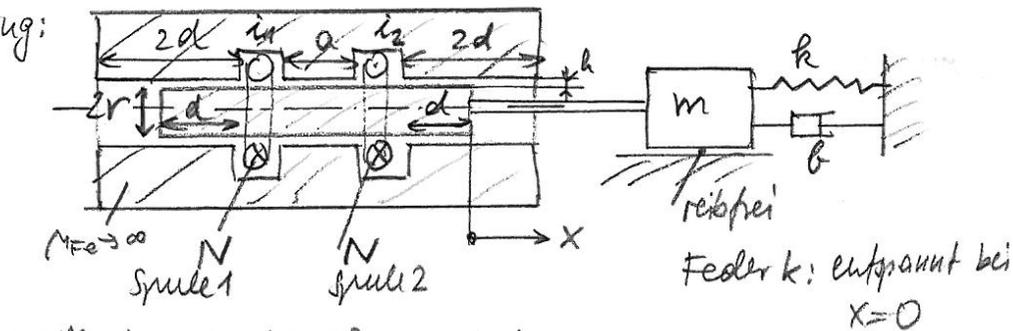
Aufgabe 1.13-1; Lösung:

$$L_1 = L_0 \left[ 1 + \frac{a}{d} \left( 1 - \frac{x}{d} \right) - \left( \frac{x}{d} \right)^2 \right]$$

$$L_2 = L_1(-x) = L_2(x)$$

$$L_{12} = L_0 \cdot \left( 1 - \frac{x}{d} \right)^2$$

$$L_0 = \mu_0 N^2 \frac{2\pi r d^2}{h(a+2d)}$$



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

$$W_k^m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + L_{12} i_1 i_2$$

a)  $i_1, i_2$  eingepreßt,  $x$  einzige Koordinate:  $n=1$   $W_k^* = \frac{m\dot{x}^2}{2} + W_k^m$   $W_p = \frac{1}{2} kx^2$

$$f^d = b \cdot \dot{x} \quad \delta W_p = k \cdot x \cdot \delta x, \quad \delta V = b \dot{x} \delta x, \quad \delta A = f \delta x = 0$$

Äußere Kraft  $f = 0!$

$$\left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial W_k^*}{\partial x} \right] \cdot \delta x + \delta W_p + \delta V = \delta A \quad \frac{\partial W_k^*}{\partial x} = mx', \quad \frac{\partial W_k^*}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial L_1}{\partial x} i_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial L_2}{\partial x} i_2^2 + \frac{\partial L_{12}}{\partial x} i_1 i_2$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial x} = L_0 \cdot \left( -\frac{1}{d} \frac{a}{d} - \frac{2x}{d^2} \right) = -L_0 \cdot \frac{1}{d^2} (a+2x), \quad \frac{\partial L_2}{\partial x} = L_0 \cdot \left( \frac{1}{d} \frac{a}{d} - \frac{2x}{d^2} \right) = -L_0 \cdot \frac{1}{d^2} (-a+2x)$$

$$\frac{\partial L_{12}}{\partial x} = L_0 \cdot \left( -\frac{2x}{d^2} \right)$$

$$m\ddot{x} - \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial L_1}{\partial x} i_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial L_2}{\partial x} i_2^2 + \frac{\partial L_{12}}{\partial x} i_1 i_2 \right] + kx + b\dot{x} = 0$$

$$-\frac{1}{2} L_0 \frac{1}{d^2} (a+2x) i_1^2 - \frac{1}{2} L_0 \frac{1}{d^2} (-a+2x) i_2^2 - L_0 \frac{2x}{d^2} i_1 i_2 = -\frac{L_0}{d^2} \cdot (i_1^2 (x+\frac{a}{2}) + i_2^2 (x-\frac{a}{2}) + 2x i_1 i_2) =$$

$$= -\frac{L_0}{d^2} \cdot ((i_1 + i_2)^2 x - \frac{L_0}{d^2} \cdot \frac{a}{2} \cdot (i_2^2 - i_1^2))$$

$$m\dot{x}' + \left\{ \frac{L_0}{d^2} (i_1 + i_2)^2 + k \right\} \cdot x + b\dot{x} = \frac{L_0}{d^2} \cdot \frac{a}{2} (i_2^2 - i_1^2)$$

ein. Diff. gl. zweiter Ordnung.  
mit konst. Leoeff.

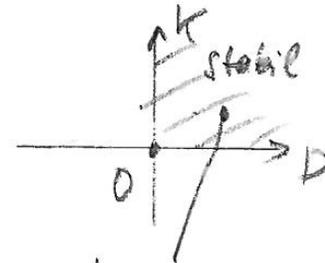




b) Differenzansteuerung:  $i_1 = I_0 + i(t) = i_1(t)$ ,  $i_2(t) = I_0 - i(t) \Rightarrow i_1 + i_2 = 2I_0$   
 $i_2^2 - i_1^2 = (i_2 - i_1)(i_2 + i_1) = -2i(t) \cdot 2I_0$

