

1.14.4. Selbsterregte Schwingungen



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Nichtlineare Differentialgleichungen 2. Ordnung: Sonderfall der Untergruppe der nichtlinearen Schwingungsgleichung

$$\ddot{x}(t) + \underbrace{f(\dot{x}, x, t)}_{\text{Trägheit}} + \underbrace{g(x, t)}_{\text{Dämpfung}} = \underbrace{s(t)}_{\text{Rückstellkraft}} + \underbrace{s(t)}_{\text{Störung}}$$

"heteronomes" (nicht-autonomes) Schwingungssystem

Sonderfall: $f(\cdot), g(\cdot)$: keine explizite Zeitabhängigkeit: $f(\dot{x}, x), g(x)$

ohne Dämpfung: $\ddot{x}(t) + g(x) = 0$: konserve System "autonomes" System

Autonome Systeme: Darstellbar als zwei nichtlin. Diff. Gleichungen 1. Ordnung

$$\dot{x} = h_1(x, y), \quad \dot{y} = h_2(x, y) \rightarrow \text{Phasenraum}$$

geschwindigkeitslage: $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{h_2(x, y)}{h_1(x, y)}$, Anfangsbedingung $x(0) = x_0, y(0) = y_0$

$y' = h_3(x, y), y(x_0) = y_0$

oder: $h_2(x, y) - h_1(x, y) \cdot y' = 0$

$F(x, y) = C$ (Trajektorie)

Allgemeine Lösung dieser Diff. Gleichung 1. Ordnung: $F(x, y) = \text{const.} = C$: Trajektorie

$$\Rightarrow h_2(x, y) \cdot \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} + h_1(x, y) \cdot \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = 0, \text{ denn Wert der Trajektorie } F(x, y) = C \text{ ist:}$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\partial F(x, y) / \partial x}{\partial F(x, y) / \partial y}$$



$$F(x, y) = C \Rightarrow dF(x, y) = dC = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = - \frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = - \frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial y} = \frac{h_2(x, y)}{h_1(x, y)}; F(x, y) = F(x_0, y_0) = C$$



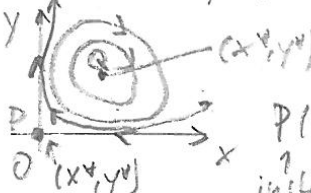


Gleichgewichtspunkt: $y' = 0 \Rightarrow y(x) = \text{konst.} \Rightarrow \frac{\partial F(x^*, y^*)}{\partial x} = 0$
 $(x^*, y^*) \Rightarrow y^*(x^*) = \text{konst.}$
 Mit $\frac{dx}{dy} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial x} = 0$ in $(x^*, y^*) \Rightarrow \frac{\partial F(x^*, y^*)}{\partial y} = 0$ } Bedingung für Gleichgewicht!

Falls $x(0) = x_0 = x^*$, $y(0) = y_0 = y^* \Rightarrow x_0 = x^* = \text{konst.}, y_0 = y^* = \text{konst.} \Rightarrow$ System verbleibt im selben Punkt = Gleichgewicht!

Gleichgewicht { stabil
labil (instabil)

z.B.:



$\Rightarrow$ Gleichgewicht!

Beispiel: $\dot{x} = -x(1-y), \dot{y} = y(1-x)$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{y(1-x)}{x(1-y)} \Rightarrow$ Trennung der Variablen:

$$-\frac{dy}{\frac{y}{1-y}} = \frac{dx}{\frac{x}{1-x}} \Rightarrow -\int dy \left(\frac{1}{y} - 1\right) = \int dx \left(\frac{1}{x} - 1\right), -[\ln y - y] = \ln x - x - k.$$

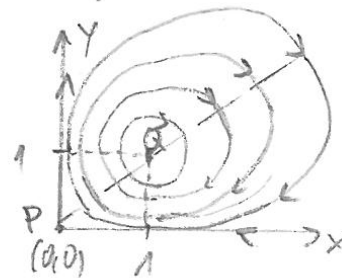
$$\ln x + \ln y = \ln(x \cdot y) = x + y + k, e^{x+y+k} = e^{x+y} \cdot e^k = x \cdot y \Rightarrow x \cdot y \cdot e^{-(x+y)} = c, = F(x, y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y e^{-(x+y)} + x \cdot y \cdot e^{-(x+y)} \cdot (-1) = y(1-x) e^{-(x+y)} \stackrel{!}{=} 0, \frac{\partial F}{\partial y} = x(1-y) e^{-(x+y)} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \begin{cases} y(1-x) \cdot e^{-(x+y)} = 0 \\ x(1-y) \cdot e^{-(x+y)} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(1-x) = 0, x(1-y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} (x^*, y^*) = (0, 0) = P \\ (x^*, y^*) = (1, 1) = Q \end{cases}$$

Gleichgewichtszustände (x^*, y^*) werden aus-
gehend von den A.B. (x_0, y_0) nach ∞

Einiger Zeit ($t \rightarrow \infty$) erreicht! $x^* = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t), y^* = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$





Beispiel: $\dot{x} = -x \cdot (1-y)$ $\dot{y} = y \cdot (1-x)$ $x(0) = x_0, y(0) = y_0$

Ein See mit Hechten (Anzahl $x(t)$) und Forellen (Anzahl $y(t)$).

Die Hechte leben davon, Forellen zu fressen; die Forellen leben von kleinerer Nahrung im See, die "unbegrenzt" zur Verfügung steht. x, y : normiert auf 1.

- Je mehr Hechte x leben, desto mehr Hechte können sich vermehren:

$$\frac{dx}{dt} \sim x(t)$$

- Je mehr Forellen gegenüber Hechten leben, desto mehr Hechte können sich ernähren und vermehren: $dx/dt \sim y - 1$. Bei der Anzahl Forellen $y = 1$ bleibt die Hechtanzahl x konstant: $dx/dt \sim y - 1 = 0 \Rightarrow x = \text{konst.} \Rightarrow \underline{\dot{x} = -x(1-y)}$

- Je mehr Forellen y leben, desto mehr können überleben und sich vermehren: $\dot{y} \sim y$.

