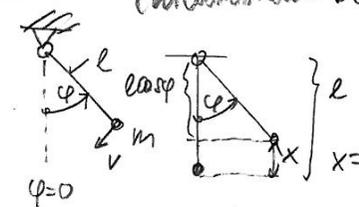




1.14. Nichtlineare Systeme

Die vollständige analytische Behandlung elektromechanischer Systeme, die durch nichtlineare Gleichungen beschrieben werden, ist nur in speziellen Fällen möglich. Bevor jedoch diverse Näherungsverfahren angewendet oder Simulationen mit Hilfe eines Rechners vorgenommen werden, sollte möglichst viel über das Systemverhalten bekannt sein. Dazu dienen Untersuchungen qualitativer Natur. Anhand einiger Beispiele sollen typische nichtlineare Phänomene aufgezeigt werden.

Beispiel A: Mechan. Pendel: ungedämpft : $W_k = W_k^* = \frac{mv^2}{2} = m \frac{1}{2} (l\dot{\varphi})^2$
(nichtlineare DGL)



$W_p = mgx$, bei $\varphi=0$: $W_p=0 \Rightarrow W_p = mgl(1 - \cos\varphi)$

$n=1$: $\varphi = \varphi_1$
 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial W_k^*}{\partial \varphi} + \frac{\partial W_p}{\partial \varphi} + f_1^d = f_1$
= 0 keine äußeren Kräfte
= 0 keine Dämpfungskraft

$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial W_k^*}{\partial \varphi} + \frac{\partial W_p}{\partial \varphi} = 0$; $\frac{d}{dt} (ml^2\ddot{\varphi}) - 0 + mgl \sin\varphi = 0$

1) Schwingungsgleichung: $ml^2\ddot{\varphi} + mgl \sin\varphi = 0$ DGL. 2. Ordnung, nichtlinear!



1.14.1. Verlustfreie und konservative Systeme

Wird dem System von außen keine Energie zugeführt und tritt keine Energiedissipation auf, so ist die Summe aus kinetischer und potentieller Energie konstant. Diese Bedingung schränkt die "kinematisch zulässigen Bewegungen" auf eine bestimmte Klasse ein. Besitzt das System nur einen Freiheitsgrad, so läßt sich damit die Bewegung vollständig charakterisieren.

Allgemeine Systemgleichungen:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial W_k^*}{\partial q_i} + \frac{\partial W_p}{\partial q_i} + f_i^d = f_i, \quad i=1, \dots, n$$

Multiplikation mit \dot{q}_i , Summation:



$$\sum_i \dot{z}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{z}_i} \right) - \sum_i \frac{\partial W_k^*}{\partial z_i} \dot{z}_i + \sum_i \frac{\partial W_p}{\partial z_i} \dot{z}_i = \sum_i (f_i - f_i^d) \dot{z}_i$$

$W_k^*(q_i, \dot{q}_i, t)$
 $W_p(q_i, t)$

Nun ist

$$\sum_i \dot{z}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{z}_i} \right) = \sum_i \frac{d}{dt} \left(\dot{z}_i \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{z}_i} \right) - \sum_i \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{z}_i} \ddot{z}_i$$

$$\sum_i \frac{\partial W_k^*}{\partial z_i} \dot{z}_i = \frac{dW_k^*}{dt} - \sum_i \frac{\partial W_k^*}{\partial z_i} \ddot{z}_i - \frac{\partial W_k^*}{\partial t}$$

$$\sum_i \frac{\partial W_p}{\partial z_i} \dot{z}_i = \frac{dW_p}{dt} - \frac{\partial W_p}{\partial t}$$

$dW_k = \vec{g} \cdot \vec{v} - W_k$
 $W_k^* = \vec{g} \cdot \vec{v} - W_k$
 $\sum_i \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{z}_i} \dot{z}_i = \sum_i g_i \cdot v_i = \vec{g} \cdot \vec{v}$
SG: $g_i = \frac{\partial W_k^*}{\partial v_i} = \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{z}_i}$, $W_k = \int v dg$

und damit

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left[\underbrace{\sum_i \dot{z}_i \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{z}_i}}_{W_k} - W_k^* + W_p \right]} = \sum_i (f_i - f_i^d) \dot{z}_i - \frac{\partial W_k^*}{\partial t} + \frac{\partial W_p}{\partial t} \quad (1)$$

W , die Summe aus kinetischer und potentieller Energie, ist unabhängig von der Zeit und gleich einem konstanten Wert (der z.B. durch die Anfangsbedingungen festgelegt ist), wenn die rechte Seite von (1) verschwindet. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn keine äußeren und dissipativen Kräfte wirken (Abgeschlossenheit und Verlustfreiheit), und wenn überdies die kinetische Ergänzungsenergie und die potentielle Energie nicht explizit von der Zeit abhängen.





$$\frac{d}{dt} \left[\underbrace{\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{q}_i}}_a - \underbrace{W_k^*}_b + \underbrace{W_p}_c \right] = \underbrace{\sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{q}_i} \right) \cdot \dot{q}_i}_a + \sum_i \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i -$$

$W_k^*(q_i, \dot{q}_i, t)$!
 $W_p(q_i, t)$!

$$- \underbrace{\left[\sum_i \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{q}_i} \cdot \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial W_k^*}{\partial t} \right]}_b +$$

$$+ \underbrace{\sum_i \frac{\partial W_p}{\partial \dot{q}_i} \cdot \dot{q}_i + \frac{\partial W_p}{\partial t}}_c =$$
$$= \underbrace{\sum_i \dot{q}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{q}_i} \right)}_{\sum_i (f_i - f_i^d) \cdot \dot{q}_i} - \sum_i \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{q}_i} \cdot \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial W_p}{\partial \dot{q}_i} \cdot \dot{q}_i - \frac{\partial W_k^*}{\partial t} + \frac{\partial W_p}{\partial t} = \sum_i (f_i - f_i^d) \cdot \dot{q}_i - \frac{\partial W_k^*}{\partial t} + \frac{\partial W_p}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left[\underbrace{\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{q}_i}}_{W_k} - W_k^* + W_p \right] = \frac{d}{dt} [W_k + W_p] = \sum_i (f_i - f_i^d) \dot{q}_i - \frac{\partial W_k^*}{\partial t} + \frac{\partial W_p}{\partial t}$$





Manchmal läßt sich die Gleichung (1) so umformen, daß Anteile der rechten Seite als totale Zeitableitungen ausgedrückt werden können und so nach links verschiebbar sind. Sind etwa die äußeren Kräfte konstant oder hängen sie nur von den verallgemeinerten Koordinaten ab, so läßt sich ein "Potential" \bar{W}_p dieser Kräfte finden falls

$$\frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial f_i}{\partial q_i} \quad (\text{Vgl. Formel "Integrabilitätsbed."})$$

f_i: Gradientenfeld zu \bar{W}_p S.3)

Die Kräfte sind dann "konservativ" und es gilt

$$f_i = - \frac{\partial \bar{W}_p}{\partial q_i}, \quad \text{d.h.} \quad \sum_i f_i \dot{q}_i = - \frac{d\bar{W}_p}{dt} \quad (\text{Tot. Diff.})^* \quad \text{Leistung}$$

*\bar{W}_p wird definiert
 \bar{W}_p hängt nicht explizit
von der Zeit ab:
 $\partial \bar{W}_p / \partial t = 0$*

\bar{W}_p wird in diesem Fall einfach zu W_p gezählt und rechts verschwinden die f_i . Ähnliches gilt für dissipative Kräfte¹⁾. Schließlich können auch W_k^* und W_p über additive reine Zeitfunktionen explizit von t abhängen.

$$^1) W_k + W_p + \bar{W}_p = \tilde{W}$$

Läßt sich also die Energiegleichung (1) in der Form

$$\boxed{d\tilde{W}/dt (= \dot{\tilde{W}}) = 0}$$

$$^2) \frac{d\tilde{W}}{dt} = \frac{\partial W_p}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial W_p}{\partial q_i} \dot{q}_i \quad (2)$$

$-f_i \cdot \dot{q}_i$





$$W_k^* = \vec{g} \cdot \vec{v} - W_k = \sum_i g_i v_i - W_k \Rightarrow g_i = \frac{\partial W_k^*}{\partial v_i} = \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{q}_i} \text{ , da } W_k^*(q_i, \dot{q}_i, t)$$

$$\Rightarrow W_k = \sum_i \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{q}_i} \cdot \dot{q}_i - W_k^*$$

$$\text{Sei } \vec{f} = -\text{grad } \bar{W}_p \Rightarrow f_i = -\frac{\partial \bar{W}_p}{\partial q_i} \text{ , also mit } \bar{W}_p(q_i, t) \Rightarrow \frac{d\bar{W}_p}{dt} = \left[\frac{\partial \bar{W}_p}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{W}_p}{\partial t} \right] \text{ und}$$

$$\text{wenn } \frac{\partial \bar{W}_p}{\partial t} = 0 \text{ , also nur } \bar{W}_p = W_p(q_i) \text{ , somit: } \frac{d\bar{W}_p}{dt} = \sum_i f_i \dot{q}_i$$

$$\frac{d}{dt} [W_k + W_p] = \sum_i f_i \dot{q}_i - \sum_i f_i^d \dot{q}_i - \frac{\partial W_k^*}{\partial t} + \frac{\partial W_p}{\partial t} \Rightarrow \frac{d}{dt} \underbrace{[W_k + W_p + \bar{W}_p]}_{\tilde{W}} = - \sum_i f_i^d \dot{q}_i - \frac{\partial W_k^*}{\partial t} + \frac{\partial W_p}{\partial t}$$

$$\text{Sei auch } \vec{f}^d = -\text{grad } \bar{\bar{W}}_p \text{ und } \bar{\bar{W}}_p(q_i) \text{ , dann: } \frac{d}{dt} [W_k + W_p + \bar{W}_p - \bar{\bar{W}}_p] = -\frac{\partial W_k^*}{\partial t} + \frac{\partial W_p}{\partial t}$$

$$\text{Falls } W_k^* = W_k^*(q_i, \dot{q}_i) \text{ , } W_p(q_i) \text{ , also } \frac{\partial W_k^*}{\partial t} = 0 \text{ , } \frac{\partial W_p}{\partial t} = 0 \text{ , dann: } \tilde{W}$$

$$\frac{d}{dt} [W_k + W_p + \bar{W}_p - \bar{\bar{W}}_p] = 0 \text{ bzw. } \underline{\underline{\tilde{W} = \text{konst.}}} \quad (3)$$





schreiben, so definiert \tilde{W} die (eventuell erweiterte) "Energie" des Systems. Wir bezeichnen das System dann als konservativ in bezug auf \tilde{W} (der Wert der Größe \tilde{W} bleibt erhalten), obwohl es weder abgeschlossen noch verlustfrei zu sein braucht:

$$\boxed{\tilde{W}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}; t) = \text{konst.} = \tilde{W}(\underline{q}_a, \underline{\dot{q}}_a; t_a)} \quad \underline{q}_a = \underline{q}(t_a), \underline{\dot{q}}_a = \underline{\dot{q}}(t_a). \quad (3)$$

Wenn \tilde{W} nicht explizit von der Zeit abhängt, dann beschreibt $\tilde{W}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) = \tilde{W}_0$ für jeden festen Wert \tilde{W}_0 eine $(2n-1)$ -dimensionale Hyperfläche im $2n$ -dimensionalen **Phasenraum**. Im speziellen erhalten wir für $n=1$ die Phasenkurven in der Phasenebene, die als Schichtenlinien der Energiefläche aufzufassen sind. Der Zusammenhang mit der Bewegungsgleichung ist durch

$$\frac{d}{dt} \tilde{W}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \underline{q}} \underline{\dot{q}} + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \underline{\dot{q}}} \underline{\ddot{q}} = 0, \quad (\text{keine explizite zeitabhängigkeit v. } \tilde{W}!)$$

d.h.

$$\left(\frac{1}{\underline{\dot{q}}} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \underline{\dot{q}}} \right) \underline{\ddot{q}} + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \underline{q}} = 0 \quad \text{oder} \quad \left(2 \frac{\partial \tilde{W}}{\partial (\underline{\dot{q}}^2)} \right) \underline{\ddot{q}} + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \underline{q}} = 0 \quad \frac{1}{\partial(\underline{\dot{q}}^2)} = \frac{1}{2 \underline{\dot{q}} \partial \underline{\dot{q}}}$$

(Vgl. $(m \underline{\dot{q}})^2 + kx = 0$)

hergestellt, sofern der "Trägheitskoeffizient" $(\partial \tilde{W} / \partial \underline{\dot{q}}) / \underline{\dot{q}}$ beschränkt bleibt.



Ein Gleichgewichtszustand $\underline{q} = \underline{q}^0 = \text{konst.}$ ist demnach durch

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \underline{q}}(\underline{q}^0, 0) = 0 \quad (4)$$

gekennzeichnet und, wenn er stabil im Sinne des Abschnitts 1.12.2. sein soll (Störbewegung des linearisierten Systems zumindest nicht aufklingend, $T > 0, D = 0 : K > 0$),

$$\frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial \underline{q}^2}(\underline{q}^0, 0) \succ 0, \quad (\stackrel{K}{=} \frac{\partial^2 \mathcal{L}(0, \dot{x})}{\partial \dot{x}^2} > 0 : S 45) \quad (5)$$

wenn also die Funktion $\tilde{W}(\underline{q}, 0)$ bei \underline{q}^0 ein Minimum besitzt. Man nennt $\tilde{W}(\underline{q}, 0)$ allgemein (für bel. n) deshalb "Potential", obwohl die Funktion (etwa über eingeprägte Ströme oder Geschwindigkeiten) auch kinetische Anteile besitzen kann.

Die Betrachtungen des letzten Abschnitts sind etwas oberflächlich. Tatsächlich müssen die Ableitungen (4) und (5) weder existieren, noch ist (5) notwendig oder hinreichend für ein Minimum. Überdies sind auf der linearisierten Störungsrechnung basierende Stabilitätsaussagen für ungedämpfte Systeme grundsätzlich problematisch. Trotzdem gilt: Notwendig für die Existenz eines stabilen Gleichgewichtszustandes \underline{q}^0 ist, daß $\tilde{W}(\cdot, 0)$ an dieser Stelle ein Minimum

$$\begin{array}{l} \uparrow \ddot{q} = 0 \\ \downarrow \dot{q} = 0 \end{array} \quad \text{z.B.: } \dot{f} = 0, \dot{f}^0 = 0 : W = W_k + W_p \\ W(\cdot, 0) = W_p, \text{ da } W_k \propto \dot{q}^2 (\dot{q} = 0)$$

annimmt (muß nicht analytisch sein). Wirkungsvolle Methoden für die Untersuchung der kritischen Punkte liefert die Katastrophentheorie. (Vmkuppeln stabil - stabil \rightarrow etc.)



Sei $\tilde{W} = \tilde{W}(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$, also $\partial \tilde{W} / \partial t = 0$, dann ist $\frac{d}{dt} \tilde{W} = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \vec{q}} \cdot \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \dot{\vec{q}}} \cdot \frac{\partial \dot{\vec{q}}}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \vec{q}} \cdot \dot{\vec{q}} + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \dot{\vec{q}}} \cdot \ddot{\vec{q}}$

für $n=1$:
 $(q_1 = q_1 = q)$ dym. Gleichung: $\left(\frac{1}{\dot{q}} \cdot \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \dot{q}} \right) \ddot{q} + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial q} = 0$ (*)

Stationäre Lösung von (*): $\partial / \partial t = 0 \Rightarrow \ddot{q} = 0$: $\left. \frac{\partial \tilde{W}}{\partial q} \right|_{\dot{q}=0, \ddot{q}=0} = 0 \Rightarrow q = p^0$: Lösung

Stabilitätsuntersuchung statisch:

$\mu(\dot{x}, x) \cdot \ddot{x} + \mathcal{R}(\dot{x}, x) = f$
 $\ddot{x} = \dot{x} = 0 : \mathcal{R}(0, x_0) = f$
 $\dot{p} = \dot{q} = 0 : \left(\frac{1}{\dot{q}} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \dot{q}} \right) \ddot{q} + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial q} = 0$

$K = \frac{\partial^2 \mathcal{R}}{\partial x^2}(0, x_0) > 0$ stabil

linearisiert \Leftrightarrow Störungsrechnung!

$\rightarrow \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial p^2}(0, p_0) > 0$ stabil (4)

$\frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial p^2}(0, p_0) > 0$ (5)



DIRICHLET'sches Stabilitätskriterium:

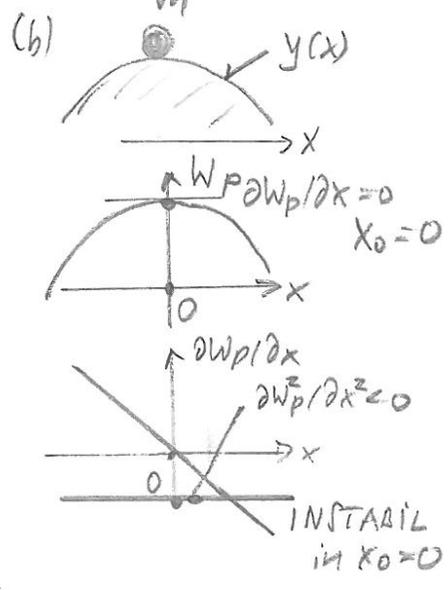
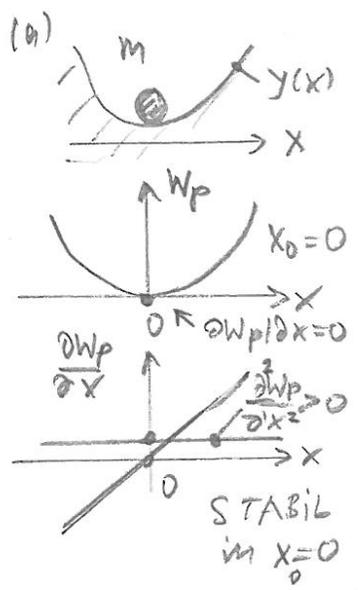
- (1) $\tilde{W}(q, \dot{q}) = \text{konst.} = W_k + W_p + \bar{W}_p - \bar{W}_p$
- (2) Gleichgewichtszustand: $\frac{\partial \tilde{W}}{\partial q} (q^0, 0) = 0$
- (3) (2) ist stabil, wenn $\frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial q^2} (q^0, 0) > 0$

$\tilde{W} = \tilde{W}(q, \dot{q})$

Die Gleichgewichtslage q^0 eines in Bezug auf \tilde{W} konservativen Systems ($\tilde{W} = \text{konst.}$) ist stabil, wenn die potentielle Energie $\tilde{W}(q, \dot{q}=0)$ dort ein Minimum besitzt, andernfalls instabil.

Beispiel: Kugel (a) im Tal, (b) auf Berg (Höhe m) Kugel kräftefrei

$W_k = 0, \bar{W}_p = 0, \bar{W}_p = 0$ ($f=0, f^d=0$)
 $W_p = m \cdot g \cdot y$ ($q=y$) $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$
 $(W_k = m v^2 / 2 = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) / 2 = 0)$
 $\dot{x}=0 \rightarrow \dot{y}=0!$
 $\tilde{W}(q, \dot{q}=0) = \tilde{W}(x, \dot{x}=0) = W_p$



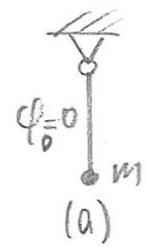
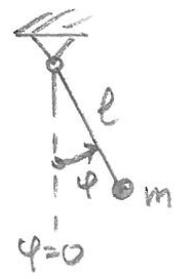
FAZIT: Stabilitätsuntersuchung auf zwei Arten möglich: $\begin{cases} \cdot \text{Störwertrechnung} \\ \cdot \text{Dirichlet-Kriterium} \end{cases}$





Beispiel: Pendel: $\ddot{\varphi} m l^2 + m g l \sin \varphi = 0$ bzw. $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$, $g/l = \omega_0^2$

Zwei Gleichgewichtslagen: (a) + (b). Welche ist stabil?