$m\ddot{x} + b\dot{x} + \left[ \frac{L_0}{\sigma l^2} \cdot 4I_0^2 + k \right] \cdot x = \underbrace{-\frac{L_0}{\sigma l^2} \cdot a \cdot 2 \cdot i(t) \cdot I_0}_{-C \cdot i(t)}$ : eingeprägte Magnetkraft  
 $m = T$   $b = D$   $K = \frac{L_0}{\sigma l^2} \cdot 4I_0^2 + k$   $C = \frac{L_0}{\sigma l^2} \cdot a \cdot 2I_0$

$i(t) = \text{konst.}$ : Gleichparallele Lage  $\dot{x} = 0, \ddot{x} = 0$   
 $x_0 = -\frac{C}{K} i(t)$



homogene Diff. gl.:  $T\ddot{x} + D\dot{x} + Kx = 0$   $T = m > 0, D = b > 0, K = \frac{L_0}{\sigma l^2} \cdot 4I_0^2 + k > 0$

Stabiles Verhalten für alle Werte  $I_0 \geq 0$ !

Vergleiche dazu den Schwingkreisantrieb 3/Folie 45: dort nur eine Energiequelle =

= keine Differenzansteuerung:  $m\ddot{x} + \left( \frac{L_0}{\sigma l^2} i^2 + k \right) x = kx_0$

- a) ungedämpft ( $b=0$ )
- b) Wegen  $i(t)$ : nichtkonst. Koeff.: parametrische Erregung mit „Aufblähen“ (Instabilität) möglich.





c) Stationäre Lösung für  $i(t) = I \cos \omega t \Rightarrow$  partikuläre Lösung  
 $x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$

$$T \ddot{x} + D \dot{x} + kx = -C \cdot \underbrace{I \cos \omega t}_{\text{Re}\{I \cdot e^{j\omega t}\}} \Leftrightarrow x(t) = \text{Re}\{ \hat{x} \cdot e^{j\omega t} \}$$
$$T \cdot \hat{x} \cdot (-\omega^2) + D \cdot \hat{x} \cdot j\omega + k \cdot \hat{x} = -C \cdot I \Rightarrow \hat{x} = \frac{-C \cdot I}{-T\omega^2 + j\omega D + k} = \frac{-C \cdot I / k}{-\frac{T}{k}\omega^2 + j\omega \frac{D}{k} + 1}$$

$$\omega \rightarrow 0: \hat{x} = -C \cdot \frac{I}{k} = -L_0 \frac{2a}{d^2} I_0 \cdot \frac{I}{k} = -x_1$$

$$\frac{\hat{x}}{x_1} = \frac{1}{\frac{T}{k}\omega^2 - j\omega \frac{D}{k} - 1} = \frac{1}{\frac{\omega^2}{\Omega^2} - j\omega \frac{D}{T} \frac{T}{k} - 1} = \frac{1}{\zeta^2 - j\zeta\delta - 1}$$

$\frac{T}{k} = \frac{m}{k} = \frac{1}{\Omega^2} \mid \Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  : ungedämpfte Eigenkreisfrequenz

$\frac{D}{T} = \frac{b}{m} \mid \frac{m\Omega}{b} = \frac{1}{\delta} \mid \delta = \frac{b}{m\Omega}$  : bezogene Dämpfung  $\frac{\omega}{\Omega} = \zeta$  : bezogene Kreisfrequenz

$$\omega \frac{D}{k} = \frac{\omega}{\Omega} \cdot \frac{D\Omega}{k} = \frac{\omega}{\Omega} \cdot \frac{D}{T} \cdot \frac{T}{k} \Omega = \zeta \cdot \frac{b}{m} \cdot \frac{1}{\Omega^2} \Omega = \zeta \cdot \frac{b}{m\Omega} = \zeta \cdot \delta$$

$$\left| \frac{\hat{x}}{x_1} \right| = \left| \frac{1}{\zeta^2 - j\zeta\delta - 1} \right| = \left| \frac{1}{-1 - j\zeta\delta + \zeta^2} \right| = \frac{1}{\sqrt{(1-\zeta^2)^2 + \zeta^2\delta^2}}$$



(a)  $\delta \gg 1$ : starke Dämpfung (ii)  $\delta \rightarrow 0$ : schwache Dämpfung

(ii):  $\left| \frac{\hat{U}}{X_1} \right| \approx \frac{1}{\sqrt{(1-\delta^2)^2}} = \left| \frac{1}{1-\delta^2} \right| = \frac{1}{\delta^2-1} \left| \frac{\hat{U}}{X_1} \right|$

Resonanz bei  $\delta = 1 \Leftrightarrow \omega^* = \omega$  für  $\delta = 0$ !

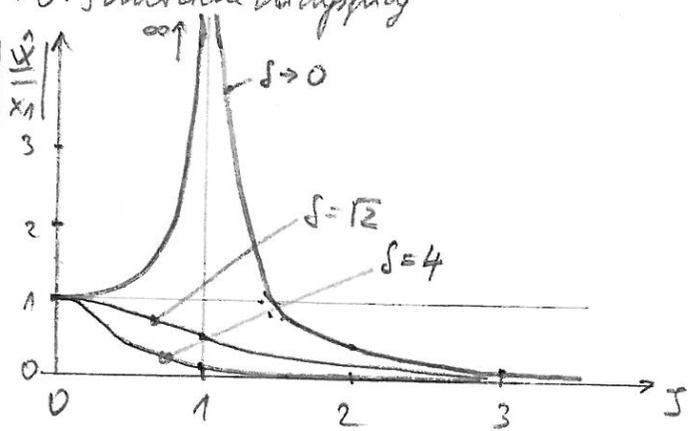
Wo liegt die Resonanz bei  $\delta > 0$ ?