- Je mehr Hechte x leben, desto stärker nimmt die Forellenzahl ab: $\dot{y} \sim -x + 1$. Bei der Hechtanzahl $x = 1$ bleibt die Forellenzahl konstant: $\dot{y} \sim -x + 1 = 0 \Rightarrow y = \text{konst.}$

$$\Rightarrow \underline{\dot{y} = y \cdot (1-x)}$$

Lösung: $x(t) \cdot y(t) = e^{+x(t)+y(t)} \cdot C(x_0, y_0)$





Lösung: $x(t) \cdot y(t) = e^{+x(t)+y(t)} \cdot C(x_0, y_0)$

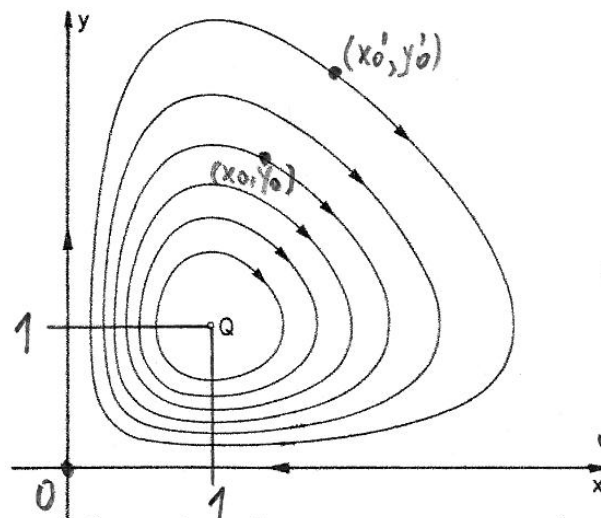
a) Für $x=1, y=1$ ist $\dot{x}=0, \dot{y}=0 \Rightarrow x=\text{const.}=1, y=\text{const.}=1$ Biologisches Gleichgewicht

$$C(x_0=1, y_0=1) = e^{-2}$$

b) Für $x=0, y=0$ ist $\dot{x}=0, \dot{y}=0 \Rightarrow x=\text{const.}=0, y=\text{const.}=0$: Beide Arten sind nicht vorhanden!

$$C(x_0=0, y_0=0) = 0.$$

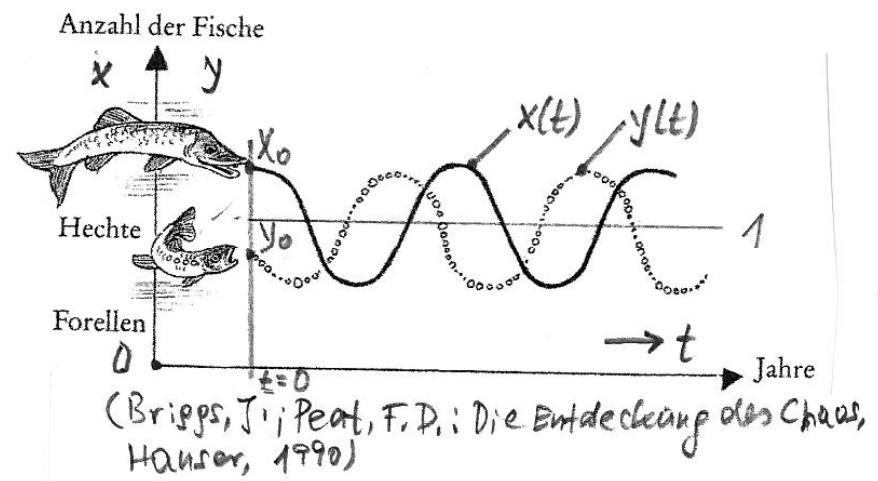
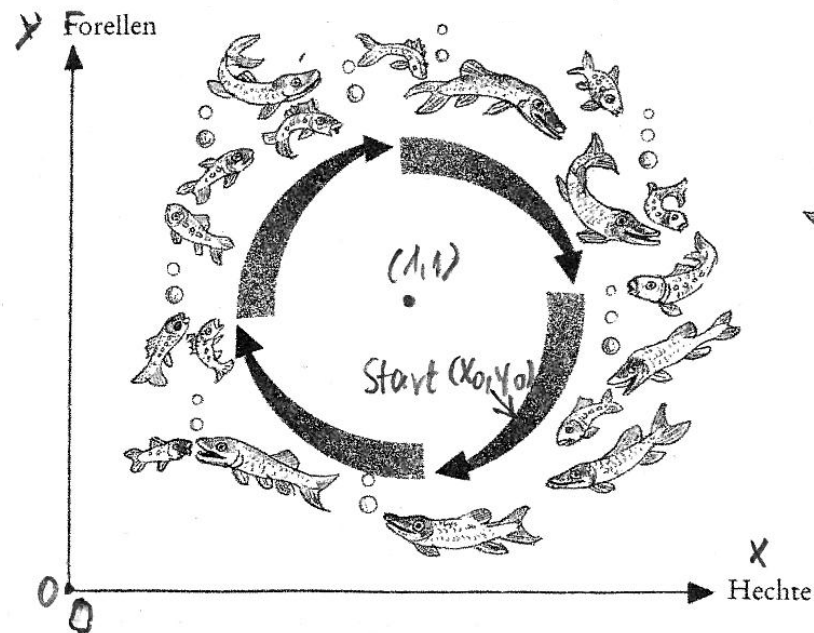
c) Für $0 \leq C \leq 1/e^2$ ergeben sich Lösungen, die periodisch in t sind: $x(t), y(t)$!



(H.-J. Dirschnitz, Vieweg, 1988)

- Sinkt die Zahl der Forellen y , muss verjüngt auch die Zahl der Hechte x wegen Nahrungsmangel sinken.
- Dadurch können sich wieder die Forellen y wegen "unbegrenzten" Nahrungsangebotes und weniger Jäger x vermehren.
- Mit zunehmender Forellenzahl y nimmt auch die Hechtzahl x wegen großem Nahrungsangebot zu, und dezimiert wieder die Anzahl der Forellen y .
- Asymptoten: x -Achse: Da die Anzahl der Forellen $y=0$ ist, sinkt die Anzahl x der Hechte wegen Verhungern $\rightarrow 0$.
- y -Achse: Ist die Hechtzahl Null ($x=0$), so wächst die Forellenzahl y wegen Jägermangels unbegrenzt!