(i) Störrechnungen: kleine Ausschläge $\varphi(t) = \varphi_0 + \epsilon(t)$

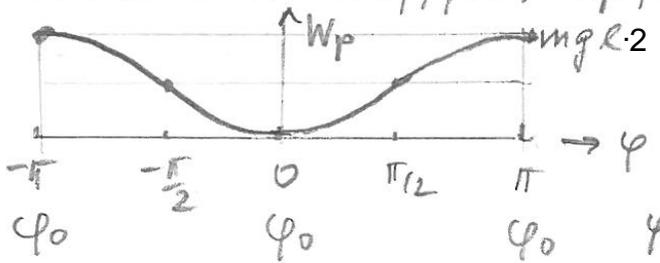
$\varphi_0 = 0$ $\ddot{\varphi} = \ddot{\epsilon}$, $\ddot{\epsilon} + \frac{g}{l} \sin(\varphi_0 + \epsilon) = \ddot{\epsilon} + \omega_0^2 (\sin \varphi_0 \cos \epsilon + \cos \varphi_0 \sin \epsilon) = 0$
 $\ddot{\epsilon} + \omega_0^2 \cos \varphi_0 \epsilon = -\omega_0^2 \sin \varphi_0$

(a): $\ddot{\epsilon} + \omega_0^2 \cdot 1 \cdot \epsilon = 0$ (b): $\ddot{\epsilon} + \omega_0^2 \cdot (-1) \cdot \epsilon = 0$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

(a): $\epsilon_a(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$: ungedämpftes Schwingen um $\varphi_0 = 0$ (STABIL)

(b): $\epsilon_b(t) = C e^{\omega_0 t} + D e^{-\omega_0 t}$: instabiler Punkt $\varphi_0 = \pi$. Natürlich geht ϵ_a nicht gegen Unendlich, sondern nur gegen $\varphi = 2\pi$ (Ruhelage (a)), aber dazu müsste die nicht lineare Dff. Gleichung $\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0$ gelöst werden und nicht die linearisierte Dff. Gleichung $\ddot{\epsilon} + \omega_0^2 \cos \varphi_0 \epsilon = -\omega_0^2 \sin \varphi_0$!

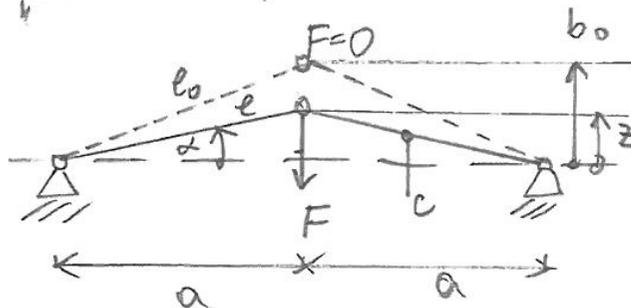
(ii) Dimittent: $\tilde{W} = \tilde{W}(\varphi, \dot{\varphi} = 0) = W_p$, $W_k = 0$ ($\overline{W_p}, \overline{W_k} = 0$!) $W_p = m g \gamma$, $\gamma = l - l \cos \varphi$



$\varphi_0 = 0$: $\frac{\partial \tilde{W}(\varphi, 0)}{\partial \varphi} = \frac{\partial W_p}{\partial \varphi} = 0$, $W_p = m g l (1 - \cos \varphi)$
 $\frac{\partial^2 W_p}{\partial \varphi^2} > 0$ STABIL
 $\varphi_0 = \pi, -\pi$: $\frac{\partial W_p}{\partial \varphi} = 0$, $\frac{\partial^2 W_p}{\partial \varphi^2} < 0$: INSTABIL



Katastrophen⁴-Theorie:



Beispiel: Durchschlagen zweier
gelenkig verbundener elastischer Druckstäbe bei Einzellast
(R. von Mises - Fachwerk)

Fächer, elastischer
Dreiselenkbogen bei $z=b_0$
unbelastet ($F=0$), unverformt = Stablänge l_0 .

Quelle: F. Ziegler, Techn.
Mechanik der festen und flüssigen
Körper, Springer, 1985, Wien

Durch Kraft F im Mittelpfeile gedreht, Stabelastizität (Federkonstante c), Stäbe verknüpft
auf $l < l_0$. Bis zu welcher Kraft F ist der Bogen stabil? Wann schlägt er durch? =

= "Katastrophe"!

$$n=1: W_p = c(l-l_0)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2, \quad \bar{W}_p = F(z-b_0) = A$$

Behandlung mit Dirichlet - Kriterium: $\dot{z} = \ddot{z} = 0: \tilde{W}(0, z) = W_p + A \cdot (-1) = W_p + \bar{W}_p$

$$l_0^2 = a^2 + b_0^2, \quad l^2 = a^2 + z^2, \quad \gamma = \frac{z}{a} = \tan \alpha, \quad (l-l_0)^2 = (\sqrt{a^2+z^2} - \sqrt{a^2+b_0^2})^2 = a^2(\sqrt{1+\gamma^2} - l_0/a)^2$$

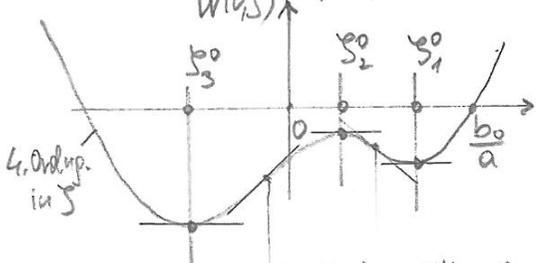
$$\tilde{W}(0, z) = F(z-b_0) + c a^2 \cdot (\sqrt{1+\gamma^2} - l_0/a)^2 \quad z \rightarrow \gamma \quad \tilde{W}(0, \gamma) = a F(\gamma - \frac{b_0}{a}) + c a^2 (\sqrt{1+\gamma^2} - \frac{l_0}{a})^2$$

$$\partial \tilde{W}(0, \gamma) / \partial \gamma = F \cdot a + 2 c a^2 \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}} \cdot 2 \gamma \cdot (\sqrt{1+\gamma^2} - \frac{l_0}{a}) = 0$$

$$F \cdot a + \frac{2 \gamma \cdot c a^2}{\sqrt{1+\gamma^2}} \cdot (\sqrt{1+\gamma^2} - \frac{l_0}{a}) = 0 \quad ; \quad \text{Transzendent Gleichung zum Finden der} \\ \text{Gleichgewichtslage } \gamma^0 \text{ für gegebenes } F$$



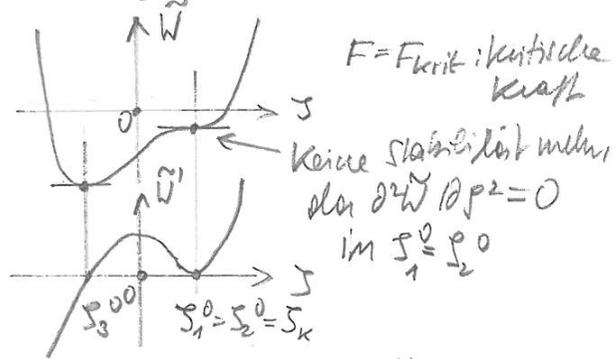
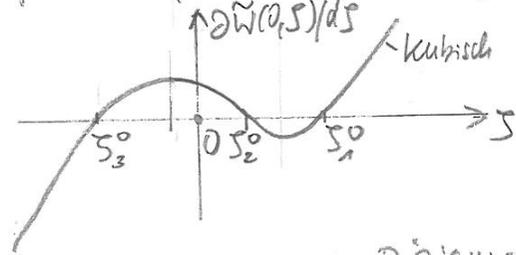
Beispiel: $\gamma \ll 1: \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}} \approx 1 - \frac{\gamma^2}{2}$; $F \cdot a + 2\gamma \cdot c a^2 (1 - \frac{\gamma_0}{a} (1 - \frac{\gamma^2}{2})) = \partial \tilde{W}(0, \gamma) / d\gamma =$



$= F \cdot a + (1 - \frac{\gamma_0}{a}) c \cdot 2a^2 \cdot \gamma + \gamma_0 a c \gamma^3 = 0$
 $\tilde{W}(0, \gamma = \frac{\gamma_0}{a}) = 0$, da dann $F=0$ und $l=l_0$

Kubische Gleichung in γ
 $\partial^2 \tilde{W}(0, \gamma) > 0$ bei γ_1^0, γ_3^0 : STABIL, aber γ_3^0 negativ
 < 0 bei γ_2^0 : INSTABIL (= durchgeschlagenes System)

Es interessiert die Stabilität aller Gleichgewichtslage $\gamma_n^0 > 0$. Mit steigendem F schiebt sich die Kurve $\partial \tilde{W}(0, \gamma) / d\gamma$ nach oben und γ_2^0 und γ_1^0 werden ein Punkt!

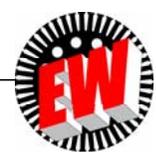


Stabilitätsbedingung nach DIRICHLET:
 $\frac{\partial^2 \tilde{W}(0, \gamma)}{\partial \gamma^2} \Big|_{\gamma=\gamma_n^0} = (F \cdot a + 4c a^2 \gamma (1 - \frac{\gamma_0}{a} \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}))' > 0$

$1 - \frac{\gamma_0}{a} \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}} + \gamma (-\frac{\gamma_0}{a}) (-\frac{1}{2}) \frac{2\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}^3} > 0$ | kritische Kraft F_k bei $\frac{\partial^2 \tilde{W}(0, \gamma)}{\partial \gamma^2} = 0, \gamma = \gamma_k$

$1 - \frac{\gamma_0}{a} [\frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}} - \frac{\gamma^2}{(\sqrt{1+\gamma^2})^3}] = 0$ $(\sqrt{1+\gamma^2})^3 - \frac{\gamma_0}{a} [1 + \gamma^2 - \gamma^2] = 0$
 $(1 + \gamma_k^2)^{3/2} = \frac{\gamma_0}{a} \Rightarrow \gamma_k = \sqrt{[\frac{\gamma_0}{a}]^{2/3} - 1} > 0$

Gleichgewichtsbedingung $\frac{d\tilde{W}(0, \gamma)}{d\gamma} = 0 = F_{krit} \cdot a \cdot \sqrt{1+\gamma_k^2} + 2\gamma_k c a^2 (\sqrt{1+\gamma_k^2} - \frac{\gamma_0}{a}) = 0$
 $\gamma = \gamma_k \Rightarrow F = F_{krit}$



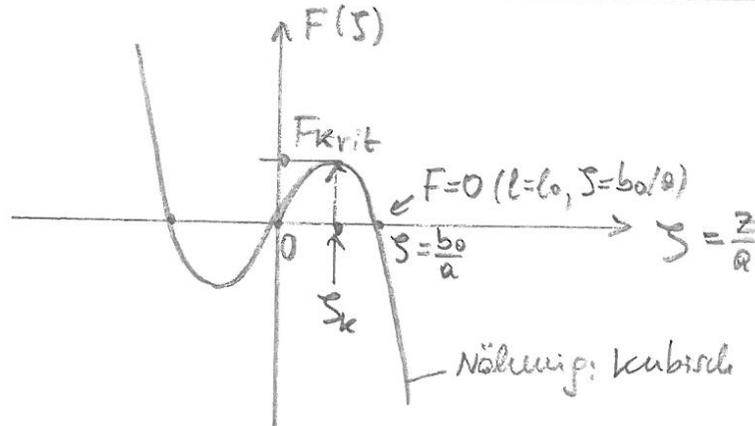


$$(1 + \gamma_k^2)^{1/2} = \left(\frac{l_0}{a}\right)^{1/3}; \quad F_{\text{krit}} \cdot \left(\frac{l_0}{a}\right)^{1/3} + 2 \cdot \left[\left(\frac{l_0}{a}\right)^{2/3} - 1\right]^{1/2} \cdot c \cdot a \cdot \left[\left(\frac{l_0}{a}\right)^{1/3} - \frac{l_0}{a}\right] = 0$$

$$\frac{l_0}{a} > 1!$$

$$F_{\text{krit}} + 2 \cdot \underbrace{\left[\left(\frac{l_0}{a}\right)^{2/3} - 1\right]^{1/2}}_{>0} \cdot c \cdot a \cdot \left[1 - \left(\frac{l_0}{a}\right)^{2/3}\right] = 0$$

$$F_{\text{krit}} = \left[\left(\frac{l_0}{a}\right)^{2/3} - 1\right]^{3/2} \cdot 2ca = 2cl_0 \cdot \left[1 - \left(\frac{a}{l_0}\right)^{2/3}\right]^{3/2}$$



Aus $d\tilde{W}(z, S)/dS = 0$ folgt: $F(S) = -2Sc \cdot a \cdot \left(1 - \frac{l_0}{a} \frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}}\right)$

Beispiel für $S \ll 1$: $F(S) \approx -2Sc \cdot a \left(1 - \frac{l_0}{a} \left(1 - \frac{S^2}{2}\right)\right) =$

$z=l_0, F=0$: $= 2Sc \left(a + l_0 - l_0 \frac{S^2}{2}\right) = \dots = +2Sc l_0 \left(1 - \frac{a}{l_0} - \frac{S^2}{2}\right)$

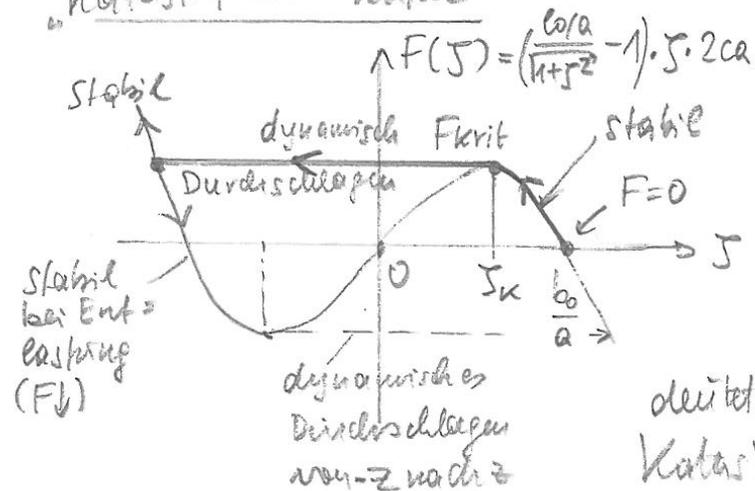
$$1 - \frac{a}{l_0} - \frac{1}{2} \frac{l_0^2}{a^2} = 1 - \frac{a}{l_0} - \frac{1}{2} \frac{l_0^2 - a^2}{a^2} = 1 - \frac{a}{l_0} - \frac{1}{2} \left(\frac{l_0}{a}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{a}{l_0} - \frac{1}{2} \left(\frac{l_0}{a}\right)^2 \neq 0$$

seltsame Nullstelle, ist aber nicht wegen Näherung $S \ll 1$





"Katastrophen"-Kurve



Mit steigendem F sinkt z und
 damit J . Ab $J < J_k$ sinkt
 J , obwohl auch Federkraft sinkt.
 Dies ist unphysikalisch und
 deutet das „Umkippen“ (Durchschlagen) als
 Katastrophe an.

Anmerkung: Bei kubischer Näherung:

$$J_k \approx \sqrt{\frac{2}{3}} \left(1 - \frac{a}{l_0}\right)$$

$$F_{krit} \approx 2cl_0 \left(\frac{2}{3} \left(1 - \frac{a}{l_0}\right)\right)^{3/2}$$

Mit $\frac{a}{l_0} = \frac{l_0 - \Delta}{l_0} = 1 - \frac{\Delta}{l_0}$ und $\frac{\Delta}{l_0} \ll 1 \Rightarrow J_k \approx \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \left(1 - \frac{a}{l_0}\right)} = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{\Delta}{l_0}} \approx \sqrt{\frac{\left(\frac{l_0}{a}\right)^2 - 1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\Delta}{l_0}$

$$\begin{aligned}
 F_{krit} &\approx 2cl_0 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \left(1 - \frac{a}{l_0}\right)\right)^{3/2} = 2cl_0 \left(\frac{2}{3} \frac{\Delta}{l_0}\right)^{3/2} = \\
 &= F_{krit} = 2cl_0 \cdot \left(1 - \frac{a}{l_0}\right)^{3/2} \checkmark
 \end{aligned}$$

Exakt:

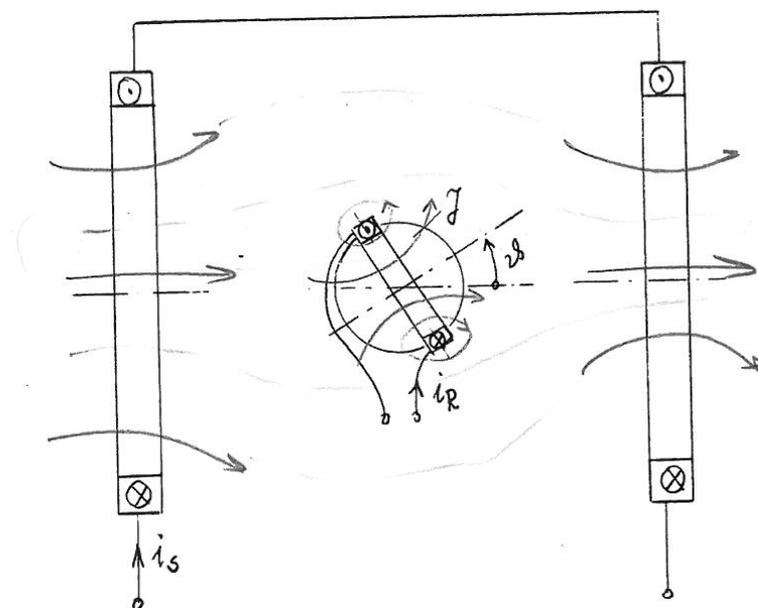
$$J_k = \sqrt{\frac{\left(\frac{l_0}{a}\right)^2 - 1}{3}}$$

$$F_{krit} = 2cl_0 \cdot \left(1 - \frac{a}{l_0}\right)^{3/2}$$



1.14.2. Beispiele

1) Drehspulensystem



$$n=1, \vartheta,$$

kinetische Ergänzungsenergie:

$$W_k^* = \frac{1}{2} \gamma \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} L_s i_s^2 + \frac{1}{2} L_R i_R^2 + L_{SR}(\vartheta) i_s i_R$$

Drehspule auf nicht magnetisierbarem Zylinder, Trägheitsmoment γ , mechanische Dämpfung und Reibung vernachlässigt.

Ströme i_s und i_R mit konstanten Werten eingeprägt (Rotor oder Stator können auch Modelle für Permanentmagneten sein).