$\frac{d}{d\delta} \left| \frac{\hat{U}}{X_1} \right| = 0 : 2(1-\delta^2)(-2\delta) + 2\delta \delta^2 = 0$

$\delta \neq 0 \Rightarrow -\delta^2 + 1 = \delta^2/2$

$1 - \delta^2/2 = \delta^2$

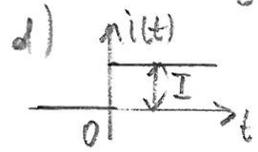
$\omega^* = \omega \cdot \sqrt{1 - \delta^2/2}$



Bei  $\delta^2/2 = 1 \Rightarrow (\delta = \sqrt{2}) : \omega^* = 0$ : Ab dieser Dämpfung keine Resonanzüberhöhung mehr!

(i)  $\delta > 4$ :  $(1-\delta^2)^2 + \delta^2 \delta^2 = 1 - 2\delta^2 + \delta^4 + \delta^2 \delta^2 = 1 + (\delta^2 - 2)\delta^2 + \delta^4 \approx 1 + \delta^2 \delta^2 + \delta^4 \approx (\delta^2 + \delta^2)\delta^2$   
( $\delta \gg 1$ )

$\left| \frac{\hat{U}}{X_1} \right| \approx \frac{1}{\delta \sqrt{\delta^2 + \delta^2}}$



$i(t) = I \cdot \epsilon(t)$ ,  $\epsilon(t)$ : Heaviside'sche Sprungfunktion

Anfangsbedingungen:  $v(0) = 0, \dot{v}(0) = 0$

schwache Dämpfung  $\delta < 2$   
 $\Rightarrow$  also  $D^2 < 4TK$  erfüllt,

$D^2 < 4TK$ : ergibt oszillierende Bewegung

homogene Lösung:  $T\lambda^2 + D\lambda + K = 0$

$\lambda_{1,2} = - \frac{D \pm \sqrt{D^2 - 4TK}}{2T} = -\beta \mp j\tilde{\omega}$

denn:  $\beta^2 < 4m \cdot K$

$\delta^2 = \frac{\beta^2}{m^2 K} = \frac{\beta^2}{mK} < 4, \delta < 2,$   
 $\frac{m}{\omega^2}$  notwendig für  $\delta < 2$





$$\beta = \frac{D}{2T}, \tilde{\omega} = \frac{1}{2T} \sqrt{4TK - D^2} : x_{\text{alt}}(t) = A e^{-\beta t} \cos \tilde{\omega} t + B e^{-\beta t} \sin \tilde{\omega} t$$

partikuläre Lösung:  $x_p = P = \text{const.}$ , da rechte Seite für  $t \geq 0$  konstant:

$$T\ddot{x} + D\dot{x} + Kx = \underbrace{-C \cdot I}_{= -c \cdot I \cdot \epsilon(t)}, t \geq 0$$

$$x_p = P = -\frac{C \cdot I}{K}$$

$$x(t) = x_h + x_p = -\frac{CI}{K} + e^{-\beta t} (A \cos \tilde{\omega} t + B \sin \tilde{\omega} t)$$

$$\dot{x} = -\beta e^{-\beta t} (A \cos \tilde{\omega} t + B \sin \tilde{\omega} t) + e^{-\beta t} (-\tilde{\omega} A \sin \tilde{\omega} t + \tilde{\omega} B \cos \tilde{\omega} t)$$

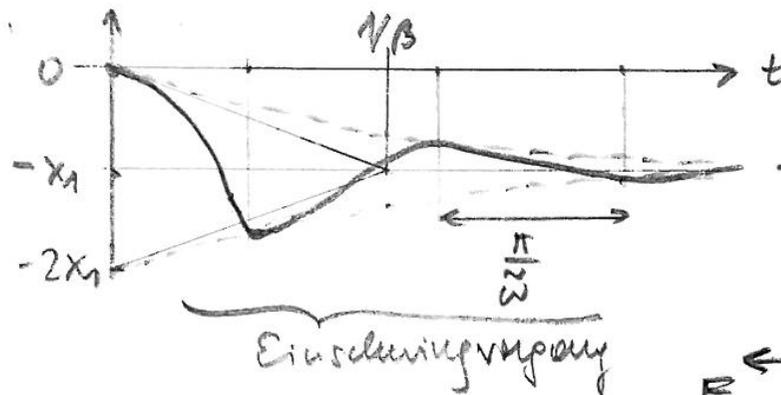
$$t=0: x(0) = 0 = -\frac{CI}{K} + A \quad \dot{x}(0) = 0 = -\beta A + \tilde{\omega} B$$

$$A = CI/K \quad B = \frac{\beta}{\tilde{\omega}} A = \frac{\beta}{\tilde{\omega}} \cdot \frac{CI}{K} \quad \frac{CI}{K} = x_1$$