$\dot{x} = -x + xy$, $\dot{y} = y - xy$ Lösung für kleine Abweichungen $\Delta x, \Delta y$
vom stationären Zustand x_0, y_0

$$x(t) = x_0 + \Delta x(t), y(t) = y_0 + \Delta y(t), \Delta x/x_0 \ll 1, \Delta y/y_0 \ll 1, \dot{x} = \dot{\Delta x}, \dot{x}_0 = 0 \\ \dot{y} = \dot{\Delta y}, \dot{y}_0 = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta \dot{x} &= -x_0 - \Delta x + x_0 y_0 + x_0 \Delta y + y_0 \Delta x + \underbrace{\Delta x \Delta y}_{\ll 1} \\ \Delta \dot{y} &= y_0 + \Delta y - x_0 y_0 - x_0 \Delta y - y_0 \Delta x - \underbrace{\Delta x \Delta y}_{\ll 1} \end{aligned} \right\} \text{Gleichgewicht:}$$

$$\left. \begin{aligned} -x_0 + x_0 y_0 &= 0 \\ y_0 - x_0 y_0 &= 0 \end{aligned} \right\} y_0 = x_0 = 1$$

$$\Delta \dot{x} = \underbrace{(y_0 - 1)}_{=0} \Delta x + x_0 \Delta y, \Delta \dot{y} = \underbrace{\Delta y \cdot (1 - x_0)}_{=0} - y_0 \Delta x$$

$$\Delta \ddot{x} = x_0 \Delta \dot{y} = x_0 (-y_0 \Delta x) \Rightarrow \Delta \ddot{x} + \underbrace{x_0 y_0}_{=1} \Delta x = 0 \Rightarrow \Delta \ddot{x} + \Delta x = 0$$

$$\text{ebenso: } \Delta \ddot{y} + \Delta y = 0 \Rightarrow \Delta x = -\Delta \dot{y}/y_0 = -\Delta \dot{y}$$

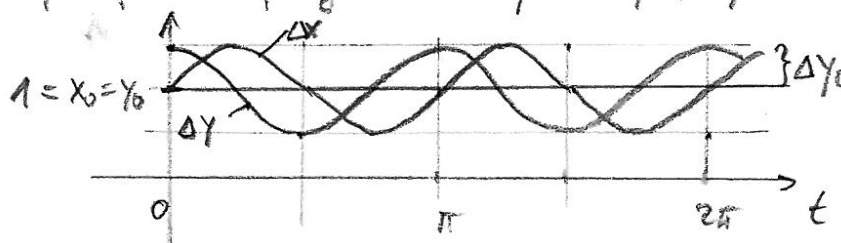
$\Delta y = C \cos(t + \varphi)$, C, φ lt. Anfangsbedingung z.B.: $\Delta y(0) = \Delta y_0, \Delta \dot{y}(0) = \Delta \dot{y}_0$

$$\Delta x = C \sin(t + \varphi) = -\Delta \dot{y}$$

$$\Delta \dot{y}_0 = 0, \Delta y_0 = \Delta y(0):$$

$$\Delta y(t) = \Delta y_0 \cos t$$

$$\Delta x(t) = \Delta y_0 \sin t$$





DUPIN'sche Indikatrix: $xy \cdot e^{-(x+y)} = \text{konst.} = K$

Gleichgewichtspunkt $(x, y) = (1, 1)$: $K_0 = e^{-2} = 1/e^2$

kleine Abweichungen von $(1, 1)$: $x = x_0 + \xi$, $y = y_0 + \eta$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$

$$(1+\xi)(1+\eta)e^{-(2+\xi+\eta)} = K < K_0, \quad (1+\xi)(1+\eta)e^{-\xi} \cdot e^{-\eta} = K \cdot e^2$$

$$\xi, \eta \ll 1: e^{-\xi} \approx 1-\xi, \quad e^{-\eta} \approx 1-\eta \Rightarrow \underbrace{(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi)(1-\eta)}_{(1-\xi^2)(1-\eta^2)} = K \cdot e^2$$

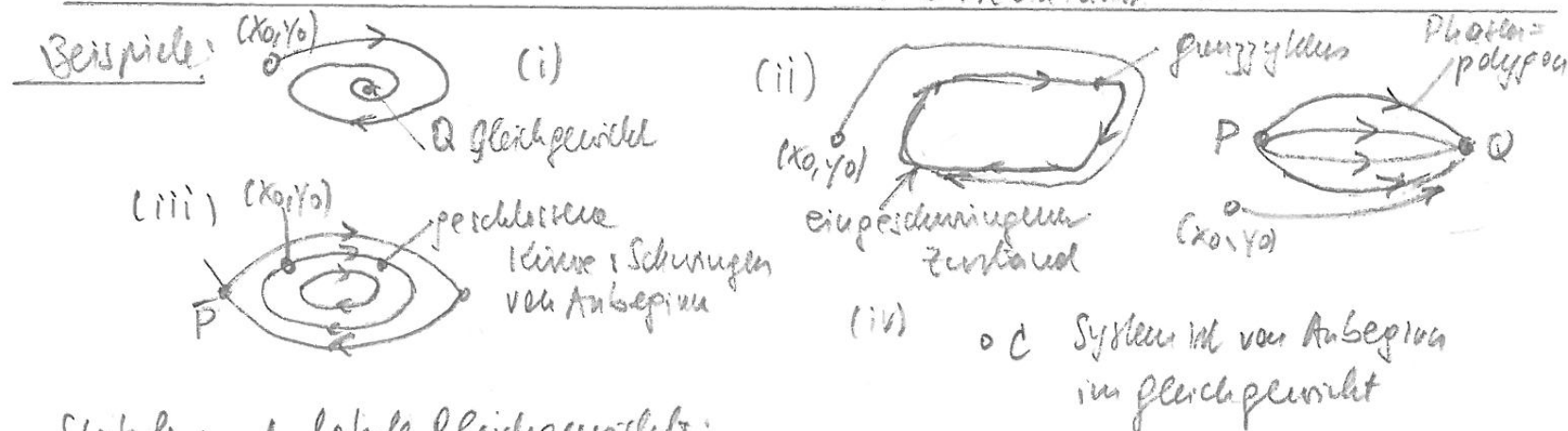
$$1 - \xi^2 - \eta^2 + \underbrace{\xi^2 \eta^2}_{\approx 0} = K \cdot e^2 \quad (1-\xi^2)(1-\eta^2) = K \cdot e^2$$

$$\xi^2 + \eta^2 \approx 1 - K e^2 \Rightarrow \left(\frac{\xi}{\underbrace{\sqrt{1-K e^2}}_{<1}} \right)^2 + \left(\frac{\eta}{\underbrace{\sqrt{1-K e^2}}_{<1}} \right)^2 = 1$$