System sei elektrisch linear.



kinetische Energie:

$$W_k = -W_k^* + \vec{g} \cdot \vec{v}, \quad g_i = \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{\varphi}_i}, \quad v_i = \dot{\varphi}_i = \dot{\vartheta} \quad (i=1, n=1)$$

$$W_k = \dot{\vartheta} \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{\vartheta}} - W_k^* = \frac{1}{2} \gamma \dot{\vartheta}^2 - \frac{1}{2} L_s \dot{i}_s^2 - \frac{1}{2} L_R \dot{i}_R^2 - L_{SR}(\vartheta) \dot{i}_s \dot{i}_R$$

$W_p = 0, f = 0, f^d = 0, W_k$ nicht explizit zeitabhängig. Aus (1) S.54 \Rightarrow

$$\dot{W}_k = \frac{d}{dt} \left[\underbrace{\frac{1}{2} \gamma \dot{\vartheta}^2 - L_{SR}(\vartheta) \dot{i}_R \dot{i}_s}_{\tilde{W}} - \underbrace{\frac{1}{2} L_s \dot{i}_s^2 - \frac{1}{2} L_R \dot{i}_R^2}_{\text{konst.}} \right] = 0$$

$$\dot{\vartheta} \frac{\partial}{\partial \dot{\vartheta}} \left(\frac{1}{2} \gamma \dot{\vartheta}^2 \right) - \frac{1}{2} \gamma \dot{\vartheta}^2 = \frac{1}{2} \gamma \dot{\vartheta}^2$$

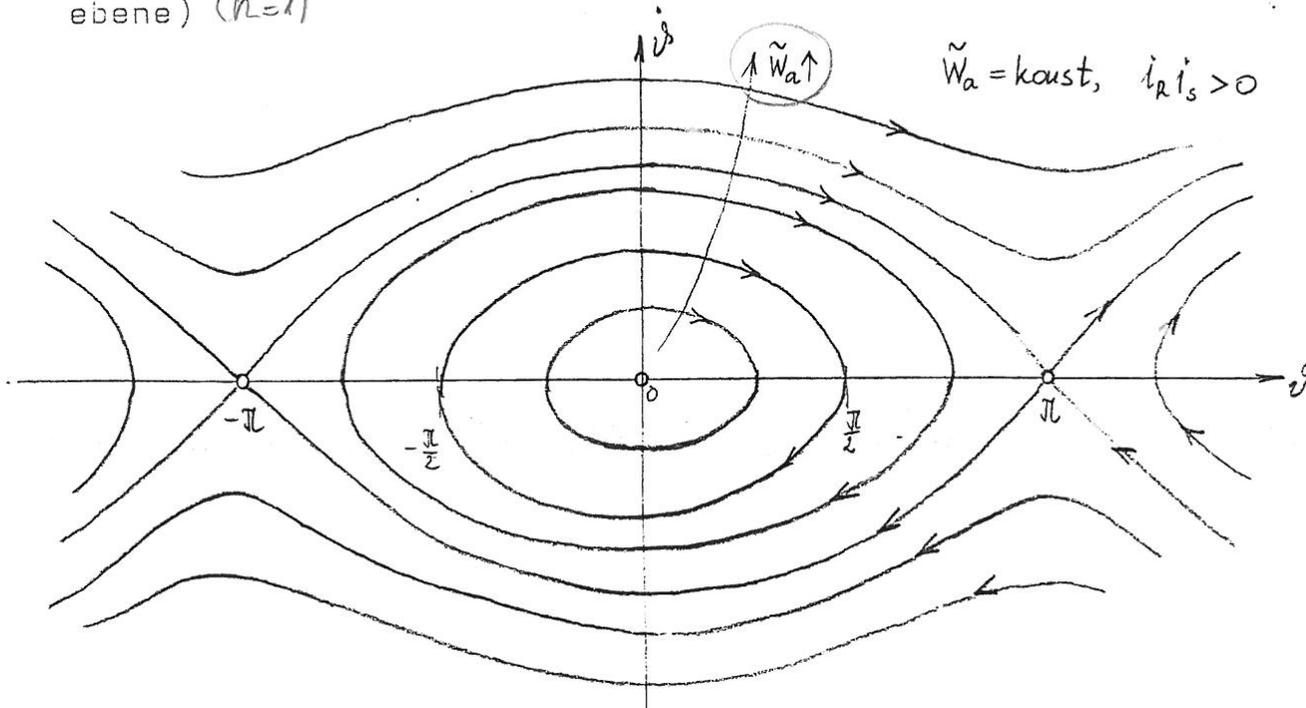
$$\frac{d\tilde{W}}{dt}(\vartheta, \dot{\vartheta}) = 0, \quad \tilde{W}(\vartheta, \dot{\vartheta}) = \frac{1}{2} \gamma \dot{\vartheta}^2 - L_{SR}(\vartheta) \dot{i}_R \dot{i}_s = \text{konst.} = \tilde{W}_a$$

Ist z.B. zu einem bestimmten Zeitpunkt t_a $\dot{\vartheta} = 0, \vartheta = \vartheta_a$, so gilt $\tilde{W}_a = -L_{SR}(\vartheta_a) \dot{i}_R \dot{i}_s$. Das System ist konservativ in bezug auf \tilde{W} . Angenommen, das von den äußeren Spulen erzeugte Magnetfeld ist in der Umgebung der drehbaren Spule im wesentlichen homogen:

$$L_{SR}(\vartheta) = L_g \cos \vartheta, \quad \tilde{W}(\vartheta, \dot{\vartheta}) = \frac{1}{2} \gamma \dot{\vartheta}^2 - L_g \dot{i}_R \dot{i}_s \cos \vartheta = \tilde{W}_a$$

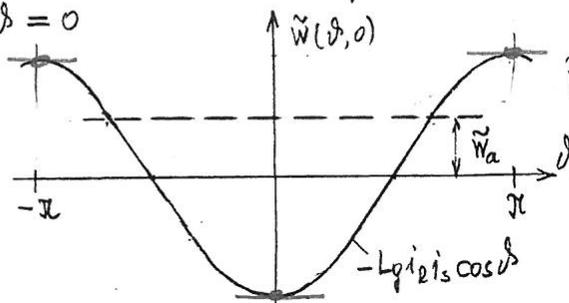


Phasenkurven sind bei konservativen Systemen die Schichtenlinien $\tilde{W}(\vartheta, \dot{\vartheta}) = \text{konst.}$ der "Energiefläche" über der $(\dot{\vartheta}, \vartheta)$ -Ebene (Phasenebene) ($n=1$)



"Potential" $\tilde{W}(\vartheta, 0) = -L_\varphi i_R i_S \cos \vartheta$
bei $\dot{\vartheta} = 0$

ist Schnitt der Energiefläche



$\tilde{W}(\vartheta, 0)$ hat Min. bei $\vartheta = 0$

hat Max. bei $\vartheta = \pi$ (Sattelpunkt
der Energiefläche)

Phasenkurven (1)

$$\tilde{W}(\tilde{\nu}, \dot{\tilde{\nu}}) = \frac{1}{2} \int \dot{\tilde{\nu}}^2 - L_g \dot{\nu} \dot{\nu} \cos \nu = \tilde{W}(\dot{\tilde{\nu}}_a, 0) = \tilde{W}_a$$

$$\dot{\tilde{\nu}}^2 - \frac{2}{\int} \cdot L_g \dot{\nu} \dot{\nu} \cdot \cos \nu = \frac{2}{\int} \tilde{W}_a \Rightarrow \underline{\dot{\nu}^2 - a \cdot \cos \nu = W}$$

Phasenkurven $\dot{\nu}(\nu)$ für variables W : $\dot{\nu} = \pm \sqrt{W + a \cos \nu}$, $a > 0$, $W + a \cdot \cos \nu \geq 0$!

$\cos \nu$ ist 2π -periodisch, daher Betrachtung für $\nu \in [-\pi, \pi]$ ausreicht

Fallunterscheidung: a) W negativ: a1) $W = -a$, a2) $-a < W < 0$

b) $W = 0$

c) W positiv: c1) $0 < W < a$, c2) $W = a$, c3) $W > a$

a1): $W + a \cos \nu = a(-1 + \cos \nu) \geq 0$ nur für $\nu = 0 \Rightarrow \dot{\nu} = 0$ $W = -a$: $(\nu, \dot{\nu}) = (0, 0)$

a2): $W + a \cos \nu = -|W| + a \cos \nu \geq 0$: Grenze bei $-|W| + a \cos \nu = 0$: $\nu = \pm \arccos \frac{|W|}{a}$

Form der Kurve für kleine $\nu, \dot{\nu}$ um Null (DUP) siehe Multiplikation 1:

$$\cos \nu \approx 1 - \nu^2/2, \nu \ll 1: \dot{\nu}^2 - a(1 - \nu^2/2) = W \Rightarrow a = \Delta + |W|, \frac{\dot{\nu}^2 + a\nu^2}{2} = W + a =$$

$$\frac{\dot{\nu}^2}{\Delta} + \frac{a\nu^2}{2(\Delta)^2} = 1, \left(\frac{\dot{\nu}}{B}\right)^2 + \left(\frac{\nu}{A}\right)^2 = 1, A = \Delta \cdot \sqrt{\frac{2}{a}}, B = \Delta$$

$$\frac{\dot{\nu}^2}{\Delta} + \frac{a\nu^2}{2(\Delta)^2} = 1, \left(\frac{\dot{\nu}}{B}\right)^2 + \left(\frac{\nu}{A}\right)^2 = 1, A = \Delta \cdot \sqrt{\frac{2}{a}}, B = \Delta$$

Ellipse

$A > B$ $0 < a < 2$, $A = B$: $a = 2$ (Kreis), $A < B$: $a > 2$

b): $W = 0$: $a \cos \nu = 0$ bei $\nu = \pm \pi/2$



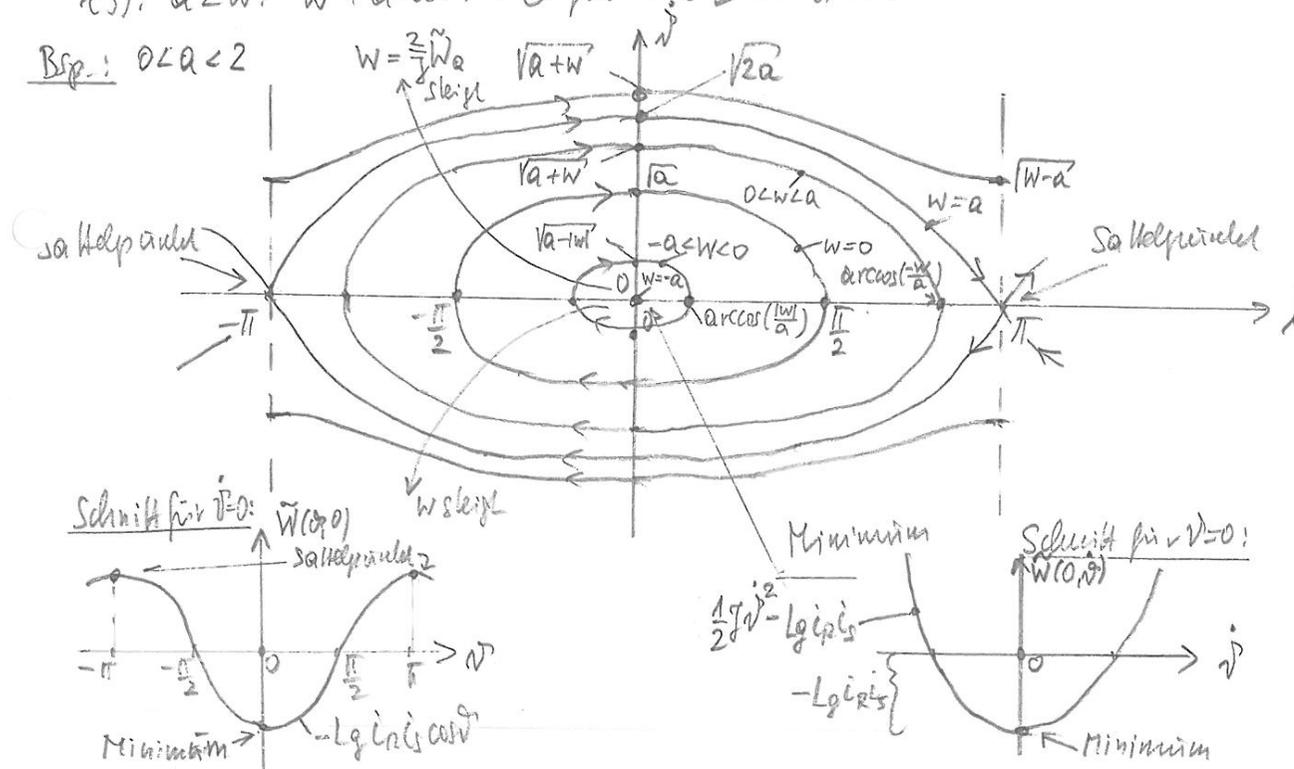
Phasenkurven (2)

c1): $0 < W < a$; $W + a \cdot \cos \vartheta = 0 \Rightarrow \vartheta = \pm \arccos(-W/a)$

c2): $W = a$; $\vartheta = \pm \arccos(-1) = \pm \pi$

c3): $a < W$; $W + a \cdot \cos \vartheta > 0$ für $\vartheta \in [-\pi, \pi]$, da $W - a > 0$

Bsp.: $0 < a < 2$



- Für $0 \leq W \leq a$ bzw. $0 \leq \tilde{W}_a \leq Lg ipis$ im $\vartheta \in [-\pi, \pi]$ beschränkt = periodische Pendelbewegung
- Für $W > a$ bzw. $\tilde{W}_a > Lg ipis$ im kon. Energie (z.B. $\vartheta = \frac{\pi}{2}$: $\tilde{W}_a = \frac{1}{2} \gamma a^2$) so genau, dass Reflektorenpole (ungleichförmig) rotiert, ϑ wächst kontinuierlich, während j innerhalb $(\tilde{W}_a \pm Lg ipis)$ beschränkt bleibt.





Phasenkurven und Potentialkurven vermitteln qualitativen Überblick über die Mannigfaltigkeit der möglichen Bewegungen.

Gibt es reelle Lösungen ϑ^0 von $\cos \vartheta = -\tilde{W}_a / (L_g i_s i_R)$ ($\dot{\vartheta} = 0$), so findet eine Pendelbewegung statt.

Bedingung: $|\tilde{W}_a / (L_g i_s i_R)| \leq 1$; Amplitude $\vartheta^0 = |\arccos(\frac{\tilde{W}_a}{L_g i_s i_R})|$

$$\frac{1}{2} J \dot{\vartheta}^2 - L_g i_s i_R (\cos \vartheta - \cos \vartheta^0) = 0 \quad (2)$$

analytische Lösung für Pendelungen:

$|\vartheta| \leq \vartheta^0$, Substitution $\sin \varphi = \frac{\sin(\vartheta/2)}{\sin(\vartheta^0/2)}$ möglich ($\vartheta = \vartheta^0 : \sin \varphi = 1, \varphi = \pi/2$)

$$\left. \begin{aligned} \cos \vartheta - \cos \vartheta^0 &= 2 [\sin^2(\vartheta^0/2) - \sin^2(\vartheta/2)] = 2 \sin^2(\vartheta^0/2) \cos^2 \varphi, \\ \dot{\vartheta} \cos(\vartheta/2) &= 2 \dot{\varphi} \cos \varphi \sin(\vartheta^0/2) \end{aligned} \right\}$$

$\rightarrow (2)$ mit $\omega_0 = \sqrt{L_g i_s i_R / J}$: $\dot{\varphi}^2 = \omega_0^2 \cos^2(\vartheta/2) = \omega_0^2 [1 - \sin^2(\vartheta^0/2) \sin^2 \varphi]$,

$$\pm \omega_0 dt = \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - m \sin^2 \varphi}}, \quad m = \sin^2(\vartheta^0/2)$$





Exakte analytische Lösung der Pendelgleichung: $|\tilde{W}_a / (Lg r_0 \sin \nu_0)| \leq 1$

(i) Herleitung der Pendelgleichung aus der Phasenergie:

$$\tilde{W}(\nu, \dot{\nu}) = \frac{1}{2} J \dot{\nu}^2 - Lg r_0 \sin \nu \cos \nu = \tilde{W}_a = \tilde{W}(\nu_a, 0) \quad \nu_a = \nu^0 = \left| \arccos \frac{\tilde{W}_a}{Lg r_0 \sin \nu} \right|$$

$$\frac{1}{2} J \dot{\nu}^2 - Lg r_0 \sin \nu (\cos \nu - \cos \nu^0) = 0$$

Pendeln heißt: $|\nu| \leq \nu^0$, da bei ν^0 die kin. Energie

\tilde{W}_a : gewählte pol. Anfangsenergie im Rotationsfeld = entspricht Auslenkung ν^0

$$\frac{1}{2} J \dot{\nu}^2 = 0 \text{ ist (siehe Phasendiagramm).}$$

Substitution: $\sin \varphi = \frac{\sin(\nu/2)}{\sin(\nu^0/2)}$ ($\nu = \nu^0$: $\sin \varphi = 1 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$)

Mit $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$, also: $\sin^2(\varphi/2) = (1 - \cos \varphi)/2$ folgt $\cos \varphi = -2 \sin^2(\varphi/2) + 1$

$$\bullet \cos \nu - \cos \nu^0 = 2 (\sin^2(\nu^0/2) - \sin^2(\nu/2)) = 2 \cdot \sin^2 \frac{\nu^0}{2} \cdot \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\nu}{2}}{\sin^2 \frac{\nu^0}{2}}\right) = 2 \sin^2 \frac{\nu^0}{2} \cdot \cos^2 \varphi$$

$$\bullet \dot{\nu} \cdot \cos\left(\frac{\nu}{2}\right) = \frac{d}{dt} \left(\sin\left(\frac{\nu}{2}\right) \cdot 2 \right) = 2 \frac{d}{dt} \left(\sin \varphi \cdot \sin\left(\frac{\nu^0}{2}\right) \right) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\nu^0}{2}\right) \cdot \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}$$

$$\frac{1}{2} J \dot{\nu}^2 - Lg r_0 \sin \nu (\cos \nu - \cos \nu^0) = \frac{1}{2} J \cdot \left[\frac{2 \sin\left(\frac{\nu^0}{2}\right) \cdot \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}}{\cos(\nu/2)} \right]^2 - Lg r_0 \sin \nu \cdot 2 \sin^2 \frac{\nu^0}{2} \cdot \cos^2 \varphi = 0$$

$$J \cdot \dot{\varphi}^2 = Lg r_0 \sin \nu \cdot \frac{\cos^2(\nu/2)}{1 - \sin^2(\nu/2)} = Lg r_0 \sin \nu \cdot (1 - \sin^2(\nu/2)) \cdot \sin^2 \varphi$$

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{Lg r_0 \sin \nu}{J \omega_0^2} \cdot \underbrace{(1 - \sin^2(\frac{\nu^0}{2}))}_{m} \cdot \sin^2 \varphi \Rightarrow \dot{\varphi}^2 = \omega_0^2 (1 - m \cdot \sin^2 \varphi)$$

Pendelgleichung in φ , erlaubt

die Verwendung der elliptischen Integrale 1. Gattung für die Lösung!





Pendelgleichung: $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J \dot{\nu}^2 - L \mu \epsilon r^2 s (\cos \nu - \cos \nu^0) \right) = 0$

Nichtlin. DGL. 2. Ordnung!
mit konst. Koeff. $J \ddot{\nu} + L \mu \epsilon r^2 s \sin \nu \cdot \dot{\nu} = 0 \Rightarrow J \ddot{\nu} + L \mu \epsilon r^2 s \sin \nu = 0$

(a) Näherung für kleine ν : $\sin \nu \approx \nu$: $J \ddot{\nu} + L \mu \epsilon r^2 s \nu = 0 \Rightarrow \nu = \nu^0 \cdot \cos \omega_0 t$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{L \mu \epsilon r^2 s}{J}} \leftarrow \begin{array}{l} \text{Magnetonische} \\ \text{„Steifigkeit“} \end{array}$$

$$\text{Eigenkreisfrequenz: } \omega_0 = \sqrt{L \mu \epsilon r^2 s} \cdot \nu^0$$

Vgl.:  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

(b) Exakte Lösung: Trennung der Veränderlichen: $\dot{\varphi} = \omega_0 \sqrt{1 - m \sin^2 \varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - m \sin^2 \varphi}} = dt \cdot \omega_0 \Rightarrow \omega_0 t = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi'}{\sqrt{1 - m \sin^2 \varphi'}} = F(\varphi|m)$$

Normalform des am =
vollständigen elliptischen
Integral 1. Gattung

$$m = \sin^2\left(\frac{\nu^0}{2}\right) = \sin^2 \alpha, \quad \alpha = \frac{\nu^0}{2}$$

Vollständiges ellipt. Integral 1. Gattung: $\varphi = \frac{\pi}{2}$: $F(\varphi = \frac{\pi}{2} | m) = K(m)$





Zum Durchlaufen des Winkels von 0 bis ϑ (0 bis φ) wird die Zeit t benötigt:

$$\omega_0 t = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi'}{\sqrt{1-m\sin^2\varphi'}} = F(\varphi|m) \quad \dots \quad \text{Normalform des elliptischen Integrals erster Gattung.}$$

$m \dots$ Parameter

Mit $\sin(\vartheta/2) = \sin(\varphi/2)\sin\varphi = \sqrt{m}\sin\varphi$ ist

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_0 t = F(\varphi|m) , \\ \vartheta = 2 \arcsin(\sqrt{m}\sin\varphi) \end{array} \right\} \quad \text{eine Darstellung der Lösung } \vartheta = \vartheta(t)$$

Beim Durchlaufen des Winkels ϑ^0 bzw. $\varphi = \pi/2$ verstreicht eine Viertelperiode $T/4$:

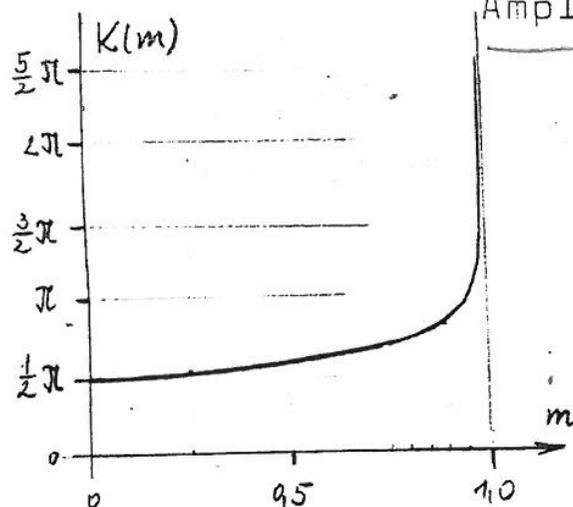
$$T = \frac{4}{\omega_0} F\left(\frac{\pi}{2}|m\right) = \frac{4}{\omega_0} K(m)$$

$F\left(\frac{\pi}{2}|m\right) = K(m) \dots$ vollständiges elliptisches Integral erster Gattung.