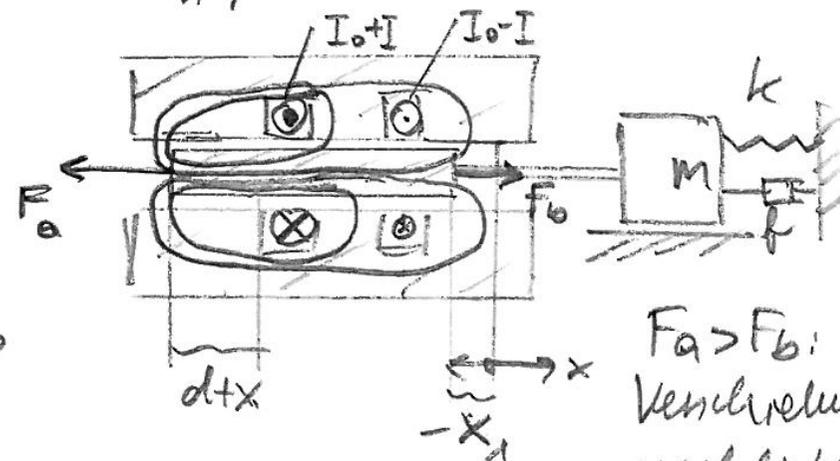
$$x(t) = x_1 \left\{ 1 + e^{-\beta t} \left( \cos \tilde{\omega} t + \frac{\beta}{\tilde{\omega}} \sin \tilde{\omega} t \right) \right\}$$

$$\beta = \frac{D}{2T} = \frac{\delta}{2m} = \frac{\delta \Omega}{2}, \quad \tilde{\omega} = \frac{\sqrt{4TK - D^2}}{2T} = \sqrt{\frac{K}{T} - \frac{D^2}{4T^2}} = \sqrt{\Omega^2 - \left(\frac{\delta \Omega}{2}\right)^2} = \Omega \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{2}\right)^2} = \sqrt{\Omega^2 - \beta^2}$$





$\rightarrow -x_1$  für  $t \rightarrow \infty$  stationärer Wert



$$\left( \frac{L_0}{d^2} (2I_0)^2 + k \right) x_1 = \frac{L_0}{d^2} \frac{q}{2} (-2I) 2I_0$$

$$K x_1 = - \frac{L_0}{d^2} \cdot \frac{2q I I_0}{K}$$

$F_a > F_b$ :  
Verschiebung  
nach links,  
Feder mit  $x_1$   
gerichtet als  
Gegenkraft

**Beachten Sie:** Eigenkreisfrequenz  $\omega = \omega$  und Resonanzkreisfrequenz  $\omega = \omega^*$  sind nicht identisch, außer beim ungedämpften System  $\delta = 0$ !

$$\omega^* = \Omega \cdot \sqrt{1 - \delta^2 / 2} < \omega = \Omega \cdot \sqrt{1 - (\delta / 2)^2}$$

Bei Anregung des Schwingers mit der Resonanzkreisfrequenz  $\omega = \omega^*$  ist die Schwingungsamplitude maximal, bei Anregung mit der ungedämpften Eigenkreisfrequenz  $\omega = \Omega$  die je Schwingungsperiode  $T$  in Reibung umgesetzte Energie  $Q$ !

Beweis:

$$x(t) = \hat{x} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$m\ddot{x} \cdot \dot{x} + b\dot{x} \cdot \dot{x} + kx \cdot \dot{x} = f(t) \cdot \dot{x} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{m \cdot \dot{x}^2}{2} + k \cdot \frac{x^2}{2} \right) = f(t) \cdot \dot{x} - b \cdot \dot{x}^2$$

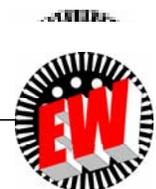
$$\frac{d}{dt} (W_k + W_p) = p(t) - q(t)$$

$W_k$ : kinetische Energie,  $W_p$ : potentielle Energie,  
 $p(t)$ : zugeführte mech. Leistung,  $q(t)$ : Reibungs-Wärmeleistung

Stationäre Schwingung:  $W_p + W_k = \text{konst.}$  und  $p(t) = q(t)$ : Die zugeführte Leistung wird direkt in Reibungs-Wärmeleistung umgewandelt, um die Schwingung aufrecht zu erhalten.

Reibungsenergie je Periode  $T$ :  $Q = \int_0^T b \cdot \dot{x}^2 dt = \int_0^T b \cdot (-\omega \hat{x} \cdot \sin(\omega t + \varphi))^2 dt = b \cdot (\omega \hat{x})^2 T / 2$

$$\bar{P} = \frac{Q}{T} = \frac{b}{2} \cdot (\omega \hat{x})^2 = \frac{b \Omega^2 x_1^2}{2} \cdot \frac{\zeta^2}{(1 - \zeta^2)^2 + (\delta \zeta)^2} \quad \bar{P}_{\max} = \bar{P}(\zeta = 1), \text{ also bei } \boxed{\omega = \Omega}$$





2) Die Linearisierung des Gleichungssystems (1) 1.12.1 zur Untersuchung der Stabilität eines Gleichgewichtszustands oder stationären Betriebszustands  $\underline{y}^0$  führe bei konstanten verallgemeinerten Kräften auf ein homogenes System von  $m$  linearen Differentialgleichungen erster Ordnung,

$$\dot{\underline{y}}^s = \underline{A} \underline{y}^s \quad \text{oder} \quad \dot{y}_i^s = \sum_{j=1}^m A_{ij} y_j^s, \quad i=1, \dots, m, \quad (1)$$

$\underline{A}$ ...  $m \times m$ -Matrix mit konstanten Elementen.