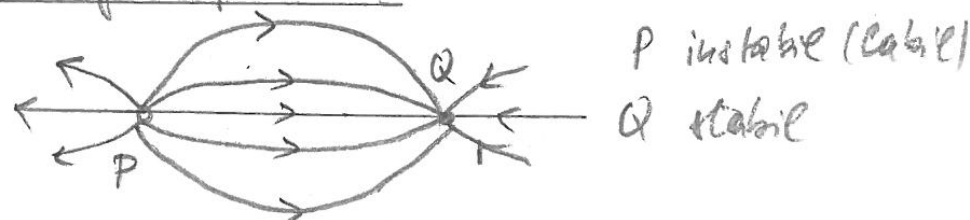
DUPIN'sche Indikatrix
ist Kreis mit Radius
 $r = \sqrt{1 - K e^2}$

Satz von BENDIXON: Wenn die Trajektorie $F(x,y)=C$ einen endlichen Bereich der Phaseebene (x,y) nicht verläßt, so gilt:

- (i) C strebt gegen Gleichgewichtspunkt $(t \rightarrow \infty)$ oder (ii) C nähert sich asymptotisch einem Grenzzyklus oder Phasenpolygon $(t \rightarrow \infty)$
(iii) C ist eine geschlossene Kurve oder (iv) C ist ein Punkt oder



Stabile und labile Gleichgewichte:



Folgerung aus (ii):

Ein nichtlineares autonomes System 2. Ordnung kann ohne äußere Erregung nur infolge der Anfangsbedingungen freiend schwingen (Leben, Einschnurung = Vorgang*) und zwar auch dann, wenn ein Dämpfungsterm vorhanden ist. Durch die nichtlineare Systemeigenschaft wird nämlich ständig Energie aus einem Speicher der Schwingung zugeführt. Im Gegensatz zu den erzwungenen Schwingungen ($S(t) \neq 0$) heißen diese Schwingungen autonom oder selbst erregt.

$$\ddot{x} + f(\dot{x}, x) + g(x) = 0$$

Zwei Unterklassen dieser nichtlinearen Diff.-Gleichung 2. Ordnung:

a) $f(\dot{x}, x) = D(\dot{x}) \cdot \dot{x}$ b) $f(\dot{x}, x) = D(x) \cdot \dot{x}$, $g(x)$ beliebig
 $g(x) = k \cdot x$

$$\ddot{x} + D(\dot{x}) \dot{x} + k \cdot x = 0$$

$k > 0$, Konstante $A, B, C > 0$ mit

$$\left. \begin{array}{l} D(\dot{x}) \geq B \text{ für } |\dot{x}| \geq A \\ D(\dot{x}) \geq -C \neq \dot{x} \\ D(0) < 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{es gibt mindestens} \\ \text{eine (nicht konst.)} \\ \text{periodische Lösung} \\ \text{(Grenzzyklus)} \end{array}$$

$$\ddot{x} + D(x) \cdot \dot{x} + g(x) = 0 \quad \text{LIENARD-Gleichung}$$

$$D(x) = D(-x), \quad g(x) = -g(-x)$$

$$D_I(x) = \int_0^x D(f) df, \quad g_I(x) = \int_0^x g(f) df$$

$$D_I(x) < 0, 0 < x < \hat{x}, \quad D_I(x) > 0, x > \hat{x}$$

$g(x) > 0, x > 0$
 Wenn $D_I(x)$ monoton wachsend für $x > \hat{x}$
 und

$$\lim_{x \rightarrow \infty} D_I(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g_I(x) = \infty,$$

dann hat die LIENARD-Gleichung genau
einen Grenzzyklus.



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT





Beispiel: Van der Pol-Differentialgleichung (Sonderfall der LIENARD-Gleichung)

$$D(x) = \alpha(x^2 - 1), \quad g(x) = \omega_0^2 x \Rightarrow \ddot{x} + \alpha(x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \alpha > 0$$

$$D(x) = D(-x): \alpha(x^2 - 1) = \alpha((-x)^2 - 1); \quad g(x) = -g(-x): \omega_0^2 x = -\omega_0^2(-x)$$

$$D_I(x) = \int_0^x D(f) \cdot df = \alpha \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \quad D_I(x) = 0 \Rightarrow \hat{x} = 0, \hat{x} = \pm 1: x > 1: D_I(x) \uparrow \text{monoton}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \rightarrow \infty$$

$$g_I(x) = \int_0^x \omega_0^2 f \cdot df = \omega_0^2 \frac{f^2}{2} \Big|_0^x = \omega_0^2 \frac{x^2}{2} : \lim_{x \rightarrow \infty} \omega_0^2 \frac{x^2}{2} \rightarrow \infty$$

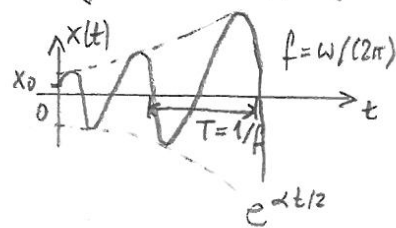
→ Die Van der Pol-Gleichung hat genau einen Grenzzyklus!

Näherungslösung: $\alpha > 0$!

a) Lineare Näherung: $\alpha \rightarrow 0: \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \rightarrow x(t) = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t, A, B = f(x_0, \dot{x}_0)$
 ungedämpfte Schwingung
 (Eigenschwingung)

b) Linearisiert für $|x| \ll 1$: $x^2 \ll 1$:

Negative Dämpfung $-\alpha$!



$$\ddot{x} + \alpha(-1)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0: \text{entdämpfte Eigenschwingung, falls } \omega_0 > \alpha/2$$

$$\lambda^2 - \alpha\lambda + \omega_0^2 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \omega_0^2} = \frac{\alpha}{2} \pm j\omega, \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\alpha^2}{4}}$$

$$x(t) = A e^{\frac{\alpha}{2}t} \cdot \cos \omega t + B e^{\frac{\alpha}{2}t} \cdot \sin \omega t$$

$$A, B = f(x_0, \dot{x}_0)$$

Für $t \rightarrow \infty$ wird $|x| \rightarrow \infty$, und
 es gilt die Näherung $x^2 \ll 1$ nicht mehr! Der nichtlineare Term
 begrenzt die Schwingungsamplitude = Grenzzyklus!