Wesentlich ist: Die Periodendauer hängt von m und damit von der Amplitude ab. (wesentlich bei nichtlinearen



— $m = 1$ entspricht $\delta^0 = \pi$,
(Labiles Glgw.: $T \rightarrow \infty$)

— für $m \rightarrow 0$ gilt $T = 2\pi/\omega_0$: kleine
Störleistung ($\hat{=}$ Störleistung
rückführung)

Schwingungsgesetz

Das Bild S.59 zeigt den Verlauf von $\delta(t)$ für die Amplitude $\delta^0 = 120^\circ$. Die Übereinstimmung mit einer Sinuskurve ist noch relativ gut (wird immer schlechter für $\delta^0 \rightarrow 180^\circ$), die Schwingungsdauer unterscheidet sich jedoch bereits erheblich vom Wert für die linearisierte Gleichung (gültig für kleine Amplituden).



Elliptische Integrale 1. Gattung und JACOBI'sche Funktionen:

$$F(\varphi|m) = u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi'}{\sqrt{1-m \cdot \sin^2 \varphi'}}$$

Unvollständiges
ellipt. Integral 1. Gattung

$$m = \sin^2 \alpha$$

$$K(m) = F\left(\frac{\pi}{2}|m\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi'}{\sqrt{1-m \cdot \sin^2 \varphi'}}$$

Vollständiges
ellipt. Integral 1. Gattung

$$u = F(\varphi|m) \rightarrow \varphi = F^{-1}(u|m) : \quad \sin \varphi = \sin(F^{-1}(u|m)) := \operatorname{sn} u$$

$\operatorname{sn} u$: Sinus amplitudinis

$$\cos \varphi = \cos(F^{-1}(u|m)) := \operatorname{cn} u$$

$\operatorname{cn} u$: Cosinus amplitudinis

JACOBI'sche elliptische Funktionen

$$dn u = \sqrt{1-m \cdot \sin^2 \varphi} = \sqrt{1-m \cdot \operatorname{sn}^2 u}$$

Es lassen sich wie bei $\sin()$, $\cos()$ Summensätze, Differentiale, Integrale...

ableiten: z.B.: $\operatorname{sn}(u+v) = \frac{\operatorname{sn}(u) \cdot \operatorname{sn}(v) \cdot dn(v) + \operatorname{sn}(v) \cdot \operatorname{cn}(u) \cdot du(u)}{1-m \cdot \operatorname{sn}^2(u) \cdot \operatorname{sn}^2(v)}$

$$\operatorname{cn}(u+v) = \frac{\operatorname{cn}(u) \cdot \operatorname{cn}(v) - \operatorname{sn}(u) \cdot dn(u) \cdot \operatorname{sn}(v) \cdot du(v)}{1-m \cdot \operatorname{sn}^2(u) \cdot \operatorname{sn}^2(v)}$$

$$dn(u+v) = \frac{dn(u) \cdot dn(v) - m \cdot \operatorname{sn}(u) \cdot \operatorname{cn}(u) \cdot \operatorname{sn}(v) \cdot \operatorname{cn}(v)}{1-m \cdot \operatorname{sn}^2(u) \cdot \operatorname{sn}^2(v)}$$

$$\frac{d \operatorname{sn}(u)}{du} = \operatorname{cn} u \cdot dn u$$

$$\frac{d \operatorname{cn}(u)}{du} = -\operatorname{sn} u \cdot dn u, \quad \frac{d dn u}{du} = -m \cdot \operatorname{sn} u \cdot \operatorname{cn} u$$

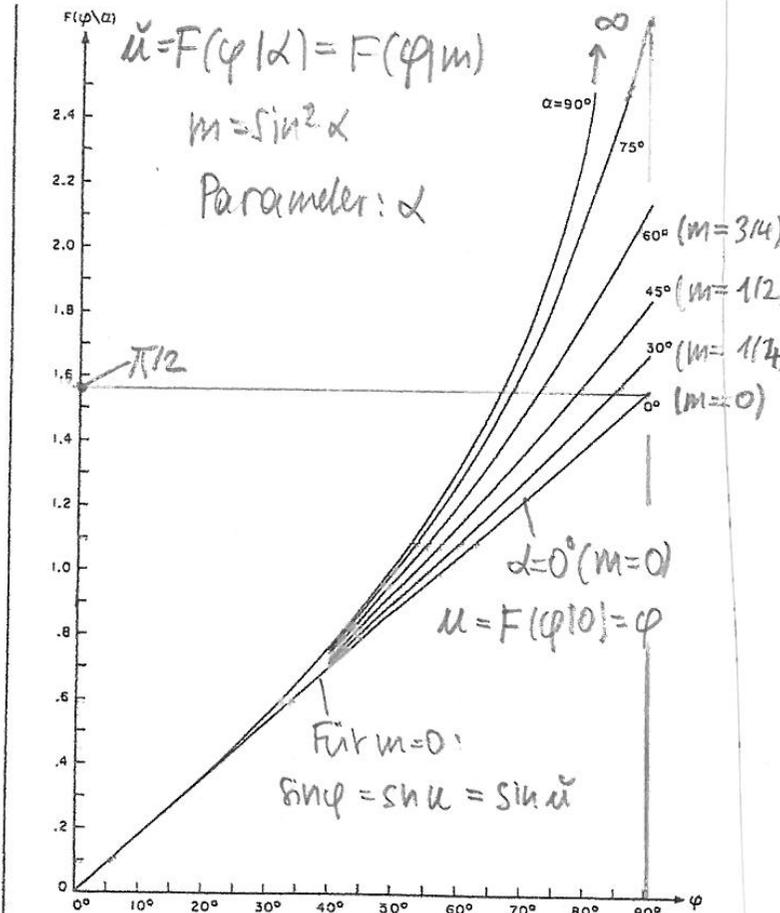
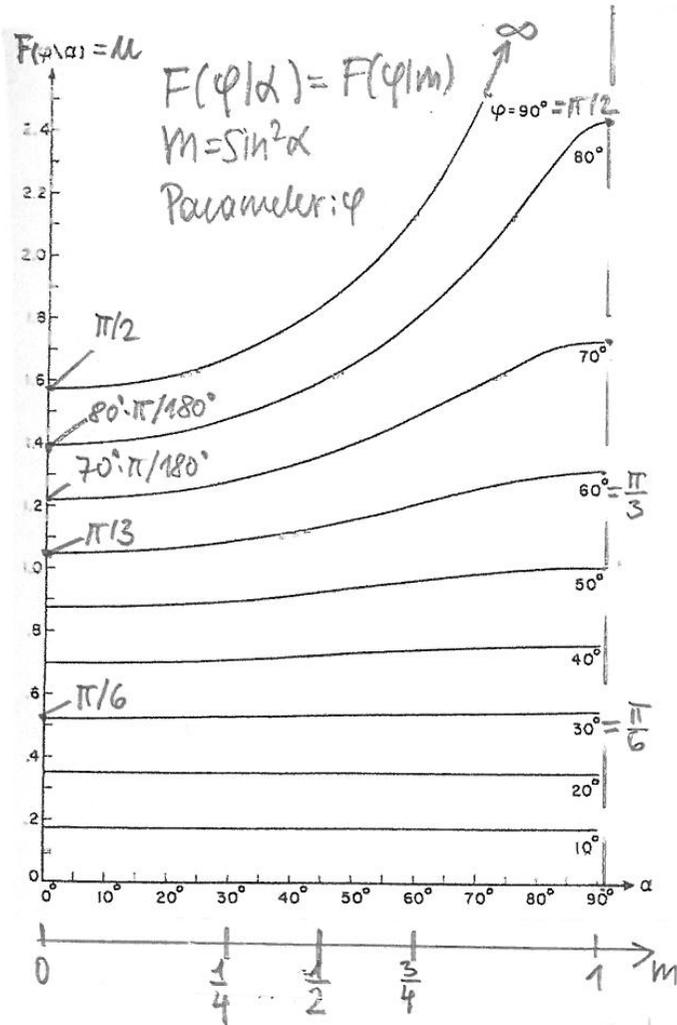
$$\int \operatorname{sn} u \cdot du = \frac{1}{m} \cdot \ln(\operatorname{dn}(u) - m \cdot \operatorname{cn} u), \quad \int \operatorname{cn} u \cdot du = \frac{1}{m} \cdot \operatorname{arccos}(\operatorname{dn}(u)) \text{ usw.}$$



$$K(m=1) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi'}{\sqrt{1-\sin^2\varphi'}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi'}{\cos\varphi'} = \lim_{\varphi' \rightarrow \pi/2} \ln\left(\frac{1+\tan(\varphi'/2)}{1-\tan(\varphi'/2)}\right) = \lim_{\zeta \rightarrow 1} \ln\left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right) \rightarrow \infty$$

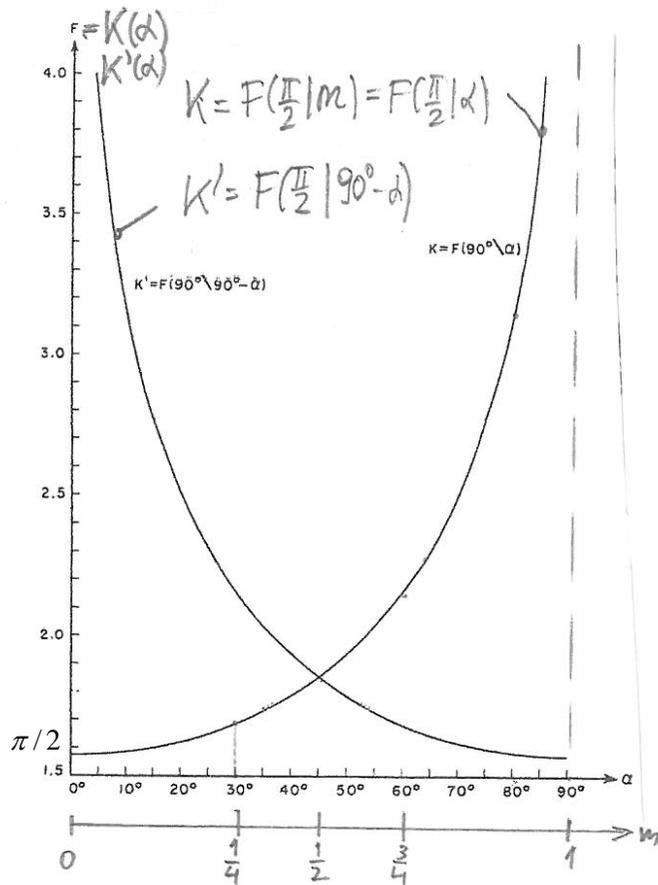


Elliptische Integrale 1. Gattung & JACOBI'sche Funktionen

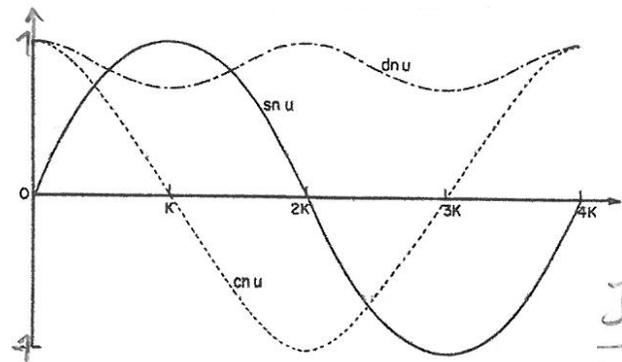


Quelle: Abramowitz/ Stegun: Handbook of
mathematical Functions, Dover Publ., 1972.





Elliptische Integrale 1. Gattung



JACOBI'sche Funktionen

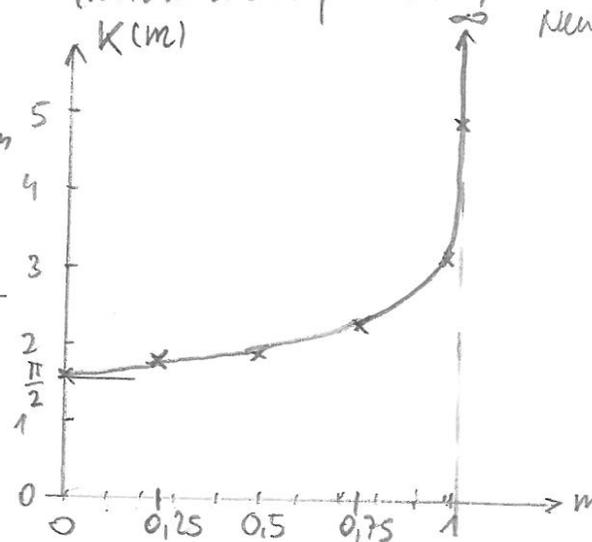
$m = 1/2$

$$sn(\tilde{u}) = sn(\tilde{u} + 4K)$$

$$cn(\tilde{u}) = cn(\tilde{u} + 4K)$$

$$dn(\tilde{u}) = dn(\tilde{u} + 2K)$$

Quelle: Abramowitz / Stegun: Handbook of
mathematical functions, Dover Publ., 1972,
New York



Periodendauer der Schwingung $\varphi(t) = \arcsin(\sin u(t))$ bzw.
 $\mathcal{V}(t) = 2 \cdot \arcsin(\sin \varphi \cdot \underbrace{\sin \frac{v^0}{2}}_{\frac{Tm}{2}}) =$
 $= 2 \cdot \arcsin(\sin u \cdot \frac{Tm}{2})$ ist wegen $\sin(u+4k) = \sin(u)$ ebenfalls $\sim 4k$.
 $\mathcal{V}(t)$ ist beschrieben durch: $\begin{cases} \omega_0 t = F(\varphi|m) = u \\ \mathcal{V} = 2 \arcsin(\frac{Tm}{2} \cdot \sin u) \end{cases}$

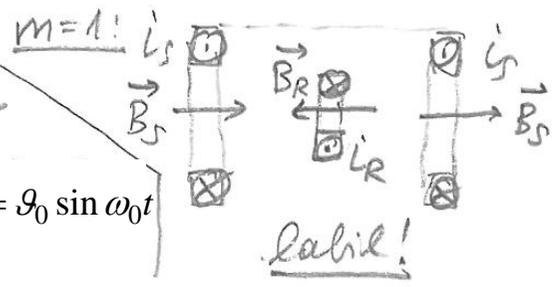
Periodendauer: $\omega_0 T = 4K$: $T = \frac{4}{\omega_0} K(m)$: T hängt von Amplitude v^0 ab!
 Typisch für nichtlineare Schwingungen!

$$T = \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi'}{\sqrt{1 - \sin^2(\frac{v^0}{2}) \sin^2 \varphi'}} = \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi'}{\sqrt{k(v^0) - k(m) \sin^2 \varphi'}}$$

$k(v^0) = k(m)$

woher v^0 die Amplitude der Schwingung ist!
 $m=1 \Leftrightarrow v^0 = \pi : K(m) \rightarrow \infty : T \rightarrow \infty$
 instabiles Gleichgewicht

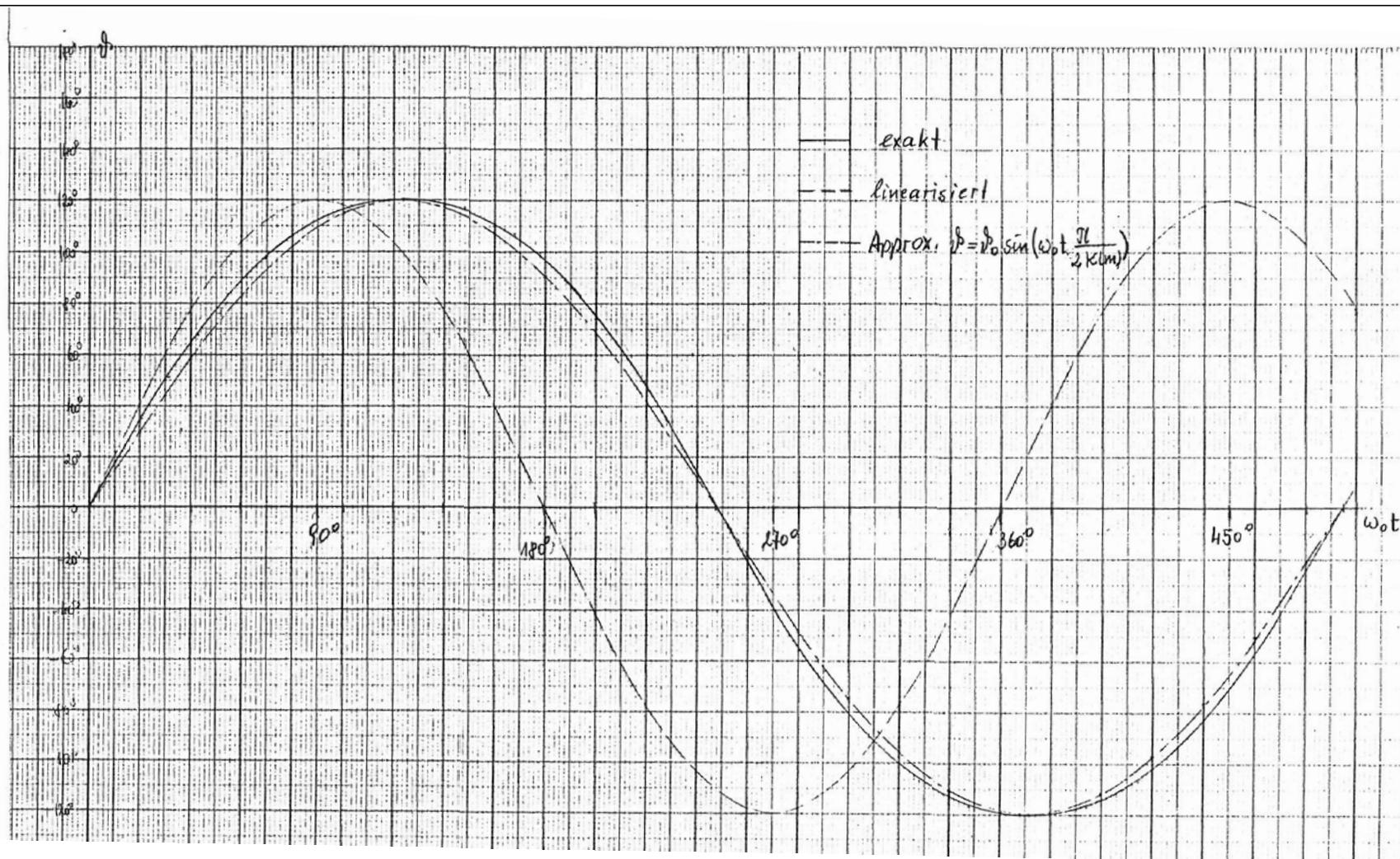
Für $m \rightarrow 0$: $\int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi'}{1} = \pi/2$, $\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi'}{1} = \varphi$,
 also $F(\varphi|m \rightarrow 0) = \varphi \Rightarrow \sin u = \sin \varphi = \sin \varphi$