Der Lösungsansatz

$$\underline{y}^s = \underline{a} e^{\lambda t}, \quad \underline{a} = \{a_i, \quad i=1, \dots, m\} \quad (2)$$

liefert das lineare, homogene, algebraische Gleichungssystem

$$(\lambda \underline{E} - \underline{A}) \underline{a} = \underline{0} \quad \text{mit} \quad \underline{E} = \text{diag}\{1, \dots, 1\}, \quad \text{oder} \quad \sum_{j=1}^m (\lambda \delta_{ij} - A_{ij}) a_j = 0, \quad i=1, \dots, m, \quad (3)$$

zur Bestimmung der Konstanten  $a_i$ . Es gibt nur dann nichttriviale Lösungen (triviale Lösung: alle  $a_i = 0$ ), wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet,

$$\det(\lambda \underline{E} - \underline{A}) = 0. \quad (4)$$





Dies ist eine algebraische Gleichung  $m$ -ten Grades der allgemeinen Form

$$b_0 \lambda^m + b_1 \lambda^{m-1} + \dots + b_{m-1} \lambda + b_m = 0 \quad (\text{spez. } b_0 = 1) \quad (5)$$

zur Bestimmung jener  $m$  möglichen Werte von  $\lambda$  (Eigenwerte),  $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(m)}$ , für die der Ansatz (2) das System (1) löst. Zu jedem Eigenwert  $\lambda^{(i)}$  gehört ein Satz von Zahlen  $\underline{a}^{(i)} = \{a_j^{(i)}, j=1, \dots, m\}$  ("Eigenvektor" zum  $i$ -ten Eigenwert), die sich aus (3) berechnen lassen und bis auf einen gemeinsamen konstanten Faktor bestimmt sind. Die allgemeine Lösung von (1) ist dann

$$\underline{y}_s = c^{(1)} \underline{a}^{(1)} e^{\lambda^{(1)} t} + \dots + c^{(m)} \underline{a}^{(m)} e^{\lambda^{(m)} t}, \quad c^{(i)} = \text{konst.} \quad (6)$$

Die Eigenwerte  $\lambda^{(i)}$ , also die Wurzeln der "charakteristischen Gleichung" (4) bzw. (5), kennzeichnen das Verhalten der Lösung. Für eine reelle Matrix  $A$  sind sie entweder reell, oder sie treten in konjugiert komplexen Paaren auf. Besitzt irgendein Eigenwert einen positiven Realteil, so wächst die Störbewegung exponentiell an: Instabilität. Umgekehrt klingt die Störbewegung ab, wenn sämtliche Eigenwerte negative Realteile aufweisen.





Kriterium von Hurwitz: Eine algebraische Gleichung der Form (5) mit reellen Koeffizienten und  $b_0 > 0$  (ev. Multiplikation mit  $-1$ ) besitzt genau dann nur Wurzeln mit negative Realteilen, wenn die  $m$  Determinanten

$$D_1 = b_1, \quad D_2 = \begin{vmatrix} b_1 & b_0 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} b_1 & b_0 & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 \\ b_5 & b_4 & b_3 \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad D_m = \begin{vmatrix} b_1 & b_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{2m-1} & b_{2m-2} & \dots & b_m & & \end{vmatrix}$$

alle positiv sind ( $b_r = 0$  zu setzen, wenn  $r > m$ )

a) Die erweiterten Hochlaufgleichungen einer Asynchronmaschine (Lösung c) zu Übungsaufgabe 4), Abschnitt 1.11.) besitzen die Form eines nichtlinearen Systems von drei Gleichungen erster Ordnung; stationäre Zustände für konstantes Lastmoment  $M_B$  werden durch

$$y_2^0 = \frac{y_3^0}{1 + y_3^0{}^2} = \frac{M_B}{M_K}, \quad y_1^0 + y_2^0 y_3^0 = 0 \quad \frac{M_{B1}}{I_n} = \frac{M_B}{2M_K}$$

beschrieben. Wie viele stationäre Zustände gibt es zu einem Wert  $M_0$  (Skizze!)?