c) Nichtlinear für kleines $\alpha \ll 1$: Ansatz: $x(t) = A(t) \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ statt $C(t) \cos \omega t + S(t) \sin \omega t$!

d) Numerische Lösung für beliebiges $\alpha (> 0)$: $\ddot{x} + f(x) \cdot \dot{x} + g(x) = 0 \hat{=} \dot{x} = y$
(RUNGE-KUTTA)
 $\dot{y} = -f(x) \cdot y - g(x)$
 $x(0), y(0) = \dot{x}(0)$

zu c): $\dot{x}(t) = \dot{A}(t) \cdot \cos(\omega t + \varphi) + A(t) \cdot (-\sin(\omega t + \varphi)) \cdot \omega$

$$\ddot{x}(t) = \ddot{A}(t) \cdot \cos(\omega t + \varphi) - 2\dot{A}(t) \cdot \omega \sin(\omega t + \varphi) + A(t) \cdot (-\omega^2) \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$A(t) = A(t, \alpha)$: Taylor-Reihe für kleines α : $A(t, \alpha) = A(t, 0) + \frac{dA(t, \alpha)}{d\alpha} \cdot \alpha + \frac{d^2 A(t, \alpha)}{d\alpha^2} \cdot \frac{\alpha^2}{2!} + \dots$

$\alpha \ll 1$: $A(t, \alpha) \approx A(t, 0) + \alpha \frac{dA(t, \alpha)}{d\alpha}$ Für $\alpha = 0 \Rightarrow A(t, \alpha) = A(t, 0) = \text{konst. unabh. von } t$!

$$A(t, \alpha) \approx A_0 + \alpha \frac{dA(t, \alpha)}{d\alpha} = A_0 + A_1(t) \cdot \alpha \quad A(t, 0) = A_0$$

$$\dot{A}(t, \alpha) = \frac{d}{dt} A(t, \alpha) = \frac{dA_0}{dt} + \alpha \frac{dA_1(t)}{dt} = \alpha \frac{dA_1(t)}{dt}$$

$$\ddot{x}(t) = \ddot{A} \cdot \cos \Phi - 2\dot{A}\omega \sin \Phi - \omega^2 A \cos \Phi \approx -2\dot{A}\omega \sin \Phi - \omega^2 A \cos \Phi$$

$$\omega t + \varphi = \Phi \quad \dot{A} \ll 2\dot{A}\omega, \omega^2 A$$

$$\text{Van der Pol-Gleichung: } -2\dot{A}\omega \sin \Phi - \omega^2 A \cos \Phi + \underbrace{\alpha(A^2 \cos^2 \Phi - 1)}_{\substack{-\alpha \dot{A} \cos \Phi + \alpha \omega A \sin \Phi + \alpha A^2 \frac{1}{2}(\cos \Phi + \cos 2\Phi) - \alpha \omega A^3 \cdot \frac{1}{2} \\ \cdot (\sin \Phi + \sin 2\Phi \cdot \cos 2\Phi)}} \cdot (A \cos \Phi - \omega A \sin \Phi) + \omega_0^2 A \cos \Phi = 0$$

Nur Grundschwingung $\cos \Phi, \sin \Phi$ berücksichtigen! $\cos^2 \Phi = (1 + \cos 2\Phi)/2$
 $\cos 3\Phi, \sin 3\Phi$ vernachlässigen!





$$\begin{aligned}
 \cos \Phi, \cos 2\Phi &= \frac{1}{2} [\cos 3\Phi + \cos \Phi] \text{ gemäß } \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)] \\
 \sin \Phi, \cos 2\Phi &= \frac{1}{2} [\sin 3\Phi - \sin \Phi] \text{ gemäß } \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)] \\
 -2\dot{A}\omega \sin \Phi - \omega^2 A \cos \Phi - \alpha \dot{A} \cos \Phi + \alpha \omega A \sin \Phi + \alpha \frac{A^2 \dot{A}}{2} \cos \Phi + \alpha \frac{A^2 \dot{A}}{2} \cdot \frac{1}{2} [\cos 3\Phi + \cos \Phi] - \\
 - \alpha A^3 \omega \frac{1}{2} \sin \Phi - \alpha A^3 \omega \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} [\sin 3\Phi - \sin \Phi] + \omega_0^2 A \cos \Phi &= 0 \quad \text{vernachlässigen} \\
 \sin \Phi \underbrace{\left[-2\dot{A}\omega + \alpha \omega A - \alpha A^3 \omega \frac{1}{2} + \alpha A^3 \omega \frac{1}{4} \right]}_{=0 \text{ (i)}} + \cos \Phi \underbrace{\left[-\omega^2 A - \alpha \dot{A} + \frac{\alpha A^2 \dot{A}}{2} + \frac{\alpha A^2 \dot{A}}{2 \cdot 2} + \omega_0^2 A \right]}_{=0 \text{ (ii)}} &= 0 \quad \text{da } \sin(\omega t + \varphi), \cos(\omega t + \varphi) \text{ i. A. } \neq 0! \\
 \text{(i)} \quad -2\dot{A} + \alpha A - \alpha A^3 \frac{1}{4} = 0 & \quad \text{(ii)} \quad \alpha \left(-\dot{A} + \frac{3}{4} \dot{A} A^2 \right) + (\omega_0^2 - \omega^2) A = 0 \\
 2\dot{A} = \alpha A \left(1 - \frac{A^2}{4} \right) & \quad \alpha \dot{A} \left(\frac{3A^2}{4} - 1 \right) = A \cdot (\omega^2 - \omega_0^2) \\
 2 \text{ nichtlin. DGL. 1. Ordnung für zwei Unbekannte } \omega, A & \\
 2\dot{A} = \frac{(\dot{A}^2)}{A} = \frac{\alpha}{A} \cdot \left(A^2 - \frac{A^4}{4} \right) & \quad \dot{A}(t, \alpha) = \frac{\alpha dA(t)}{dt} \Rightarrow \alpha \dot{A} = \alpha^2 \dot{A}_1 \ll 1, \alpha \ll 1! \\
 A^2 = \xi \Rightarrow \dot{\xi} = \alpha \left(\xi - \frac{\xi^2}{4} \right) & \quad \alpha \dot{A} \left(\frac{3A^2}{4} - 1 \right) = \alpha^2 \dot{A}_1 \left(\frac{3A^2}{4} - 1 \right) \approx 0 = A(\omega^2 - \omega_0^2) \\
 & \quad \Rightarrow \underline{\underline{\omega = \pm \omega_0}}
 \end{aligned}$$