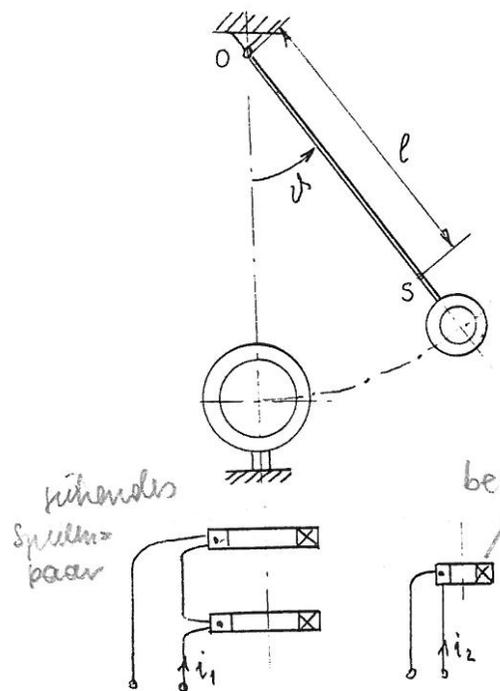
$$\mathcal{V} = 2 \arcsin(\sqrt{m} \cdot \sin \varphi) \approx 2\sqrt{m} \cdot \sin \varphi = 2 \sin(\frac{\vartheta_0}{2}) \sin \varphi \approx \vartheta_0 \sin \varphi \approx \vartheta_0 \sin u = \vartheta_0 \sin \omega_0 t$$

$\arcsin x \approx x, x \ll 1$ $m \ll 1 : \varphi \approx u = \omega_0 t$

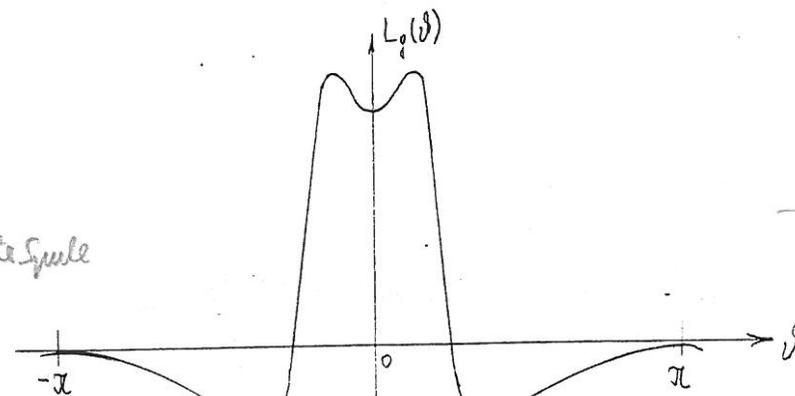




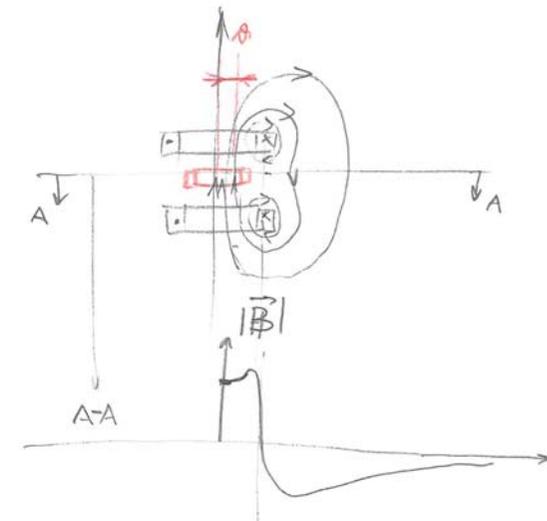
2) Beispiel für die Anwendung der "Potentialmethode" zur qualitativen Untersuchung von dynamischen Vorgängen



J ... Trägheitsmoment bezüglich O
 m ... Gesamtmasse
 S ... Massenmittelpunkt



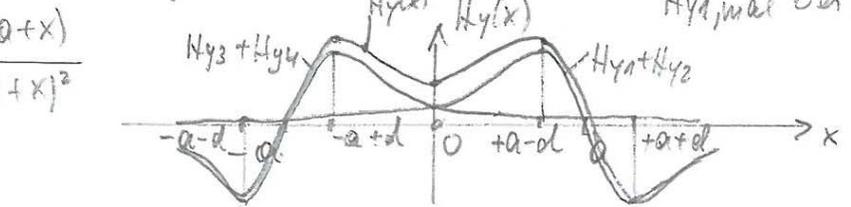
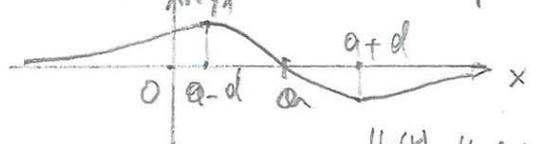
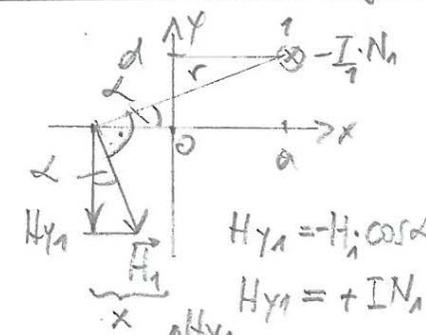
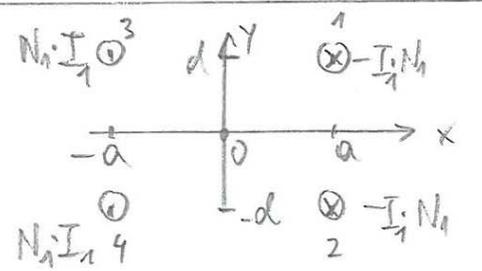
qualitativer Verlauf der Gegeninduktivität





Qualitative Bestimmung der gegenseitigen Induktivität $L_g(W)$:

1) statt Rundspulen
Linienleiter
2) statt Drehbewegung ϑ
Linearbewegung x



$$H_{y1} = -I_1 \cos \alpha, \quad H_i r = -I_1 N_1, \quad r = \sqrt{(a-x)^2 + d^2}^{\frac{1}{2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{a-x}{r}$$

$$H_{y1} = +I N_1 \cdot \frac{a-x}{r^2}$$

$$H_{y1} = I_1 N_1 \cdot \frac{a-x}{d^2 + (a-x)^2}$$

H_{y1} max bei $x = a \mp d$

$$H_{y2} = H_{y1}(d \rightarrow -d) = H_{y1}$$

$$H_{y3} = H_{y1}(I_1 \rightarrow -I_1, a \rightarrow -a, d \rightarrow d)$$

$$= \frac{-I N_1 (-a-x)}{d^2 + (-a-x)^2} = \frac{N_1 I_1 (a+x)}{d^2 + (a+x)^2}$$

$$H_{y4} = H_{y3}(d \rightarrow -d) = H_{y3}$$

$$H_y(x) = H_{y1} + H_{y2} + H_{y3} + H_{y4}$$

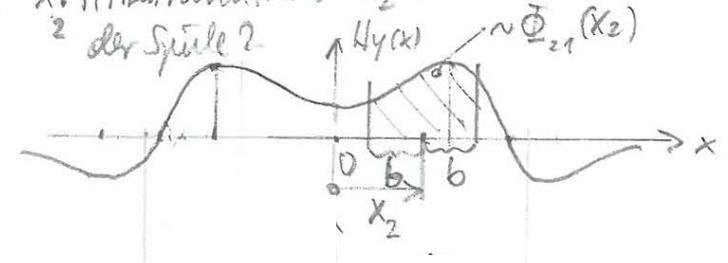
$$= 2(H_{y1} + H_{y3}) =$$

$$= 2 I_1 N_1 \left[\frac{a-x}{d^2 + (a-x)^2} + \frac{a+x}{d^2 + (a+x)^2} \right]$$

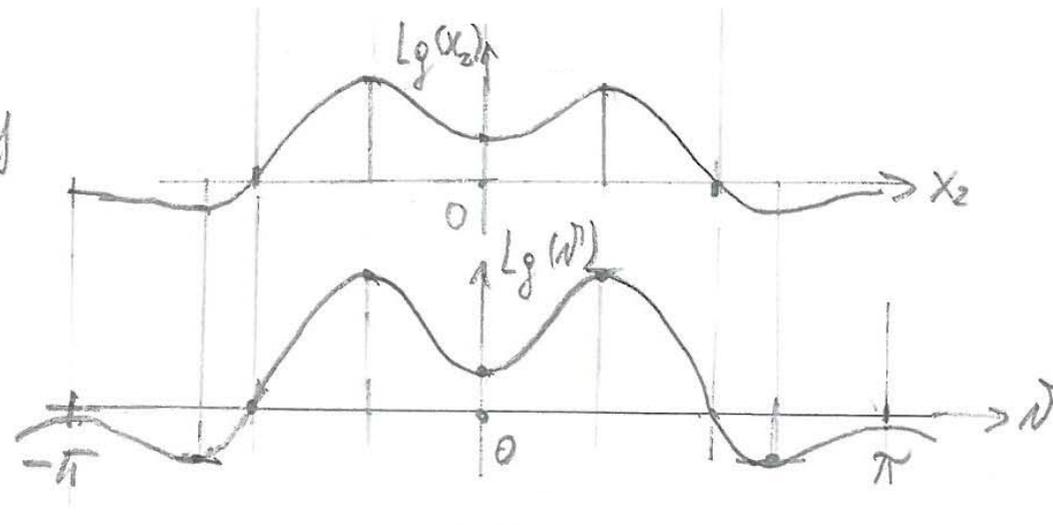
Sekundärspule: Breite $2b$, N_2

$$\Psi_{21} = N_2 \Phi_{21} = N_2 \cdot l \cdot \int_{x_2-b}^{x_2+b} \mu_0 H_y(x) dx = L_g(x_2) \cdot I_1$$

x : Mittelkoordinate $x_2 - b$
der Spule 2



Übertragung von $L_g(x_2)$ auf
 $L_g(\varphi)$: periodisch mit 2π
 für $\varphi \in [-\pi, \pi]$!





a) Ströme i_1 und i_2 mit konstanten Werten eingeprägt

$$n=1 : \vartheta$$

$$W_k^* = \frac{1}{2} J \dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + L_p(\vartheta) i_1 i_2,$$

$$W_k = \dot{\vartheta} \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{\vartheta}} - W_k^* = \frac{1}{2} J \dot{\vartheta}^2 - \frac{1}{2} L_1 i_1^2 - \frac{1}{2} L_2 i_2^2 - L_p(\vartheta) i_1 i_2,$$

$$W_p = -mgl \cos \vartheta$$

$$W = W_k + W_p = \frac{1}{2} J \dot{\vartheta}^2 - mgl \cos \vartheta - \frac{1}{2} L_1 i_1^2 - \frac{1}{2} L_2 i_2^2 - L_p(\vartheta) i_1 i_2$$

Konstante Ströme $i_1 = I_1$, $i_2 = I_2$ eingeprägt:

$$\frac{\partial W_k^*}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial W_p}{\partial t} = 0, \quad f = 0, \quad f^d = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \tilde{W}(\vartheta, \dot{\vartheta}) = 0, \quad \underline{\tilde{W}(\vartheta, \dot{\vartheta}) = \frac{1}{2} J \dot{\vartheta}^2 - mgl \cos \vartheta - L_p(\vartheta) I_1 I_2 = \tilde{W}_0 = \text{konst.}}$$

Wir diskutieren das "Potential"

$$\tilde{W}(\vartheta, 0) = -mgl \cos \vartheta - L_p(\vartheta) I_1 I_2, \quad (1)$$

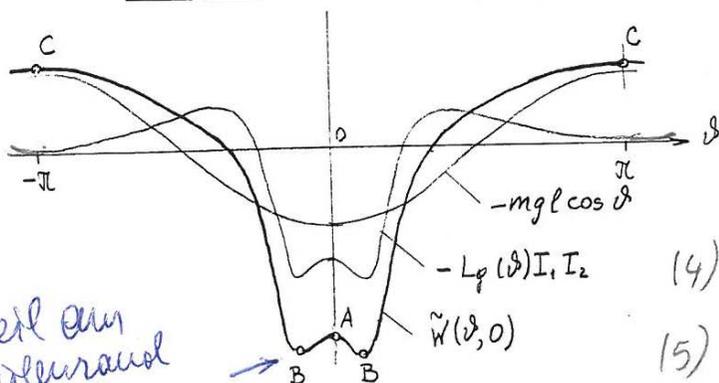
wobei

$$\tilde{W}(\vartheta, \dot{\vartheta}) = \frac{1}{2} J \dot{\vartheta}^2 + \tilde{W}(\vartheta, 0) = \tilde{W}_0 = \text{konst.} \quad (2)$$



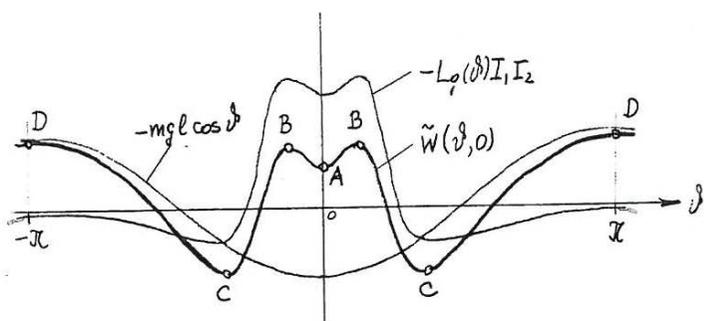


a1) $I_1, I_2 > 0$: Spulen gleichsinnig durchflossen



weil am Spulenanfang Feld höher

a2) $I_1, I_2 < 0$: Spulen gegensinnig durchflossen



A, B, C ... Gleichgewicht

A, C ... instabil

B ... stabil

$$(4) \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \delta}(\delta^0, 0) = 0 \text{ folgen.}$$

$$(5) \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial \delta^2}(\delta^0, 0) > 0: \text{ stabil}$$

A, B, C, D ... Gleichgewicht

B, D ... instabil

A, C ... stabil



b) i_1 als Gleichstrom I_1 eingepreßt, bewegliche Spule kurzgeschlossen

Widerstand der kurzgeschlossenen Spule wird vernachlässigt (dies ist möglich, wenn die Zeitkonstante L_2/R_2 groß gegen die charakteristische mechanische Zeitkonstante ist), ihre Flußverketzung sei null.



$$\psi_2 + R_2 i_2 = 0 \quad T_2 = L_2 / R_2 \gg T_m \text{ (Schwingperiode)}$$

$$R_2 \sim 0: \psi_2 = 0 \Rightarrow \psi_2(t) = \text{konst.} = \psi_2(0) = 0$$

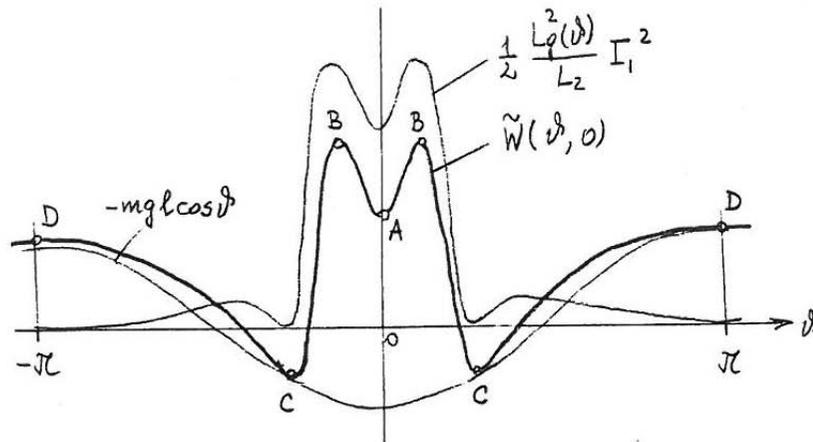
$$\psi_2 = L_2 i_2 + L_p(\vartheta) I_1 = 0 \Rightarrow i_2 = -\frac{L_p(\vartheta)}{L_2} I_1$$

$$W = \frac{1}{2} J \dot{\vartheta}^2 - mgl \cos \vartheta - \frac{1}{2} L_1 I_1^2 - \frac{1}{2} \frac{L_p^2(\vartheta)}{L_2} I_1^2 + \frac{L_p^2(\vartheta)}{L_2} I_1^2 = \frac{1}{2} J \dot{\vartheta}^2 - mgl \cos \vartheta - \frac{1}{2} L_1 i_1^2 - \frac{1}{2} L_2 i_2^2 - L_p(\vartheta) i_1 i_2$$

$$= \frac{1}{2} J \dot{\vartheta}^2 - mgl \cos \vartheta + \frac{1}{2} \frac{L_p^2(\vartheta)}{L_2} I_1^2 - \frac{1}{2} L_1 I_1^2, \quad \tilde{W}(\vartheta, \dot{\vartheta}) = \frac{1}{2} J \dot{\vartheta}^2 - mgl \cos \vartheta + \frac{1}{2} \frac{L_p^2(\vartheta)}{L_2} I_1^2 = \tilde{W}_0 = \text{Konst.}$$

"Potential"

$$\tilde{W}(\vartheta, 0) = \frac{1}{2} \frac{L_p^2(\vartheta)}{L_2} I_1^2 - mgl \cos \vartheta$$



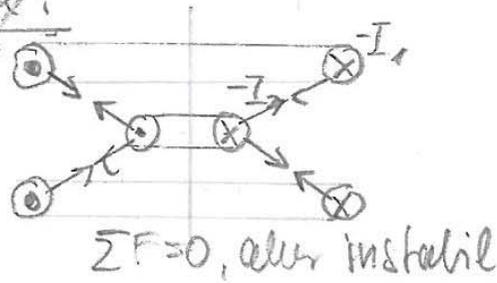
- A, B, C, D ... Gleichgewicht
- B, D ... instabil
- A, C ... stabil

b) ähnlich wie a2), weil $i_2 \uparrow \downarrow i_1!$

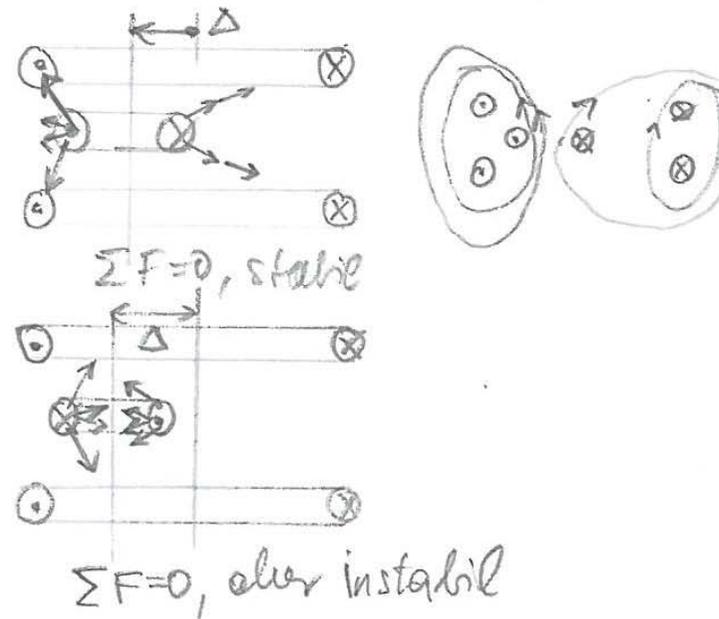
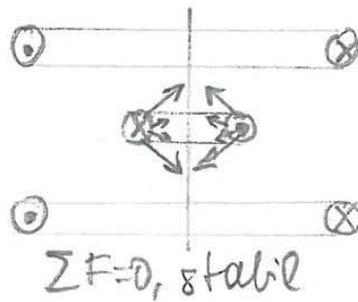
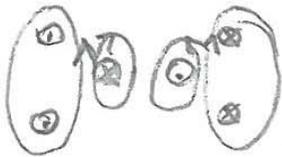


Gleichgewichts Lage:

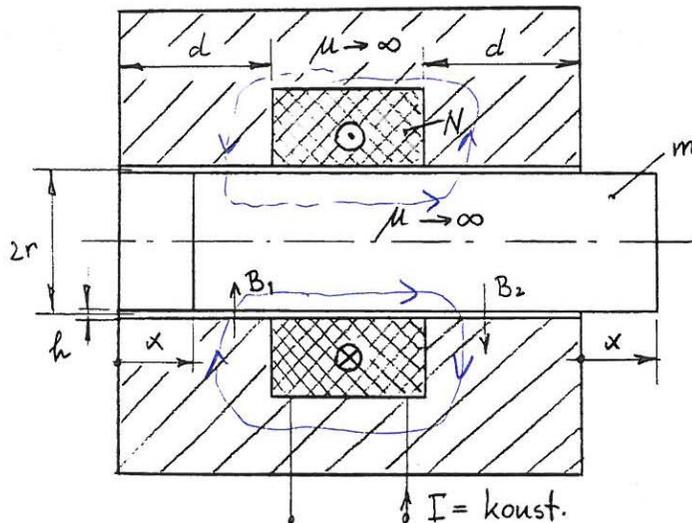
a 1) $I_1, I_2 > 0$:



a 2) $I_1, I_2 < 0$:



3) Zylindrisches Magnetsystem



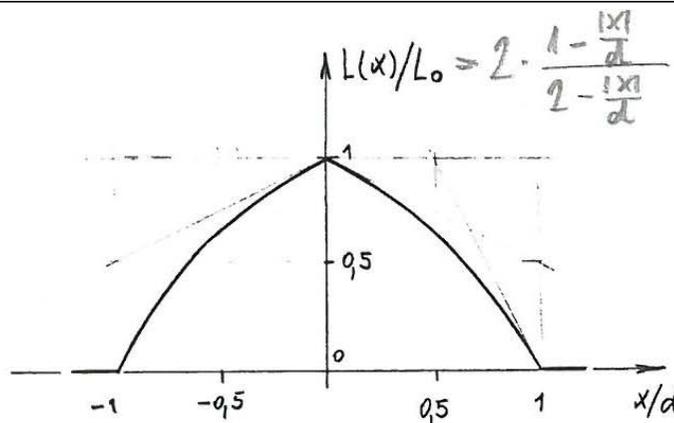
keine Sättigung der Eisen-
teile,
Streung vernachlässigt,
 $|x| < d$

$$IN = \frac{h}{\mu_0} (B_1 + B_2)$$

$$x \geq 0: 2\pi r [(d-x)B_1 - dB_2] = 0 \Rightarrow B_2 = \left(1 - \frac{x}{d}\right) B_1, \quad IN = \frac{h}{\mu_0} \left(2 - \frac{x}{d}\right) B_1,$$

$$\psi = N 2\pi r (d-x) B_1 = \mu_0 N^2 \frac{2\pi r d}{h} \frac{d-x}{2d-x} I;$$

$$x \leq 0: x \rightarrow -x; \quad d-x \rightarrow d+x!$$



$$\psi = L(x)I, \quad |x| = x, x > 0$$

$$L(x) = L_0 \frac{2(d-|x|)}{2d-|x|}, \quad = -x, x < 0$$

$$L_0 = \mu_0 N^2 \frac{4\pi r d}{h}$$

↑
2x der Luftspaltweg: $2h$!