- b) Linearisieren Sie die Differentialgleichungen um diese stationären Zustände und geben Sie die charakteristische Gleichung an.
- c) Welche Aussagen über die Stabilität der Asynchronmaschine gegenüber kleinen Störungen (einfachstes Modell) liefert das Hurwitz-Kriterium?
- 

Lösung:

a) zwei stationäre Zustände für  $|M_B| < M_K$

b)  $\lambda^3 + 2\lambda^2 + [1 + y_3^{o2} + k/(1 + y_3^{o2})]\lambda + k(1 - y_3^{o2})/(1 + y_3^{o2}) = 0$  ✓

c) stabil (instabil) bei  $M_B = \text{konst.}$  für  $|y_3^o| < 1$  ( $> 1$ ),  
d.h.  $-s_K < s^o < s_K$  ( $|s^o| > s_K$ )





### Aufgabe 1.13-2: Lösung:

A) Methodik der Lösung linearer Diff. gl. Systeme anhand eines Beispiels  $n=2$

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}}_{y} \quad \tilde{A} = (2 \times 2)\text{-Matrix} \quad \left. \begin{array}{l} \dot{y}_1 = y_1 + 2y_2 \\ \dot{y}_2 = 3y_1 + y_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{zwei gekoppelte lin. DGL.} \\ \text{erster Ordnung mit konst.} \\ \text{Koeff.} \end{array}$$

$\dot{y} = \tilde{A} \cdot y$  entspricht einer Diff. gl. zweiter Ordnung: 1 Koeff.

$$\ddot{y}_1 = \dot{y}_1 + 2\dot{y}_2 = \dot{y}_1 + 2 \cdot (3y_1 + y_2) = \dot{y}_1 + 6y_1 + \frac{2}{2}(\dot{y}_1 - y_1) = 2\dot{y}_1 + 5y_1$$

$$\ddot{y}_1 - 2\dot{y}_1 - 5y_1 = 0 \quad \text{und} \quad y_2 = (\dot{y}_1 - y_1)/2$$

Lösung:  $y_1 = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t}$ ,  $\lambda_{1,2}$  aus  $\lambda^2 - 2\lambda - 5 = 0$ :  $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+5} = 1 \pm \sqrt{6}$

$$\dot{y}_1 = \lambda_1 k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \Rightarrow y_2 = k_1 \frac{\lambda_1 - 1}{2} e^{\lambda_1 t} + k_2 \frac{\lambda_2 - 1}{2} e^{\lambda_2 t}$$

$$\underline{y_1 = k_1 e^{(1+\sqrt{6})t} + k_2 e^{(1-\sqrt{6})t}}, \quad \underline{y_2 = k_1 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} e^{(1+\sqrt{6})t} + k_2 \cdot (-\sqrt{\frac{3}{2}}) \cdot e^{(1-\sqrt{6})t}} \quad (*)$$



Alternativer Lösungsweg über Matrizenrechnung:

$$\underline{y} = \underline{q} e^{\lambda t}, \underline{q} = (q_1, q_2), \dot{\underline{y}} = \underline{q} \lambda e^{\lambda t} = \underline{A} \cdot \underline{y} = \underline{A} \cdot \underline{q} e^{\lambda t} : \underline{q} \lambda = \underline{A} \underline{q} = \lambda \cdot \underline{E} \underline{q}$$

$$(\lambda \underline{E} - \underline{A}) \cdot \underline{q} = 0$$

$$\text{Det}(\lambda \underline{E} - \underline{A}) = 0, \text{ da } \underline{q} \neq 0 \quad \underline{q} = (0, 0)$$

$\lambda \underline{E} - \underline{A}$  muss immer abhängiges Gleichungssystem für  $\underline{q}$  sein!

$$\text{Det}(\lambda \underline{E} - \underline{A}) = 0 : \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -3 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0 = (\lambda - 1)^2 - 6 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 5 = 0$$

$$\lambda_{1/2} = 1 \pm \sqrt{6} = \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}$$

$$\underline{y} = c^{(1)} \underline{q}^{(1)} e^{\lambda^{(1)} t} + c^{(2)} \underline{q}^{(2)} e^{\lambda^{(2)} t}$$

Berechnung von  $\underline{q}^{(1)}, \underline{q}^{(2)}$  aus  $(\lambda^{(1)} \underline{E} - \underline{A}) \underline{q}^{(1)} = 0$ . Wegen linearer Abhängigkeit sind  $\underline{q}^{(i)}$  nur bis auf einen multiplikativen Faktor berechenbar.

$$\left[ \begin{pmatrix} \lambda^{(1)} & 0 \\ 0 & \lambda^{(1)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} q_1^{(1)} \\ q_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} (1 - \lambda^{(1)}) \cdot q_1^{(1)} + 2q_2^{(1)} &= 0 & (1) \\ 3q_1^{(1)} + (1 - \lambda^{(1)}) \cdot q_2^{(1)} &= 0 & (2) \end{aligned}$$

$$(1) \text{ und } (2) \text{ bis auf Vorzeichen identisch: } 3q_1^{(1)} = -(1 - \lambda^{(1)}) q_2^{(1)} = -(1 - 1 - \sqrt{6}) q_2^{(1)}$$

$$q_1^{(1)} = (\sqrt{6}/3) \cdot q_2^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot q_2^{(1)}$$

Analoge Rechnung für  $\lambda^{(2)}$ :

$$3q_1^{(2)} = -(1 - \lambda^{(2)}) q_2^{(2)} = -(1 - 1 + \sqrt{6}) q_2^{(2)} = -\sqrt{6} \cdot q_2^{(2)} : q_1^{(2)} = -\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot q_2^{(2)}$$

$$\text{Wir setzen } q_2^{(1)} = 1, q_2^{(2)} = 1 : \Rightarrow \underline{q}^{(1)} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{q}^{(2)} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{y} = c^{(1)} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{(1+\sqrt{6})t} + c^{(2)} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ 1 \end{pmatrix} e^{(1-\sqrt{6})t}$$

dies ist identisch mit der Lösung (\*),

$$\text{wenn } K_1 = c^{(1)} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}, K_2 = c^{(2)} \cdot \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

$$\underline{y} = K_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix} \cdot e^{(1+\sqrt{6})t} + K_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix} \cdot e^{(1-\sqrt{6})t}$$