Trennung der Variablen:

$$\frac{df}{f - \frac{f^2}{4}} = \alpha dt, \int \frac{df}{f} + \int \frac{df}{4-f} = \int \alpha dt$$

$$\frac{1}{f - \frac{f^2}{4}} = \frac{1}{f} + \frac{1}{4-f} \quad \ln f - \ln(4-f) = \alpha t + \alpha t_0 \quad (\text{Int. konst. } t_0)$$

$$\ln\left(\frac{f}{4-f}\right) = \alpha(t+t_0) \Rightarrow \frac{f}{4-f} = e^{\alpha(t+t_0)}, f = (4-f)e^{\alpha(t+t_0)}$$

$$A^2 = \frac{4e^{\alpha(t+t_0)}}{1+e^{\alpha(t+t_0)}} \quad A(t) = \frac{2}{\sqrt{1+e^{-\alpha(t+t_0)}}} \quad \frac{f(1+e^{\alpha(t+t_0)})}{A^2}, A > 0$$

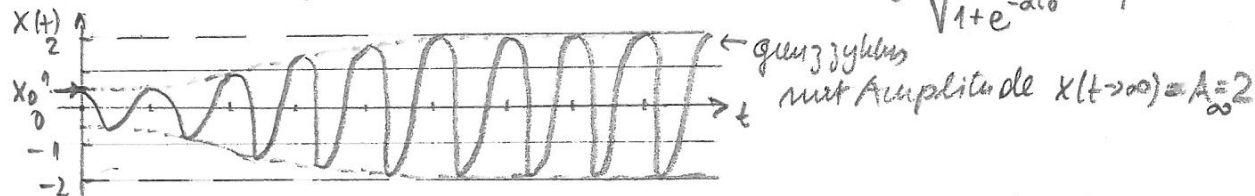
Lösung der Van der Pol-Gleichung für $\alpha \ll 1$:

$$x(t) = \frac{2}{\sqrt{1+e^{-\alpha(t+t_0)}}} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$A(t)$ ist die Einhüllende der Schwingung ω_0

t_0, φ so, dass $x_0, \dot{x}_0$ erfüllt sind!

$A(t \rightarrow \infty) = 2$: Der Grenzwert wird nicht ∞ erreicht! $x(0) = x_0 = \frac{2}{\sqrt{1+e^{-\alpha t_0}}} \cdot \cos \varphi$



Selbstangeregte Schwingung, die von beliebig kleinen Werten x_0 starten kann.

Durch numerische Näherungsrechnung können auch die auf Grund der Nichtlinearität x^2 resultierenden Frequenzen $3\omega_0, 5\omega_0, \dots$ berücksichtigt werden; (DIRSCHNID: Mathematische Grundlagen der Elektrotechnik, Vieweg, 1988)

$$x(t) \approx \left[2 - \frac{1}{8} \left(\frac{\alpha}{\omega_0}\right)^2 + \dots\right] \cos \omega t + \left[\frac{3}{4} \frac{\alpha}{\omega_0} - \frac{7}{256} \left(\frac{\alpha}{\omega_0}\right)^3 + \dots\right] \sin \omega t +$$

$$+ \left[\frac{3}{16} \left(\frac{\alpha}{\omega_0}\right)^2 + \dots\right] \cos 3\omega t + \left[-\frac{1}{4} \frac{\alpha}{\omega_0} + \frac{21}{256} \left(\frac{\alpha}{\omega_0}\right)^3 + \dots\right] \sin 3\omega t + \dots$$

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \left(\frac{\alpha}{\omega_0}\right)^2 \frac{1}{16} + \frac{17}{3072} \left(\frac{\alpha}{\omega_0}\right)^4 + \dots\right)$$



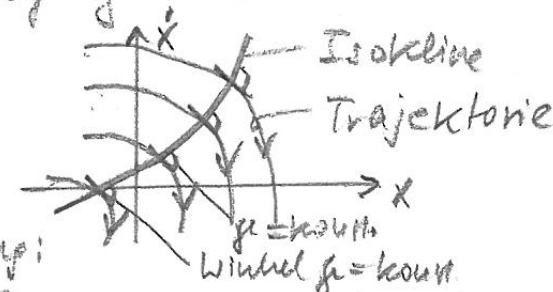


Graphisch-numerische Lösungsmethode für Differentialgleichungen 2. Ordnung!

Isoklinen-Methode: Isokline: Linie mit konstanter Neigung der sie schneidenden Trajektorien

$$\dot{x} = y \quad \ddot{x} = \dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \quad \ddot{x} = y$$

$$\ddot{x} = y \cdot \frac{dy}{dx}$$



Anwendung auf (normierte) van der Pol-Gleichung:

$$\ddot{x} + \alpha(x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \Rightarrow \tau = \omega_0 t \quad \ddot{x} = \frac{d^2 x}{d\tau^2} = \frac{d^2 x}{d\tau^2} \cdot \omega_0^2 = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dx}{d\tau} \right) \cdot \omega_0^2 = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dx}{d\tau} \right) \cdot \omega_0^2$$

$$\omega_0^2 \cdot \frac{d^2 x}{d\tau^2} + \frac{\alpha}{\omega_0} (x^2 - 1) \omega_0^2 \frac{dx}{d\tau} + \omega_0^2 x = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\tau} = \mu; \quad x'' + \mu(x^2 - 1)x' + x = 0$$

$$\mu = \alpha/\omega_0 \quad x' = y \Rightarrow x'' = y \frac{dy}{dx}$$

multivar. Diff. gl. 1. O.: $y \frac{dy}{dx} + \mu(x^2 - 1)y + x = 0$

Isokline: $I(x, y) = \text{konst.}$, wo gilt: $\frac{dy}{dx} = \text{konst.} = \mu \cdot m$, m : Skalenelement

$$y \cdot \mu \cdot m + \mu(x^2 - 1)y + x = 0$$

Isoklinengleichung: $y \cdot \mu(1 - m - x^2) = -x \leftarrow y \cdot \mu(m + x^2 - 1) = -x$