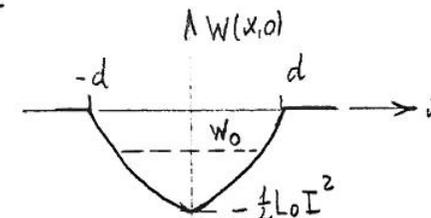
$$n=1, x: W_k^* = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} L(x) I^2,$$

$$W_k = \dot{x} \frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{x}} - W_k^* = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} L(x) I^2, \quad W_p = 0$$

$$\underline{W(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} L(x) I^2 = W_0 = \text{konst.}}$$

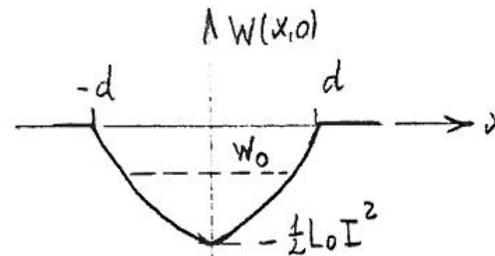
"Potential": $W(x, 0) = -\frac{1}{2} L(x) I^2$

Minimum bei $x=0$ nicht analytisch,
Linearisierung um $x=0$ nicht möglich! *)



(1)





Selbst bei Ausrundung der „Spitze“ zum Erreichen eines analytischen (glatt differenzierbaren) Verlaufs würde ein Linearisieren in der „Spitze“ keine wesentlich größere Information über die Eigenfrequenz im Gleichgewichtspunkt ergeben. Dafür ist der Verlauf zu „spitz“ (= zu nichtlinear)

ABER: Trotzdem gilt: bei $x = 0$: Minimum des Potentials $W(x,0)$:
Gleichgewichtszustand

$d^2W(x,0)/dx^2 > 0$ in der Umgebung um $x = 0$ (also links und rechts davon), also stabile Gleichgewichtslage.

Auslenkung $x_0 =$ Amplitude der Schwingung um $x = 0$.



Anfangsbedingung z.B.: $t=0: x=x_0$ ($0 < x_0 < d$), $\dot{x}=0$; $W_0 = -\frac{1}{2} L(x_0) I^2$

$$(1) \Rightarrow \dot{x}^2 = [L(x) - L(x_0)] \frac{I^2}{m} = \left[\frac{d-|x|}{2d-|x|} - \frac{d-x_0}{2d-x_0} \right] \frac{L_0 I^2}{m} = \frac{d}{2d-x_0} \frac{x_0-|x|}{2d-|x|} \frac{L_0 I^2}{m}$$

Abkürzungen: $\xi = x/x_0$, $a = 2d/x_0$, $\Omega^2 = \frac{L_0 I^2}{4md^2}$: (2)

$$\dot{\xi}^2 = \Omega^2 \frac{a^3}{a-1} \frac{1-|\xi|}{a-|\xi|}, \quad t=0: \xi=1 \quad (3)$$

Bewegung während Viertelperiode $x=x_0 \rightarrow x=0$, $\xi=1 \rightarrow \xi=0$, $\dot{\xi} \leq 0$

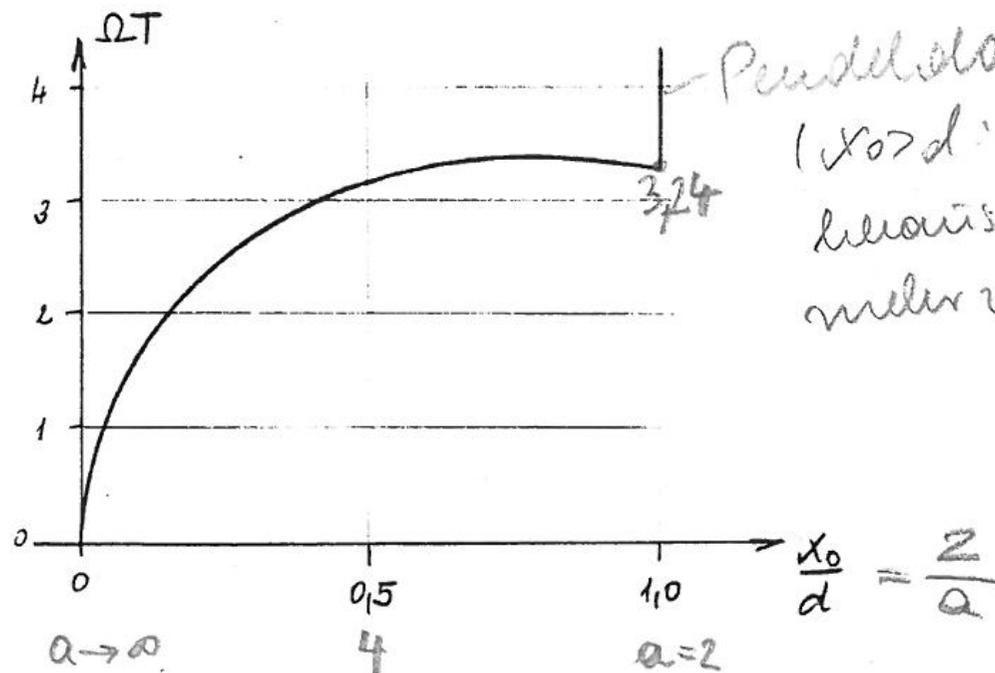
$$(3) \Rightarrow \sqrt{\frac{a^3}{a-1}} \Omega dt = -\sqrt{\frac{a-\xi}{1-\xi}} d\xi, \quad \sqrt{\frac{a^3}{a-1}} \Omega \frac{T}{4} = -\int_1^0 \sqrt{\frac{a-\xi}{1-\xi}} d\xi = \int_0^1 \sqrt{\frac{a-\xi}{1-\xi}} d\xi$$

(1) $\xi \geq 0 \Leftrightarrow |\xi| = \xi$
 \hookrightarrow neg. $\sqrt{\quad}$!
 $\dot{\xi} = -\sqrt{\frac{\Omega^2 a^3 \cdot 1-|\xi|}{a-1 \cdot a-|\xi|}}$

Trennung der Veränderlichen ξ, t
Die Periode $T = \frac{4}{\Omega} \sqrt{\frac{a-1}{a^3}} \int_0^1 \sqrt{\frac{a-\xi}{1-\xi}} d\xi = \frac{4}{\Omega} \sqrt{\frac{a-1}{a^3}} \left[\sqrt{a} + \frac{a-1}{2} \ln \frac{a-1}{(\sqrt{a}-1)^2} \right]$ *gültig für $0 < x_0 \leq d$ bzw. $\infty > a \geq 2$*

hängt von a und damit von der Amplitude x_0 ab. *(typisch bei Nichtlinearitäten)*





→ Ab hier Lösung $T(a)$ ungenügend, hier ist:

Pendelstauer ∞ groß!

($x_0 > d$: Magnetanker soweit hinausgezogen, dass er nicht mehr zurückpendelt)



$$\begin{aligned}\dot{X}^2 &= 2 \frac{L_0 I^2}{m} \cdot \left[\frac{d-|x|}{2d-|x|} - \frac{d-x_0}{2d-x_0} \right] = 2 \frac{L_0 I^2}{m} \cdot \frac{2d^2 - |x|2d - x_0d + |x|x_0 - (2d^2 - x_02d - d|x| + |x|x_0)}{(2d-|x|)(2d-x_0)} = \\ &= 2 \frac{L_0 I^2}{m} \cdot \frac{x_0 d - |x|d}{(2d-|x|)(2d-x_0)} = 2 \frac{L_0 I^2}{m x_0} d \frac{1 - |x|x_0}{\left(\frac{2d}{x_0} - \frac{|x|}{x_0}\right) \cdot \left(\frac{2d}{x_0} - 1\right)} = \frac{L_0 I^2}{m} \cdot a \cdot \frac{1-|\beta|}{(a-|\beta|)(a-1)} = \\ &= \frac{L_0 I^2}{m a^2} \cdot \frac{a^3}{a-1} \cdot \frac{1-|\beta|}{a-|\beta|} \\ \ddot{X}^2 &= \frac{\dot{X}^2}{x_0^2} = \frac{L_0 I^2}{m \cdot \left(\frac{2d}{x_0}\right)^2} \cdot \frac{1}{x_0^2} \cdot \frac{a^3}{a-1} \cdot \frac{1-|\beta|}{a-|\beta|} = \Omega^2 \cdot \frac{a^3}{a-1} \cdot \frac{1-|\beta|}{a-|\beta|} \\ \frac{L_0 I^2}{m \cdot 4d^2} &= \Omega^2\end{aligned}$$





$T = f(\alpha) = f\left(\frac{2d}{X_0}\right) = F(X_0)$ Periode der Schwingung hängt von Amplitude X_0 ab wie bei allen nichtlinearen Schwingungen!

Für kleines X_0 bzw. großes α

gilt: $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} T = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{4}{\Omega} \left[\frac{\sqrt{\alpha-1}}{\alpha} + \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^3 \cdot \ln \frac{\alpha-1}{(\alpha-1)^2} \right] = \underline{\underline{0}}$

$\xrightarrow{\rightarrow 0} \quad \xrightarrow{\rightarrow 1} \quad \xrightarrow{\rightarrow 1}$

$\Omega T(\alpha=2) = \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2^3}} \cdot \left[\sqrt{2} + \frac{2-1}{2} \cdot \ln \frac{2-1}{(2-1)^2} \right] = 3,24$

$\ln 1 = 0$



1.14.3. Stark gedämpfte Systeme

Durch die vollständige Vernachlässigung dissipativer Effekte (Dämpfung, Reibung) bei der Behandlung schwach gedämpfter Systeme gestalten sich qualitative Untersuchungen in der Regel einfacher. Ebenso führt das andere Extrem, die Annahme starker Dämpfung, zu gewissen Vereinfachungen, wenn die resultierenden Bewegungen dadurch als relativ langsam (quasistatisch) vorausgesetzt und Trägheitseffekte unterdrückt werden können.

Ableitung der Bewegungsgleichungen:

$$n=3 : x, Q, Q_D$$

$$W_k^* = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} L(x) (N i + N_D i_D)^2, \quad W_p = \frac{1}{2} k (x_0 - x)^2$$

x_0 ... fiktive Lage bei entspannten Federn, Federkonstante k

$$\delta V = R i \delta Q + R_D i_D \delta Q_D, \quad \delta A = U \delta Q + F \delta x$$

F ... Anpreßkraft in den Stellungen $x=0$ oder $x=x_1$

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{1}{2} L'(x) (N i + N_D i_D)^2 - k (x_0 - x) &= F \\ \frac{d}{dt} [L(x) N (N i + N_D i_D)] + R i &= U \\ \frac{d}{dt} [L(x) N_D (N i + N_D i_D)] + R_D i_D &= 0 \end{aligned} \right\}$$

z.B.: gemeinsam
gewickelt (bifilar) (2)



$\alpha = 0 : R_D = \infty$
 oder $N_D = 0$ $\alpha > \infty : R_D < !$

α ... Dämpferfaktor

Abkürzungen und Normierungen:

$$\left. \begin{aligned} L(x) &= \frac{L_0}{\lambda(x)} \quad \text{mit } \lambda(0) = 1, \quad \phi_0 = \frac{U}{R} N L_0, \quad \frac{N_D^2}{R_D} = \alpha \frac{N^2}{R}, \\ T_0 &= \left(\frac{N^2}{R} + \frac{N_D^2}{R_D} \right) L_0 = (\alpha + 1) \frac{N^2}{R} L_0, \quad \varphi = \frac{\phi}{\phi_0} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ϕ_0 ... Fluß für $t \rightarrow \infty$

α ... Faktor, Einfluß der Dämpferwicklung

φ ... bezogener Fluß

$$(1) \Rightarrow \varphi = \frac{R}{U} \frac{1}{\lambda} \left(i + \frac{N_D}{N} i_D \right), \quad (4)$$

zusammen mit (2)_{2,3} :

$$i = \frac{U}{R} \frac{\varphi \lambda + \alpha}{1 + \alpha}, \quad i_D = \frac{U}{R} \frac{N}{N_D} \alpha \frac{\varphi \lambda - 1}{1 + \alpha} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} (2)_1 : \quad m \ddot{x} + \frac{\phi_0^2}{2L_0} \lambda'(x) \varphi^2 - k(x_0 - x) &= F \\ (2)_2 : \quad T_0 \dot{\varphi} + \lambda(x) \varphi &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

- nichtlineares Gleichungssystem für $x(t)$, $\varphi(t)$.



Es sind drei Zeitbereiche zu unterscheiden:

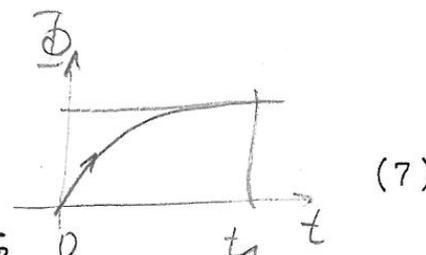
a) $0 < t < t_1$: Nach dem Einschalten steigt der Fluß solange an, bis die Bremsscheibe abhebt (Bremskraft $\equiv F = 0$)

$$\underline{x = x_1 = \text{konst.}}, \quad \lambda(x_1) := \lambda_1 = \text{konst.}$$

Lösung von (6)₂ mit Anfangsbedingung $\varphi = 0$:
*)

$$\ddot{x} = 0$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{\lambda_1} (1 - e^{-t\lambda_1/T_0})$$



$$(5) \Rightarrow \underline{i = \frac{U}{R} \left(1 - \frac{e^{-t\lambda_1/T_0}}{1+\alpha}\right)}, \quad \underline{i_D = -\frac{U}{R} \frac{N}{N_D} \frac{\alpha}{1+\alpha} e^{-t\lambda_1/T_0}} \quad *)$$

Bedingung für Abheben: $F = 0$. Aus (6)₁ ($\ddot{x} = 0$):

$$\varphi(t_1) = \left[\frac{2L_0 k (x_0 - x_1)}{\Phi_0^2 \lambda'(x_1)} \right]^{\frac{1}{2}} := \varphi_1 = \frac{1}{\lambda_1} (1 - e^{-t_1 \lambda_1 / T_0}) \quad (8)$$

$$\Rightarrow \underline{t_1 = -\frac{T_0}{\lambda_1} \ln(1 - \lambda_1 \varphi_1) = -\frac{T_0}{\lambda_1} \ln \left\{ 1 - \frac{\lambda_1}{\Phi_0} \left[\frac{2L_0 k (x_0 - x_1)}{\lambda'(x_1)} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}} \quad (9)$$

*) stark gekoppelte Spulen: Flüsse können springen ($i(0) \neq 0$,
 $i_D(0) \neq 0$, ABER: fest. Flussverteilung $\Phi(0) = 0$!)
wie $\Phi = f(i_1, i_D) = A i_1 + B i_D$



b) $t_1 < t < t_2$: Bremsscheibe bewegt sich, erreicht bei t_2 den Anschlag $x=0$.

Es wäre das Gleichungssystem (6) mit $F=0$ zu lösen. Annahme: starke elektrische Dämpfung \Rightarrow relativ langsame Bewegung. d.h. charakteristische elektrische Zeitkonstante $T_0 \gg$ charakteristische mechanische Zeitkonstante $T_M = 2\pi \sqrt{m/k}$, Trägheitsterm $m\ddot{x}$ in (6), vernachlässigt:

(rasches mechanisches Einwickeln)

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Phi_0} [2k L_0 (x_0 - x) / \lambda'(x)]^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

Damit ist die Funktion $\varphi(x)$ bekannt und (6)₂ läßt sich über Trennung der Variablen integrieren:

$$T_0 \dot{\varphi} + \lambda(x) \varphi = T_0 \varphi'(x) \frac{dx}{dt} + \lambda(x) \varphi(x) = 1, \quad \text{Trennung der Variablen}$$

$$\frac{1}{T_0} (t - t_1) = \int_{x_1}^x \frac{\varphi'(\xi) d\xi}{1 - \lambda(\xi) \varphi(\xi)}, \quad \frac{1}{T_0} (t_2 - t_1) = \int_{x_1}^0 \frac{\varphi'(\xi) d\xi}{1 - \lambda(\xi) \varphi(\xi)} \quad \lambda(x) \text{ muss bekannt sein} \quad (11)$$

Dies liefert die Umkehrfunktion $t = t(x)$ zu $x = x(t)$. Die zugehörigen Werte von φ , i und i_D folgen aus (10) bzw. (5).





c) $t > t_2$: Brems Scheibe liegt am Anschlag, Fluß ϕ nähert sich dem Grenzwert ϕ_0

$$x \equiv 0, \quad \lambda(0) = 1;$$

Lösung von (6)₂ mit Anfangsbedingung $t = t_2, \quad \varphi = \varphi_2$ wobei aus

$$(10) \text{ mit } x=0: \quad \varphi_2 = \frac{1}{\phi_0} [\lambda k L_0 x_0 / \lambda'(0)]^{\frac{1}{2}};$$

$$\varphi(t) = 1 - (1 - \varphi_2) e^{(t_2 - t)/T_0}. \quad (12)$$

Ströme aus (5):

$$i = \frac{U}{R} \left[1 - \frac{1 - \varphi_2}{1 + \alpha} e^{(t_2 - t)/T_0} \right], \quad i_D = - \frac{U}{R} \frac{N}{N_D} \frac{\alpha(1 - \varphi_2)}{1 + \alpha} e^{(t_2 - t)/T_0} \quad (13)$$