Anwendung des HURWITZ-Kriteriums:  $b_0 > 0$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 5 = 0$$

$D_1 = b_1 > 0$  ( $b_1 = -2 < 0$ ): also mind. ein  
Eigenwert positiv!

$$b_0 \lambda^2 + b_1 \lambda + b_2 = 0, \quad b_0 = 1, \quad b_1 = -2$$

$$b_2 = -5$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} b_1 & b_0 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_0 \\ 0 & b_2 \end{vmatrix} = b_1 b_2 = (-2) \cdot (-5) = 10 > 0 \quad \checkmark$$

$b_3 = 0$ , da  $3 > m = 2$

Schlüsseldiskriminante  $\lambda_1 = 1 + \sqrt{6} > 0$ , mit  $\lambda_2 = 1 - \sqrt{6} < 0$ . Also instabile Lösung

B) Hodographgleichungen der Anagnosemaschine bei  $R_s = 0$  aus dem

Stationärpunkt  $s = 1$ : (PFaff-JORDAN-Gleichungen)

$$\dot{y}_1 = -y_1 - y_2 y_3 \quad \dot{y}_2 = -y_2 + y_3 + y_1 y_3 \quad \dot{y}_3 = -k y_2 + m_{B1}, \quad m_{B1} = \frac{M_{B1}}{(W_s s_k)^2}$$

Aufangsbedingungen:  $y_2(0) = M_{B0} / (2M_k) \quad y_1(0) + y_2(0) y_3(0) = 0 \quad y_3(0)(1 + y_1(0)) = y_2(0)$

a) stationäre Lösung:  $d/d\tau = 0 \Rightarrow 0 = -y_1^0 - y_2^0 y_3^0 \quad 0 = -y_2^0 + y_3^0 + y_1^0 y_3^0$

$$k = \frac{1}{P} = \frac{2M_k}{(W_s s_k)^2}$$

$$0 = -k y_2^0 + m_{B1}$$

P: PFaff-JORDAN-Parameter

$$y_2^0 = \frac{m_{B1}}{k} = \frac{M_{B1}}{2M_k}, \quad y_1^0 = -y_2^0 y_3^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 - y_2^0 y_3^0) y_3^0 = y_2^0 \Rightarrow$$

$$y_3^0 = \frac{s^0}{s_k} : \quad y_2^0 = \frac{y_3^0}{1 + y_3^{02}} = \frac{M_{B1}}{2M_k} = \frac{1}{\frac{1}{y_3^0} + y_3^0}$$

$$\Rightarrow y_2^0 = \frac{y_3^0}{1 + y_3^{02}}$$

$$y_3^0 - \frac{y_3^0}{y_2^0} + 1 = 0 : \quad y_3^0 = \frac{M_k}{M_{B1}} \pm \sqrt{\left(\frac{M_k}{M_{B1}}\right)^2 - 1} = \frac{s_{0,1,2}}{s_k} \quad y_1^0 = -\frac{y_3^{02}}{1 + y_3^{02}}$$



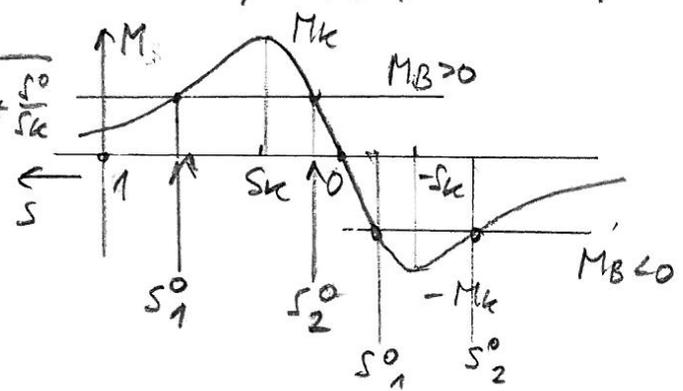


Dies entspricht direkt der KLOSS'schen Funktion für symmetrische Anym. math.:

$$Y_2^0 = \frac{1}{Y_3^0 + Y_3^0} = \frac{M_B}{2M_k} \quad ; \quad \frac{M_B}{M_k} = \frac{2}{\frac{s_k}{s_0} + \frac{s_0}{s_k}}$$

$$\frac{s_{0,1,2}^0}{s_k} = \frac{M_k}{M_B} \pm \sqrt{\left(\frac{M_k}{M_B}\right)^2 - 1}$$