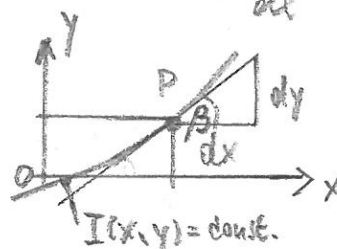
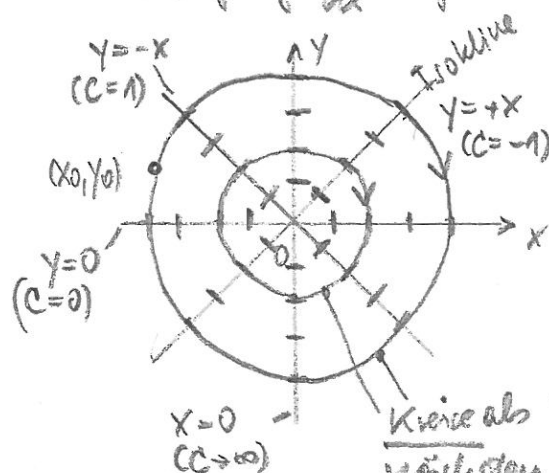




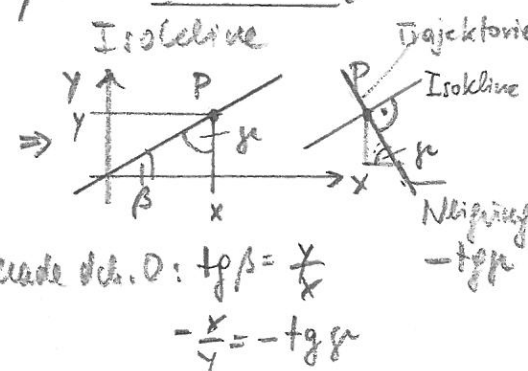
Sonderfall: $\alpha=0$ (ungefederte Schwingungsgleichung): $\mu=0$: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$
 $x'' + x = 0$

$$\frac{x}{y\mu - my\mu - y\mu x^2} = 1 \Rightarrow \frac{x}{-y \cdot y'} = 1 \Rightarrow y = -x \cdot \frac{dx}{dy} \quad \text{Beweis: } = c. \quad y = -x \cdot c; \text{ Geraden-}$$

Die Neigung $\frac{dy}{dx}$ längs der Isoklinen ist: $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$, also senkrecht zur



Isokline: hier: Gerade d.h. 0: $\text{tg } \beta = \frac{y}{x}$



$$-\frac{x}{y} = -\text{tg } \gamma$$

Kreise als Trajektorien, freihändig durch Vorzeichen oder
nächsten Neigungsabschnitte der Isoklinen ermittelt

(Beweis: $x'' + x = 0 \Rightarrow y = x'$: $y' + x = 0$: Lösung: $x(\tau) = A \cos(\tau + \varphi)$, $A, \varphi = f(x_0, x'_0)$)

$$y = x' = -A \sin(\tau + \varphi) \Rightarrow y^2 + x^2 = A^2 \sin^2(\tau + \varphi) + A^2 \cos^2(\tau + \varphi) = A^2, \quad x'_0 = y_0$$

$$y^2 + x^2 = A^2 \quad \text{bzw.} \quad \left(\frac{y}{A}\right)^2 + \left(\frac{x}{A}\right)^2 = 1: \text{ Kreisgleichung}$$

Radius ist Amplitude A





Isolierte Methode für Van der Pol-Gleichung: $\alpha > 0$ ($\mu = \frac{\alpha}{\omega_0} > 0$)

$$\mu \frac{dy}{dx} - m \mu y - \mu x^2 = x \Rightarrow y = \frac{x}{\mu(1-m-x^2)} \text{ mit Neigung } \frac{dy}{dx} = m/\mu$$

Fallunterscheidungen:

a) $m \rightarrow -\infty$: $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = -\infty$

b) $-\infty < m < 0$: $y = \frac{x}{\mu(1-m-x^2)}$, $\frac{dy}{dx} < 0$, $y(x) = \frac{x}{\mu(k-x^2)}$
 $k > 1$

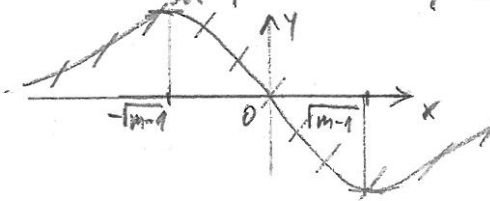
c) $m = 0$: $y = \frac{x}{\mu(1-x^2)}$, $k = 1$, $\frac{dy}{dx} = 0$

d) $0 < m < 1$: $0 < k < 1$, sonst wie b), aber $\frac{dy}{dx} > 0$ ($\geq \mu$)