Das folgende Diagramm zeigt die Auswertung für

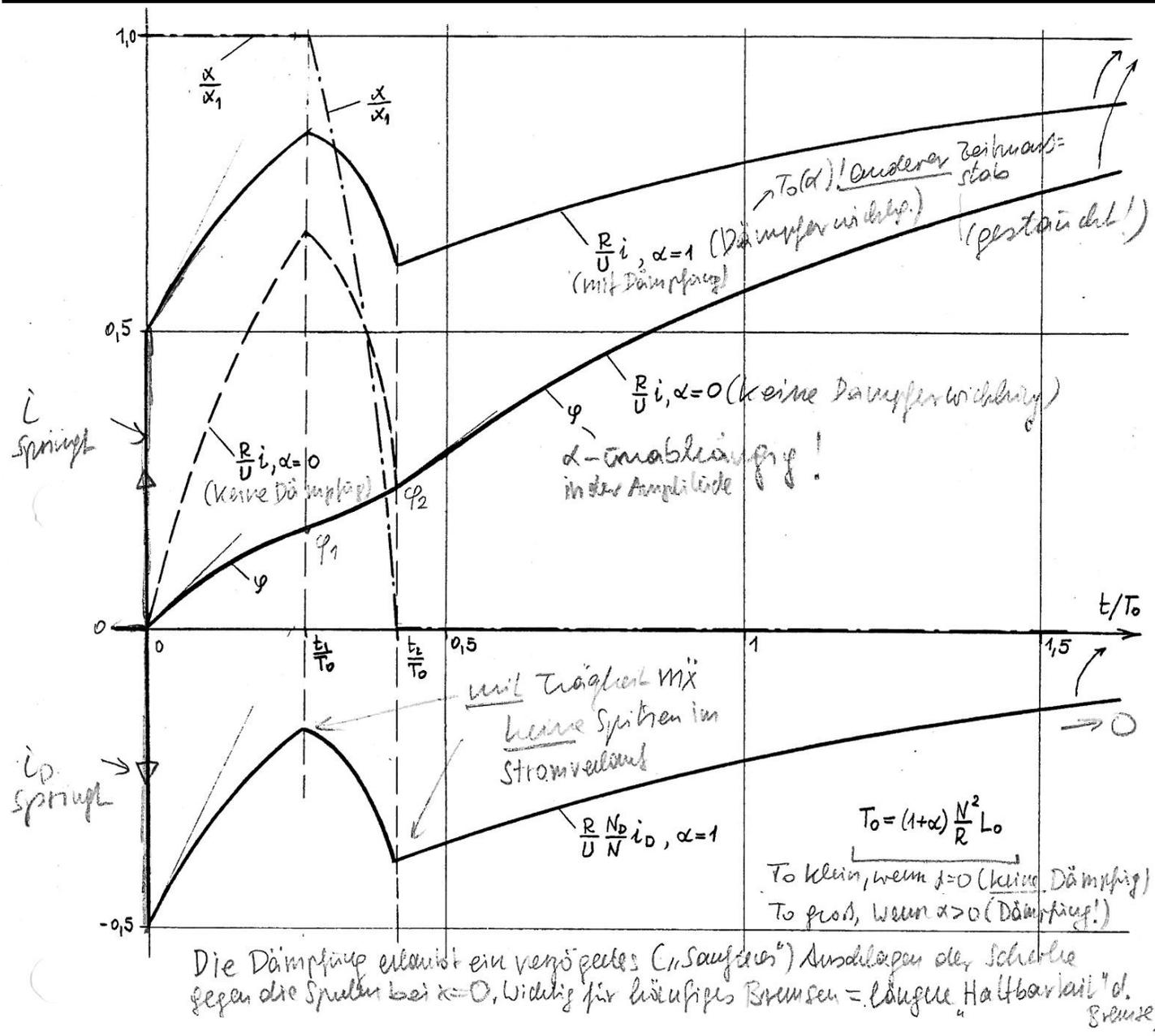
$$\frac{x_1}{h} = 3, \quad \frac{x_0}{x_1} = 2, \quad \frac{\phi_0}{\phi_1} = 6$$

$$\text{d.h. } \varphi_1 = \frac{1}{\phi_0} [\lambda k L_0 (x_0 - x_1) / \lambda'(x_1)]^{\frac{1}{2}} = 1/6;$$

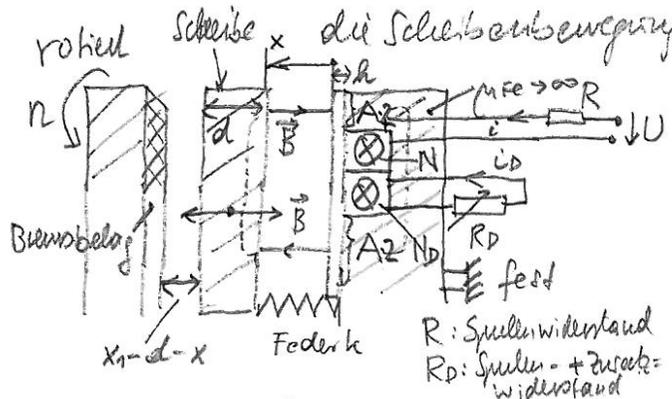
$$\lambda(x) = 1 + x/h \quad [L(x) = L_0 / (1 + x/h), \text{ keine Streuung und keine magnetischen Nebenschlüsse}]$$

h : Rastluftspalt
(damit $F_{\text{magn}} > 0$!)





Bremslüfter, bei Bewegung der Bremscheibe verändert sich der Fluss Φ und induziert in die Dämpferspule. Der Dämpferstrom i_D führt zu Verlusten $i_D^2 R_D$, die über R_D verändert werden können. Diese Verluste dämpfen die Scheibenbewegung.

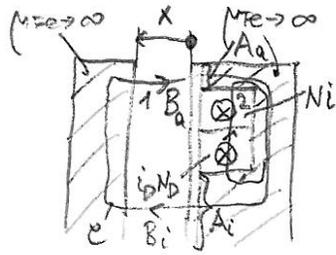


Bewegung: $0 \leq x \leq x_1$
 Distanzscheibe Φ stellt Fluss Φ bei $x=0$ ein (amagnetisch)
 Feder k drückt Scheibe gegen Bremsbelag = Bremsung
 wenn $U=0, i=0$. Bei Stromausfall „sichere Bremsung“.
 Für Betrieb $n \neq 0$ muss Scheibe „gelüftet“ werden, also $U \neq 0 \Rightarrow i \neq 0 \Rightarrow \Phi = B \cdot A \cdot i$ Maxwell'sche Zug =

Kraft $F = \frac{B^2 (A)}{2 \mu_0}$ zieht Scheibe gegen Federkraft von Bremsbelag weg.

• $i=0, i_D=0$: Feder entspannt bei $x_0 > x_1$, daher Anpresskraft $F = F_F = k \cdot (x_0 - x_1) > 0$

• Spulen (N) und (N_D) z. B. bifilar gewickelt:  Bsp.: $N/N_D = 2/3$
 $\Rightarrow L_2$ minimal (≈ 0)
 Drähte beider Spulen parallel („bifilar“) geflochten = maximale magnetische Kopplung



Flusspfad 1: Luftspalt x : Φ
 Flusspfad 2: Nutspalt Φ_Q
 hier Annahme: $\Phi_Q \ll \Phi$, daher Φ_Q vernachlässigt.
 Flussflächen $A_a = A_i = A_c$ gewählt, daher $B_i = \frac{\Phi}{A_i} = B_a = \frac{\Phi}{A_a} = B = \mu_0 H$



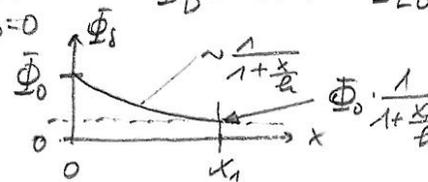


Ampère'scher Durchflutungssatz: $\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \frac{B_0}{\mu_0} x' + \frac{B_1}{\mu_0} x' + \frac{H_{Fe} \cdot \Delta l_{Fe}}{\mu_0} = \frac{B \cdot 2x'}{\mu_0} = N_1 i + N_D i_D, x' = x + l_0$
 $2A_1 = A_2 = A_0$

$\Phi = A_0 B_0 = (2A) \cdot \mu_0 \frac{N_1 i + N_D i_D}{2(x+l)} = \left(\frac{\mu_0 A}{l} \cdot \frac{N_1 i + N_D i_D}{1+x/l} \right), \Phi = \Phi_S + \Phi_D, \Phi_S = \frac{\mu_0 A}{l} \frac{N_1 i}{1+x/l} = L_0 \frac{N_1 i}{\lambda(x)} = L(x) \cdot N_1 i$
 $L_0 \lambda(x) = 1 + x/l, L(x) = \frac{L_0}{\lambda(x)}$
 $\Phi_D = \dots = L_0 \frac{N_D i_D}{\lambda(x)}$

Fluss bei $x=0$: = vollständig gelüftete Bremsen: $\dot{x}=0 \Rightarrow i_D=0$

$\Phi_0 = \Phi(x=0) = \left(\frac{\mu_0 A}{l} \cdot N_1 \cdot \frac{U}{R} \right), i = \frac{U}{R}$
 $\Phi_0 = \frac{N L_0 U}{R}, \Phi_S = \frac{\Phi_0}{1+x/l}$



Flussverhältnisse: Spule N_1 : $\Psi = N_1 \cdot \Phi = N_1 \Phi_S + N_1 \Phi_D = L(x) [N_1 i + N_D i_D] \cdot N_1$
 $i \neq 0, i_D \neq 0$ Spule N_D : $\Psi_D = N_D \Phi = L(x) [N_1 i + N_D i_D] \cdot N_D$

Bewegungsgleichungen: 3 unabh. Variablen: x, Q, Q_D

magn. Energie = magn. Kessenergie ($H_{Fe} \rightarrow \infty$): $W_{mag} = \frac{\Psi_1 i}{2} + \frac{\Psi_D i_D}{2} = L(x) \left[\frac{N_1^2 i^2}{2} + \frac{N_D^2 i_D^2}{2} + N_1 N_D i i_D \right]$

$W_k^* = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} L(x) (N_1 i + N_D i_D)^2, U_p = \frac{1}{2} k (x_0 - x)^2$

$\delta V = R i \delta Q + R_D i_D \delta Q_D, \delta A = U \delta Q + F_S x$ $\left\{ \begin{array}{l} F_i \text{ Anziehung bei } x=x_1 \\ \text{und bei } x=0 \end{array} \right.$

Bei $x=0$: Φ ist maximal: Maximalkraft: $-F_H + F_F = -\frac{B_0^2}{2\mu_0} (4l) + k(x_0 - 0) = -\frac{\mu_0 N^2 U^2}{4 \cdot l^2 R^2} \cdot 4l + x_0 k =$
 $= -\frac{\mu_0 A N^2 U^2}{2 l^2 R^2} + x_0 k < 0$

Dimensionen $\frac{N U}{R}, x_0, k$





$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W_k^*}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial W_k^*}{\partial q_i} + \frac{\partial W_p}{\partial q_i} + f_i^d = f_i \quad i = 1, 2, 3 \quad q_1 = x, q_2 = Q, q_3 = Q_D$$

$$n=1: \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{x}} W_k^* \right] - \frac{\partial W_k^*}{\partial x} + \frac{\partial W_p}{\partial x} + f_1^d = f_1 \Rightarrow m \ddot{x} - \frac{1}{2} L'(x) (N \dot{i} + N_D \dot{i}_D)^2 - \lambda (x_0 - x) + 0 = F \quad (1)$$

$$n=2: \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{Q}} W_k^* \right] - \frac{\partial W_k^*}{\partial Q} + \frac{\partial W_p}{\partial Q} + f_2^d = f_2 \Rightarrow \frac{d}{dt} [L(x) \cdot N \cdot (N \dot{i} + N_D \dot{i}_D)] + R \cdot i = U \quad (2)$$

$$n=3: \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{Q}_D} W_k^* \right] - \frac{\partial W_k^*}{\partial Q_D} + \frac{\partial W_p}{\partial Q_D} + f_3^d = f_3 \Rightarrow \frac{d}{dt} [L(x) \cdot N_D (N \dot{i} + N_D \dot{i}_D)] + R_D \cdot \dot{i}_D = 0 \quad (3)$$

* Lösung durch Überführung von 3 auf 2 unabhängige Variablen:

$$\left. \begin{matrix} x \\ i \\ i_D \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} x \\ \Phi \end{matrix} \quad \text{und aus } \Phi \begin{matrix} \nearrow i \\ \searrow i_D \end{matrix}$$

$$\left. \begin{matrix} (2) \times N_D: \frac{d}{dt} [L(x) \cdot N N_D (N \dot{i} + N_D \dot{i}_D)] + R \cdot N_D \dot{i} = U N_D \\ (3) \times N: \frac{d}{dt} [L(x) \cdot N N_D (N \dot{i} + N_D \dot{i}_D)] + R_D N \cdot \dot{i}_D = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow R \cdot N_D \dot{i} - R_D N \dot{i}_D = U \cdot N_D \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{i}_D = \frac{R N_D \dot{i} - U N_D}{R_D N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi = L(x) [N \dot{i} + N_D \dot{i}_D] = L(x) \left[\dot{i} + \frac{N_D^2 R}{N R_D} \dot{i} - \frac{N_D^2 U}{N R_D} \right] = \frac{L_0}{\lambda(x)} \cdot N \left[\dot{i} + \underbrace{\left(\frac{N_D}{N} \right)^2 \frac{R}{R_D}}_{\alpha} \dot{i} - \frac{N_D}{N} \frac{U}{R_D} \right]$$

Bezogener Form: $\frac{\Phi(x)}{\Phi_0} = \varphi(x) = \frac{\Phi(x)}{N L_0 U} = \frac{R}{U \lambda(x)} \cdot \frac{1}{R} \cdot \left[\dot{i} + \alpha \dot{i} - \alpha \frac{U}{R} \right]$. Daraus folgt $i(\varphi)$!

$$\underline{i(\varphi) = \left(\frac{U}{R} \lambda(x) \varphi + \alpha \frac{U}{R} \right) \frac{1}{1+\alpha} = \frac{U}{R} \frac{\varphi(x) \lambda(x) + \alpha}{1+\alpha}}$$





$$i_D = \frac{R}{R_D} \frac{N_D}{N} i - \frac{U}{R} \frac{R}{R_D} \frac{N_D}{N} = \frac{N}{N_D} \left[\frac{R}{R_D} \frac{(N_D)^2}{N} i - \frac{U}{R} \frac{R}{R_D} \frac{(N_D)^2}{N} \right] = \frac{N}{N_D} \alpha \left[i - \frac{U}{R} \right] = \frac{N}{N_D} \alpha \left[\frac{U}{R} \frac{\varphi \lambda + \alpha}{1 + \alpha} - \frac{U}{R} \right]$$

$$i_D(\varphi) = \frac{U}{R} \frac{N}{N_D} \alpha \cdot \frac{\varphi \lambda(x) - 1}{1 + \alpha}$$

• 2 Bewegungsgleichungen in φ und x :

(1): $L'(x) \cdot (Ni + N_D i_D)^2 = -\frac{1}{2} \cdot \chi' \cdot N^2 \left(i + \frac{N_D}{N} i_D \right)^2$; $\varphi(x) = \frac{\Phi(x)}{\Phi_0} = \frac{L_0 / \lambda(x)}{N L_0 U} \cdot N \left(i + \frac{N_D}{N} i_D \right)$

$$L'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{L_0}{\lambda(x)} \right) = L_0' \left(-\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)^2} \right) \quad \left(\varphi(x) \cdot \lambda(x) \cdot \frac{N U}{R} \right)^2 \leftarrow \frac{L_0}{R}$$

$$L'(x) (Ni + N_D i_D)^2 = -\chi' \cdot (N \varphi U / R)^2 \cdot L_0 = -\chi'(x) \cdot \frac{(\varphi \cdot \Phi_0)^2}{L_0}$$

$$m \ddot{x} - \frac{1}{2} L'(x) \cdot (Ni + N_D i_D)^2 - k(x_0 - x) = F \Rightarrow m \ddot{x} + \frac{\chi'(x)}{2} \cdot \frac{\Phi_0^2}{L_0} \varphi^2(t) - k(x_0 - x) = F \quad (I)$$

(2): $\frac{d}{dt} [L(x) \cdot N \cdot (Ni + N_D i_D)] + R \cdot i = U$

$$\begin{aligned} N \cdot \Phi(x) &= N \varphi(x) \Phi_0 & \frac{U}{R} \frac{\varphi \lambda + \alpha}{1 + \alpha} \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} (N \varphi(x) \Phi_0) + U \frac{\varphi \lambda + \alpha}{1 + \alpha} &= U \\ N \dot{\varphi} \frac{N L_0 U}{R} + U + \frac{\varphi \lambda - 1}{1 + \alpha} U &= U \\ \frac{N^2 L_0}{R} \dot{\varphi} + \varphi \cdot \lambda \frac{1}{1 + \alpha} &= \frac{1}{1 + \alpha} \end{aligned}$$

Zeitkonstante $T_0 = (1 + \alpha) \frac{N^2 L_0}{R} = \left(\frac{N^2}{R} + \frac{N_D^2}{R_D} \right) L_0$

$$\frac{N^2 L_0}{R} (1 + \alpha) \cdot \dot{\varphi} + \varphi \cdot \lambda(x) = 1 \quad (II)$$

T_0
nichtlineares Gleichungssystem (I), (II)
für $\varphi(x(t)) = \varphi(t)$, $x(t)$



Lösung: 1) $U=0$; rein mechanisches System: $\Phi/\Phi_0 = \varphi = 0$

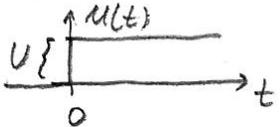
elema. Kraft = 0: $m\ddot{x} - k(x_0 - x) = F$

Eigenverhalten des Systems: $F = F^*$: $x = x^* + \Delta x(t)$, x^* : Arbeitspunkt

statisch: $-k(x_0 - x^*) = F^*$ $\ddot{x} = \Delta \ddot{x} \Rightarrow m\Delta \ddot{x} + k\Delta x = 0$
 $x_0 - x^* = -\frac{F^*}{k}$ $\Delta \ddot{x} = -\frac{k}{m}\Delta x: \Delta^2 = \sqrt{-\frac{k}{m}}$
 $x^* = x_0 + \frac{F^*}{k} = \frac{1}{k}(kx_0 + F^*)$ $\Delta x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t, \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Bei $F^* = 0$: Feder entspannt: $\lambda^* = x_0 > x_1$ (nicht erfüllbar, Wert Ausschlag bei x_1)

2) $U = \text{konst.}$: Einschalten der Bremsenspannung bei $t=0$



Solange $F_M < F_F$, bewegt sich Schlebe nicht!