$|M_k| \geq |M_B|$ , sonst nicht reell



a) Linearisierung:  $y_1(t) = y_1^0 + \Delta y_1(t), y_2(t) = y_2^0 + \Delta y_2(t), y_3(t) = y_3^0 + \Delta y_3(t)$   
 $|\Delta y/y| \ll 1$

$$\dot{y}_1 = -y_1 - y_2 y_3 \Rightarrow \Delta \dot{y}_1 = -\dot{y}_1^0 - \Delta \dot{y}_1 - (y_2^0 y_3^0 + y_2^0 \Delta y_3 + y_3^0 \Delta y_2 + \Delta y_2 \Delta y_3) \ll 1$$

$$\dot{y}_2 = -y_2 + y_3 + y_1 y_3 \Rightarrow \Delta \dot{y}_2 = -\dot{y}_2^0 - \Delta \dot{y}_2 + \dot{y}_3^0 + \Delta \dot{y}_3 + (y_1^0 y_3^0 + y_1^0 \Delta y_3 + y_3^0 \Delta y_1 + \Delta y_1 \Delta y_3) \ll 1$$

$$\dot{y}_3 = k y_2 + m_B \Rightarrow \Delta \dot{y}_3 = -k y_2^0 - k \Delta y_2 + m_B$$

linearisiertes Gleichungssystem im Nebenvektor  $(y_1^0, y_2^0, y_3^0)$ , also bei  $s^0$  als Schwingf!

$$\left. \begin{aligned} \Delta \dot{y}_1 &= -\Delta y_1 - y_3^0 \Delta y_2 - y_2^0 \Delta y_3 \\ \Delta \dot{y}_2 &= y_3^0 \Delta y_1 - \Delta y_2 + (1 + y_1^0) \Delta y_3 \\ \Delta \dot{y}_3 &= -k \cdot \Delta y_2 \end{aligned} \right\} \Delta \dot{y} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & -y_3^0 & -y_2^0 \\ y_3^0 & -1 & 1 + y_1^0 \\ 0 & -k & 0 \end{pmatrix}}_A \cdot \Delta y$$

$A = 3 \times 3$ -Matrix  
 $m=3$





$$\det(\lambda E - A) = 0 = \begin{vmatrix} \lambda+1 & \gamma_3^0 & \gamma_2^0 \\ -\gamma_3^0 & \lambda+1 & -1-\gamma_1^0 \\ 0 & k & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2 \lambda + \gamma_2^0 (-\gamma_3^0) k + k \cdot (\lambda+1) \cdot (1+\gamma_1^0) + \lambda \cdot \gamma_3^{02}$$

Regel von Sarrus

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda \cdot \{1 + k(1+\gamma_1^0) + \gamma_3^{02}\} + k(1+\gamma_1^0 - \gamma_2^0 \gamma_3^0) = 0$$

Mit  $1+\gamma_1^0 = 1 - \gamma_2^0 \gamma_3^0 = 1 - \gamma_3^{02} \cdot \frac{1}{1+\gamma_3^{02}} = \frac{1}{1+\gamma_3^{02}}$  folgt:  $1 + \gamma_1^0 - \gamma_2^0 \gamma_3^0 = \frac{1}{1+\gamma_3^{02}} - \frac{\gamma_3^{02}}{1+\gamma_3^{02}} = \frac{1-\gamma_3^{02}}{1+\gamma_3^{02}}$

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda \cdot \left\{ 1 + \frac{k}{1+\gamma_3^{02}} + \gamma_3^{02} \right\} + k \cdot \frac{1-\gamma_3^{02}}{1+\gamma_3^{02}} = 0$$

c)  $\lambda^3 \cdot b_0 + b_1 \lambda^2 + b_2 \lambda + b_3 = 0$   $b_0 = 1, b_1 = 2, b_2 = 1 + \frac{k}{1+\gamma_3^{02}} + \gamma_3^{02}$   
 $b_3 = k \cdot \frac{1-\gamma_3^{02}}{1+\gamma_3^{02}}$

HURWITZ:  $m=3 \Rightarrow b_4=0, b_5=0$

$b_0 > 0$ :  $D_1 = b_1 = 2 > 0$ ,  $D_2 = \begin{vmatrix} b_1 & b_0 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix} = 2b_2 - b_3 =$

$$= 2 + \frac{2k}{\gamma_3^{02}+1} + 2\gamma_3^{02} - k \frac{1-\gamma_3^{02}}{1+\gamma_3^{02}} = \frac{2(1+\gamma_3^{02})^2 + 2k - k + k\gamma_3^{02}}{1+\gamma_3^{02}} > 0, \text{ da } k > 0, \gamma_3^{02} > 0$$

$D_3 = \begin{vmatrix} b_1 & b_0 & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 \\ b_5 & b_4 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ b_3 & b_2 & 2 \\ 0 & 0 & b_3 \end{vmatrix} = 2(1+\gamma_3^{02})^2 + k(1+\gamma_3^{02}) > 0$

$$= 2b_2b_3 - b_3^2 = \underbrace{(2b_2 - b_3)}_{D_2} b_3 \geq 0, \text{ da } b_3 \geq 0$$

$D_2 > 0$

$b_3 = k \cdot \frac{1-\gamma_3^{02}}{1+\gamma_3^{02}} > 0$  für  $\gamma_3^{02} < 1$ , also  $\left(\frac{s^0}{s_k}\right)^2 < 1$ , also  $s_k < s^0 < -s_k$   
 Fließ

"  $< 0$  für  $\gamma_3^{02} > 1$ , also  $\left(\frac{s^0}{s_k}\right)^2 > 1$  also  $|s^0| > s_k$  instabil