(I) $m\ddot{x} + F_M - F_F = 0$, $m\ddot{x} = F_F - F_M > 0$.
 (I): $\ddot{x} = \frac{F_F - F_M}{m} > 0 \rightarrow \dot{x} = 0$ wegen Anschlag, $x = x_1 = \text{konst.}$ wird in pos. x-Richtg. die Schlebe beschleunigen, also in den Anschlag drücken = $x = x_1, \dot{x} = 0$

(II): $T_0 \cdot \dot{\varphi} + \varphi \cdot (\lambda(x_1)) = 1$ $\lambda_1 = 1 + \frac{x_1}{a} > 1$
 $\dot{\varphi} + \varphi \cdot \frac{\lambda_1}{T_0} = \frac{1}{T_0}$ Anfangsbedingung: $\varphi(t=0) = 0$
 $\varphi_a = C e^{at}$, $a = -\frac{\lambda_1}{T_0}$, $\varphi_p = \bar{C} \cdot \bar{C} = \frac{1}{\lambda_1}$: $\varphi = \varphi_h + \varphi_p = C e^{-\frac{\lambda_1 t}{T_0}} + \frac{1}{\lambda_1} \Big|_{t=0} = 0$
 $\varphi(t) = \frac{1}{\lambda_1} (1 - e^{-\frac{\lambda_1 t}{T_0}})$, $x = x_1$ $C = -\frac{1}{\lambda_1}$

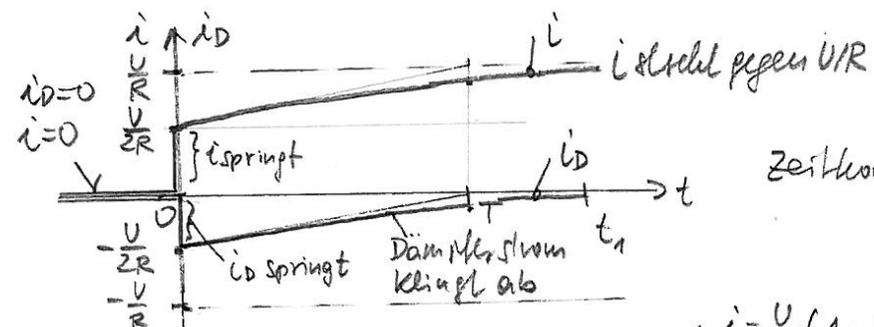
$0 \leq t \leq t_1$
 $i(t) = \frac{U}{R} \cdot \frac{\lambda(x_1) \cdot \frac{1}{\lambda_1} (1 - e^{-\frac{\lambda_1 t}{T_0}}) + x}{1 + \alpha} = \frac{U}{R} \cdot \frac{1 + \alpha - e^{-\frac{\lambda_1 t}{T_0}}}{1 + \alpha} = \frac{U}{R} \cdot \left(1 - \frac{e^{-\lambda_1 t / T_0}}{1 + \alpha} \right)$
 $\lambda(x_1) = \lambda_1$





$$\lambda(\lambda_1) = \lambda_1$$

$$i_D(t) = \frac{U}{R} \cdot \frac{N}{N_D} \cdot \alpha \frac{1}{1+\alpha} \left(\lambda_1 \frac{1}{\lambda_1} (1 - e^{-\frac{\lambda t}{T_0}}) - 1 \right) = \frac{U}{R} \cdot \frac{N}{N_D} \cdot \frac{\alpha}{1+\alpha} \cdot e^{-\frac{\lambda t}{T_0}}$$

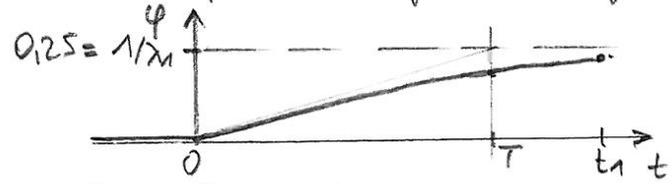


Zeitkonstante $T = \frac{T_0}{\lambda_1} = \frac{T_0}{1 + \frac{\lambda_1}{\alpha}} = \frac{(1+\alpha) \cdot N^2 L_0 / R}{1 + \lambda_1 h}$

Beispiel: $N_D/N=1 \Rightarrow \alpha = \frac{R}{R_D} \left(\frac{N_D}{N} \right)^2 = \frac{R}{R_D} = 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} i = \frac{U}{R} \cdot (1 - \frac{1}{2} e^{-t/T}) \quad i(0) = \frac{U}{2R} \\ i_D = -\frac{U}{R} \cdot (\frac{1}{2}) e^{-t/T} \quad i_D(0) = -\frac{U}{2R} \end{array} \right.$$

Achtung: Die Ströme i_D , i springen, da keine Spannung U_L vorhanden ist.
Die magnetische Energie W_m springt nicht und deshalb auch nicht ab, Fluss.



$$W_m = \frac{L_2 i^2}{2} + \frac{L i^2}{2} + \frac{M i i_D}{2} + \frac{M i_D^2}{2} + \frac{L_D i_D^2}{2} + \frac{L_{2D} i_D^2}{2}$$

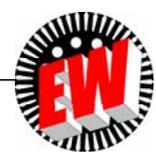
Beispiel: $\lambda_1 h = 3, \lambda_1 = 1 + \lambda_1 h = 4, 1/\lambda_1 = 0.25$ ($M=L=L_D$ bei $N=N_D$)

$$= \frac{L_2 i^2}{2} + \frac{L_{2D} i_D^2}{2} + \frac{1}{2} (i + i_D)^2 \cdot L$$

Wenn $L_2=0, L_{2D}=0: W_m = \frac{1}{2} L (i + i_D)^2$

$t < 0: i=0, i_D=0: W_m = 0, t = 0+: i + i_D = \frac{U}{R} \left(1 - \frac{1}{1+\alpha} \right) + \left(-\frac{U}{R} \right) \frac{N}{N_D} \frac{\alpha}{1+\alpha} = 0 = W_{m+}$

$W_{m-} = W_{m+}$ (magn. Energie springt nicht!)



3) Bei $t=t_1$: φ so groß ($\varphi=\varphi_1$), dass $F_H = \frac{\lambda'(x_1)}{2} \cdot \frac{\Phi_0^2}{L_0} \cdot \varphi_1^2 = k(x_0-x_1) = F_F \Rightarrow$
($x=x_1$)

(I): $m\ddot{x}=0, \Rightarrow F = F_H - F_F = 0$: Abheben der Scherbe möglich.

Für $t > t_1$: $\varphi > \varphi_1 \Rightarrow F_H > F_F$

$m\ddot{x} + F_H - F_F = 0$ ($F=0$: kein Heften der Scherbe am Brausbeleg)

$\ddot{x} = (F_H - F_F)/m < 0$: Beschleunigung in $-x$ -Richtung

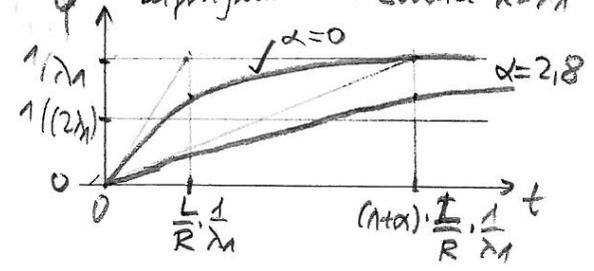
Lösung von $m\ddot{x} + \frac{\lambda'(x)}{2} \cdot \frac{\Phi_0^2}{L_0} \cdot \varphi^2(t) - k(x_0-x(t)) = 0$, $T_0\dot{\varphi} + \varphi \cdot \lambda(x) = 1$ erforderlich

$\varphi(t_1) = \varphi_1, \varphi(t_1) = \varphi_1, \lambda(x) = 1 + \frac{x}{a}, \lambda'(x) = \frac{1}{a}$

- Nichtlineares Gleichungssystem wegen $\varphi^2, \varphi \cdot \lambda = \varphi + \frac{\varphi \cdot x}{a} \Rightarrow$ numerische Lösung nötig

Näherung für starke Dämpfung ($= R_D i_0^2$ groß): Flussaufbau langsam

Dämpfungsfluss: Faktor α :
Bei festgehaltenen Scherbe $x=x_1$



$\alpha = \frac{R}{R_D} \cdot \left(\frac{N_D}{N}\right)^2$ a) $R_D \rightarrow \infty: \alpha = 0$ ($i_D = 0$)
keine Dämpfung

b) $N_D = 0: \alpha = 0$: —

c) $R_D > 0: \alpha \uparrow \infty$: hohe Dämpfung

$T_0 = (1+\alpha) \frac{N^2 L_0}{R}$

a) } $\alpha = 0: T_0 = \frac{N^2 L_0}{R} = \frac{L}{R}$: Zeitkonstante der Spule N

c) $\alpha > 0: T_0 = (1+\alpha) \frac{L}{R}$: Zeitkonstante vergrößert sich, Flussaufbau verlangsamt





Was bedeutet „Laufstrom“?

Laufstromer Flussaufbau (T_0) gegenüber
mechanischer Eigenschwingung $T_M = \frac{1}{f_e} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{k/m}}$: $T_0 \gg \frac{2\pi}{\sqrt{k/m}}$! Dann ist der
Beschleunigungsterm (Trägheit) gegenüber statischen Kräften klein: $m\ddot{x} \rightarrow 0$

$$(I) : \frac{\lambda'(x)}{2} \cdot \frac{\Phi_0^2}{L_0} \cdot \varphi^2 - k(x_0 - x) = 0 \Rightarrow \varphi(x(t)) = \sqrt{2k L_0 (x_0 - x)} \cdot \frac{1}{\lambda(x)} \cdot \frac{1}{\Phi_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Einsetzen in (II)}: T_0 \cdot \dot{\varphi} + \lambda(x) \cdot \varphi = T_0 \frac{d}{dt} \varphi + \lambda(x) \varphi = T_0 \cdot \varphi'(x) \frac{dx}{dt} + \lambda(x) \varphi(x) = 1$$

$$\frac{d}{dt} \varphi(x(t)) = \frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \varphi'(x) \cdot \frac{dx}{dt}$$

Trennung der Variablen x und t :

$$\frac{T_0 \cdot \varphi'(x) dx}{1 - \lambda(x) \varphi(x)} = dt \quad \left| \int_{t_1}^t \text{ bzw. } \int_{x_1}^x \right.$$

$$\int_{x_1}^x \frac{T_0 \cdot \varphi'(f) df}{1 - \lambda(f) \varphi(f)} = \int_{t_1}^t dt = t - t_1$$

$$\text{Lösung möglich: } \int_{x_1}^x \dots df = I(x) - I(x_1)$$

$$t = t_1 + I(x) - I(x_1)$$

Statt $x(t)$ erhalten wir $t(x)$,
was aber graphisch sofort
darstellbar ist

Bei $x=0$: Ausdehnung der Schwinde am
Spulenteil : $t_2 = t_1 + I(0) - I(x_1)$

$$t_1 \leq t \leq t_2 \Leftrightarrow x_1 \geq x \geq 0$$

Aus $x \rightarrow t \rightarrow \dot{x}(t), \varphi(x(t)), \dot{\varphi}(t)$





4) Anschlag der Schwinge am Spulenteil : $t = t_2$: $v = 0$!

$$v=0: \varphi(t_2) = \varphi_2 = \frac{1}{\Phi_0} \cdot [2kL_0 x_0 / \lambda(0)]^{1/2}, \quad \dot{\varphi}(t_2) = 0, \quad F_M > F_F$$

$\varphi(t_2) = \varphi_2, \quad \lambda(x=0) = \lambda(0) = 1 + \frac{0}{k} = 1$

(II): $T_0 \dot{\varphi} + \varphi \cdot \lambda(0) = 1, \quad \varphi(t=t_2) = \varphi_2$ $\varphi(t)$: $t_2 \leq t < \infty$ durch Lösen von (II)

$$\varphi_h + \varphi_p = \varphi(t), \quad \varphi_p = \frac{1}{\lambda(0)} = 1, \quad \varphi_h = C e^{-t \cdot \lambda(0)/T_0} = C e^{-t/T_0}, \quad C \cdot e^{-t_2/T_0} + 1 = \varphi_2$$

$$\underline{\varphi(t)} = \underline{(1 - \varphi_2) \cdot e^{-\frac{t-t_2}{T_0}} + 1} = \underline{1 - (1 - \varphi_2) \cdot e^{-\frac{t-t_2}{T_0}}}, \quad C = (\varphi_2 - 1) e^{t_2/T_0}$$

$$\Rightarrow \dot{i}(t) = \frac{U}{R} \cdot \frac{1}{1+\alpha} \left[\alpha + \lambda(0) \cdot \overset{=1}{1} - (1 - \varphi_2) e^{-\frac{t-t_2}{T_0}} \right] = \frac{U}{R} \left[1 - \frac{1 - \varphi_2}{1+\alpha} e^{-\frac{t-t_2}{T_0}} \right]$$

$$\Rightarrow \dot{i}_D(t) = \frac{U}{R} \cdot \frac{N}{N_D} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{1+\alpha} \cdot \left[\lambda(0) \cdot (1 - (1 - \varphi_2) e^{-\frac{t-t_2}{T_0}}) - 1 \right] = \underline{-\frac{U}{R} \cdot \frac{N}{N_D} \cdot \frac{\alpha}{1+\alpha} \cdot (1 - \varphi_2) e^{-\frac{t-t_2}{T_0}}}$$

$$\dot{i}(t_2) = \frac{U}{R} \cdot \left[1 - \frac{1 - \varphi_2}{1+\alpha} \right], \quad \dot{i}_D(t_2) = -\frac{U}{R} \cdot \frac{N}{N_D} \cdot \frac{\alpha}{1+\alpha} \cdot (1 - \varphi_2)$$

Beachte! Der Flussspitzenwert ist in dämpfungs un abhängig. Nur die Zeitkonstante T_0 hängt von α ab. Die Stromverteilung i, i_D hängt auch in der Amplitude von α ab!





Kontrolle: $\varphi = \frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{L(x) \cdot (N_i + N_D i_D)}{\frac{U}{R} N L_0} \Big|_{x=0, t > t_2} = \frac{L_0 \cdot (N_i + N_D i_D)}{\frac{U}{R} N L_0} = \frac{R}{U} \cdot (i + \frac{N_D}{N} i_D) =$

$L(0) = L_0 / \lambda(0) = L_0 = \mu_0 \frac{A}{h}$

$$= \frac{R}{U} \left[\frac{U}{R} \right] \cdot \left(1 - \frac{1-\varphi_2}{1+\alpha} e^{\frac{t_2-t}{T_0}} + (-1) \cdot \frac{N_D}{N} \cdot \frac{N}{N_D} \cdot (1-\varphi_2) e^{\frac{t_2-t}{T_0}} \cdot \frac{\alpha}{1+\alpha} \right) =$$

$$= \left(1 - \frac{1-\varphi_2}{1+\alpha} (1+\alpha) e^{\frac{t_2-t}{T_0}} \right) \Rightarrow \underline{\varphi = 1 - (1-\varphi_2) e^{\frac{t_2-t}{T_0}}} \quad (\text{siehe oben})$$

$$t \rightarrow \infty : \varphi = 1 \Leftrightarrow \underline{\Phi(t \rightarrow \infty) = \Phi_0} = \frac{U}{R} \cdot \overset{\uparrow}{i(t \rightarrow \infty)} \cdot L_0 N \quad (L \text{ für } N=1)$$

5) Zahlenwertbeispiel:

$$\frac{x_1}{h} = 3, \frac{x_0}{x_1} = 2 \quad \left(\frac{x_0}{x_1} = 6! \right) : \varphi_1 = \frac{\Phi(t_1)}{\Phi_0} = \frac{1}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_1 = \varphi(t_1) \Big|_{x=0} = \frac{1}{\Phi_0} \cdot \left[\frac{2 L_0 k (x_0 - x_1)}{\lambda(x_1)} \right]^{1/2} = \frac{1}{\lambda_1} \cdot (1 - e^{-\frac{t_1 \cdot \lambda_1}{T_0}})$$

$$t_1 = -\frac{T_0}{\lambda_1} \cdot \ln(1 - \lambda_1 \varphi_1)$$

$$\frac{1}{6} = \left(\frac{1}{\Phi_0} \cdot \frac{2 L_0 k x_1 (\frac{x_0}{x_1} - 1)}{1/h} \right)^{1/2}, \quad \frac{1}{36} \cdot \Phi_0^2 \cdot \frac{1}{2 L_0 k h^2} = \frac{x_1}{x_1} \cdot \left(\frac{x_0}{x_1} - 1 \right) = 3 \cdot (2-1) = 3$$

$$\frac{\Phi_0^2}{2 L_0 k h^2} = 3 \cdot 36 = 108, \quad \left(\frac{U}{R} N \right)^2 \frac{L_0}{2 k h^2} = 108$$





Möglicher Lösungsweg für $\int_{x_1}^x \frac{\varphi'(\xi) d\xi}{1-\lambda(\xi)\varphi(\xi)} = \int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{d\varphi}{1-(7-108\varphi^2)\varphi} = \int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{\varphi d\varphi}{1-7\varphi+108\varphi^3} \quad *)$

$$\lambda(\xi) = 1 + \frac{\xi}{x_0} = 1 + \frac{1}{x_0} x_0 (1-18\varphi^2) = 1 + 6(1-18\varphi^2) = 7 - 108\varphi^2, \quad \varphi' d\xi = d(\varphi(\xi))$$

$$\varphi(\xi) = \left[\frac{2kL_0 x_0 h}{\Phi_0^2} \cdot (1 - \frac{\xi}{x_0}) \right]^{1/2} - (\varphi \Phi_0)^2 \frac{1}{2kL_0 x_0 h} + 1 = \frac{\xi}{x_0}, \quad \frac{\xi}{x_0} = 1 - \varphi^2 \frac{\Phi_0^2}{2kL_0 h^2 x_0} = 1 - \varphi^2 \frac{3 \cdot 36}{\frac{6}{18}}$$

$$*) = \frac{1}{108} \int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{\varphi d\varphi}{\varphi^3 - \frac{7}{108}\varphi + \frac{1}{108}} = \frac{1}{108} \int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{\varphi d\varphi}{(\varphi + 0,308)(\varphi^2 - 0,308\varphi + 0,03)} = \frac{1}{108} \left[\int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{d\varphi A}{\varphi + 0,308} + \int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{(B\varphi + C)d\varphi}{\varphi^2 - 0,308\varphi + 0,03} \right] = **)$$

FORMEL VON CARDANO: $(\varphi - \varphi_1)(\varphi - \varphi_2)(\varphi - \varphi_3) = \varphi^3 + 3p\varphi + 2q$, $p = -\frac{7}{3 \cdot 108}$, $q = \frac{1}{2 \cdot 108}$

$$\varphi_1 = u + v, \quad u = \sqrt[3]{-p + \sqrt{p^2 + q^3}}, \quad v = \sqrt[3]{-p - \sqrt{p^2 + q^3}} \Rightarrow \varphi_1 = -0,308$$

$$(\varphi - \varphi_1)(\varphi - \varphi_2)(\varphi - \varphi_3) = (\varphi - \varphi_1) \cdot (\varphi^2 - \varphi(\varphi_2 + \varphi_3) + \varphi_2 \varphi_3) = (\varphi + 0,308)(\varphi^2 - 0,308\varphi + 0,03)$$

$$A\varphi^2 - 0,308A\varphi + 0,03A + B\varphi^2 + C\varphi + B \cdot 0,308\varphi + C \cdot 0,308 = 1$$

Koeff. Vergleich: $A+B=0, -0,308A+0,308B+C=0, 0,03A+C \cdot 0,308=1$

$$\Rightarrow A = -6,263, B = 6,263, C = 3,858$$





$$x_4) = \frac{1}{108} \left[-6,263 \ln(\varphi + 0,308) \right]_{\varphi_1}^{\varphi} + \int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{(6,263\varphi + 3,858) d\varphi}{(\varphi - \frac{0,308}{2})^2 + 0,0796^2} = I(\varphi) - I(\varphi_1) = I(\varphi) - I\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$\frac{1}{2} \cdot 6,263 \int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{2(\varphi - \frac{0,308}{2}) d\varphi}{(\varphi - \frac{0,308}{2})^2 + 0,0796^2} + \int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{[6,263 \cdot \frac{0,308}{2} + 3,858] \cdot \frac{1}{0,0796} \cdot \frac{d\varphi}{0,0796}}{\left[\frac{\varphi - \frac{0,308}{2}}{0,0796}\right]^2 + 1}$$

$$3,1315 \cdot \ln\left[\left(\varphi - \frac{0,308}{2}\right)^2 + 0,0796^2\right] \Big|_{\varphi_1}^{\varphi} + 60,584 \arctan\left[\frac{\varphi - \frac{0,308}{2}}{0,0796}\right] \Big|_{\varphi_1}^{\varphi}$$

$$I(\varphi_1) = + \frac{1}{108} \left\{ \underbrace{-6,263 \ln\left(\frac{1}{6} + 0,308\right)}_{4,6668} + \underbrace{3,1315 \cdot \ln\left[\left(\frac{1}{6} - \frac{0,308}{2}\right)^2 + 0,0796^2\right]}_{-15,7717} + \underbrace{60,584 \arctan\left[\frac{\frac{1}{6} - \frac{0,308}{2}}{0,0796}\right]}_{9,5605} \right\}$$

$$= -0,0143$$

$$t - t_1 = 0,0143 + \frac{1}{108} \left\{ -6,263 \cdot \ln(\varphi + 0,308) + 3,1315 \ln\left[(\varphi - 0,154)^2 + 0,0796^2\right] + 60,584 \arctan\left(\frac{\varphi - 0,154}{0,0796}\right) \right\}$$

Wobei $\frac{x}{x_0} = \frac{x}{x_1} \cdot \frac{x_1}{x_0} = \frac{x}{x_1} \cdot \frac{1}{2} = 1 - 18\varphi^2 \Rightarrow \varphi = \frac{1}{\sqrt{18}} \sqrt{1 - 0,5 \frac{x}{x_1}}$

$$t_1 \leq t \leq t_2 \Leftrightarrow x_1 \geq x \geq 0 \Rightarrow \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2 \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{18}} \cdot \sqrt{1 - 0,5} = \frac{1}{\sqrt{36}} = \frac{1}{6} = 0,167 \\ \varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{18}} = 0,2357 \end{array} \right.$$