e) $m = 1$: $y = -\frac{1}{\mu x}$, $\frac{dy}{dx} = \mu$

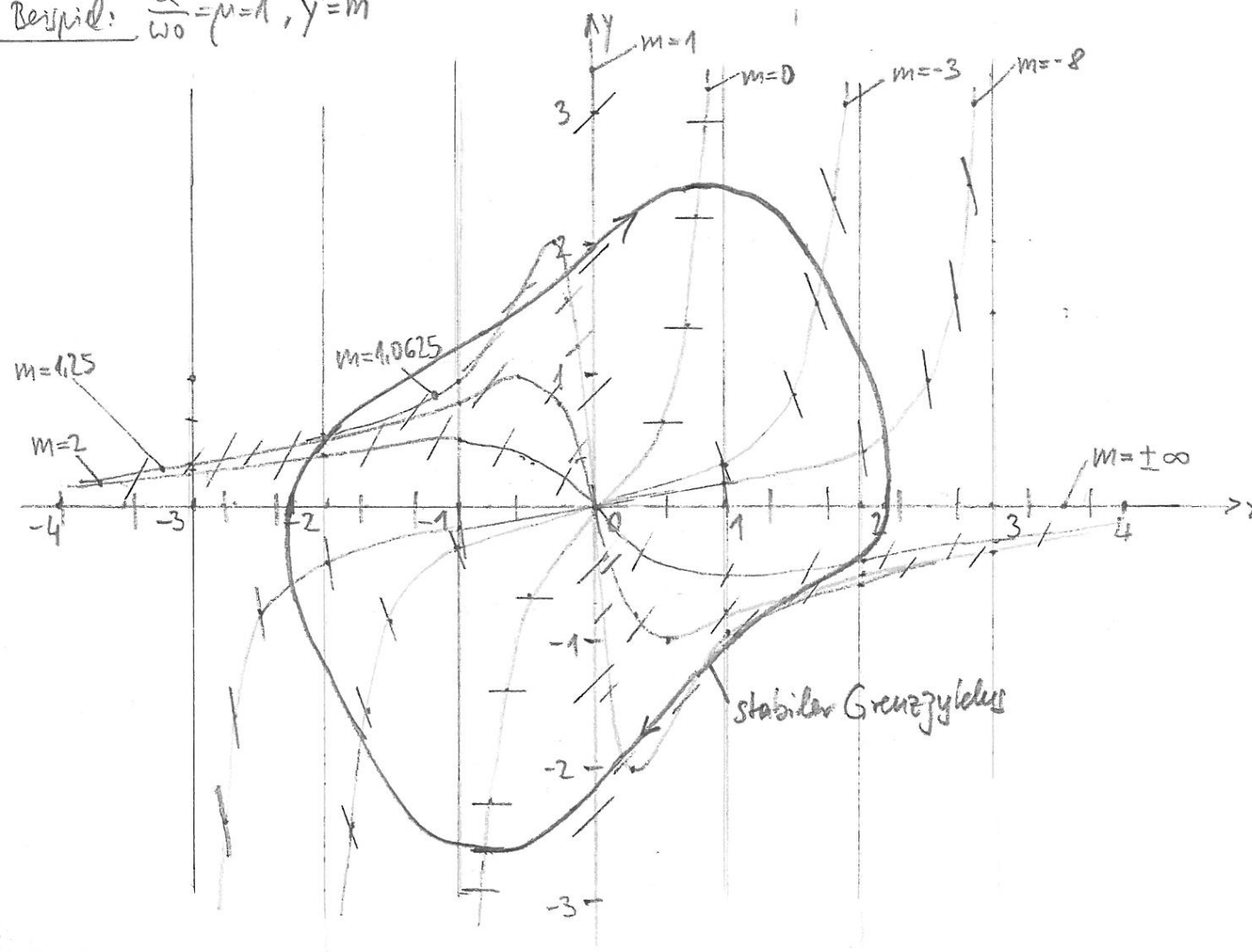
f) $m > 1$: $y = \frac{-x}{\mu(m-1+x^2)}$, $\frac{dy}{dx} > \mu$, $y(x) = \frac{-1}{2\mu^{1/m-1}} \cdot \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{m-1}}$
 $\frac{1}{x} + \frac{1}{m-1}$ ist "kloß"-Funktion

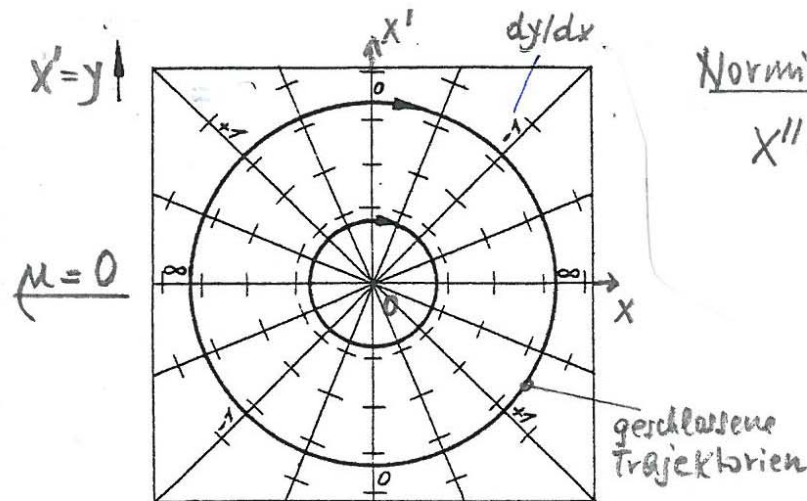
g) $m \rightarrow \infty$: $y = 0$
 $\frac{dy}{dx} \rightarrow \infty$





Beispiel: $\frac{x}{\omega_0} = \mu = 1, y' = m$





Normierte Van der Pol-Gleichung

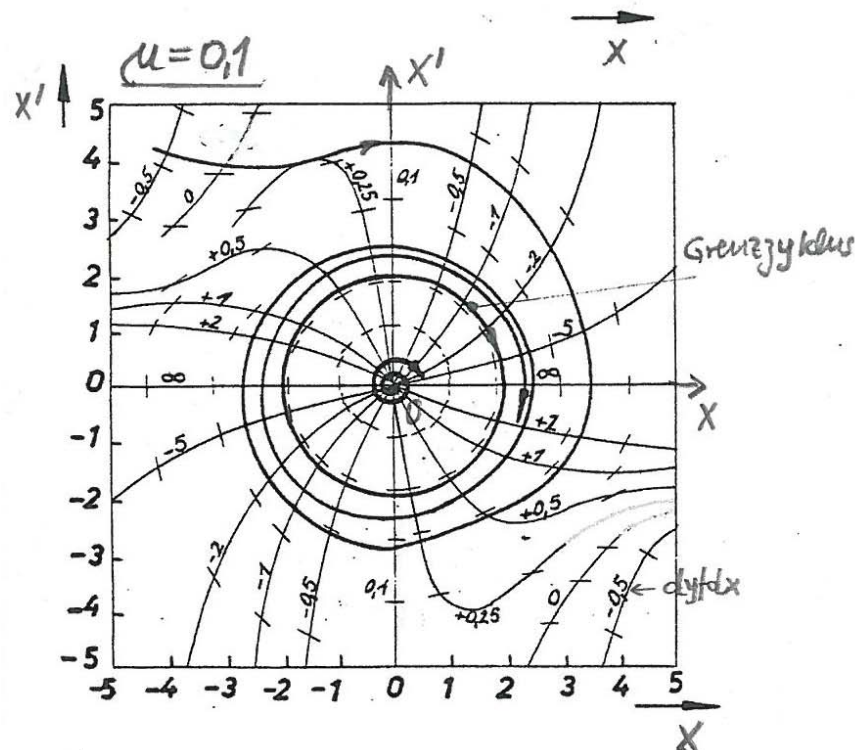
$$x'' + \frac{\alpha}{\omega_0} \cdot (x^2 - 1) \cdot x' + x = 0$$

$$\mu = \frac{\alpha}{\omega_0}$$

$$\frac{dx}{dz} = x'$$



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



Aus:
H. König, TU WIEN 1979
Frequenzumsetzung

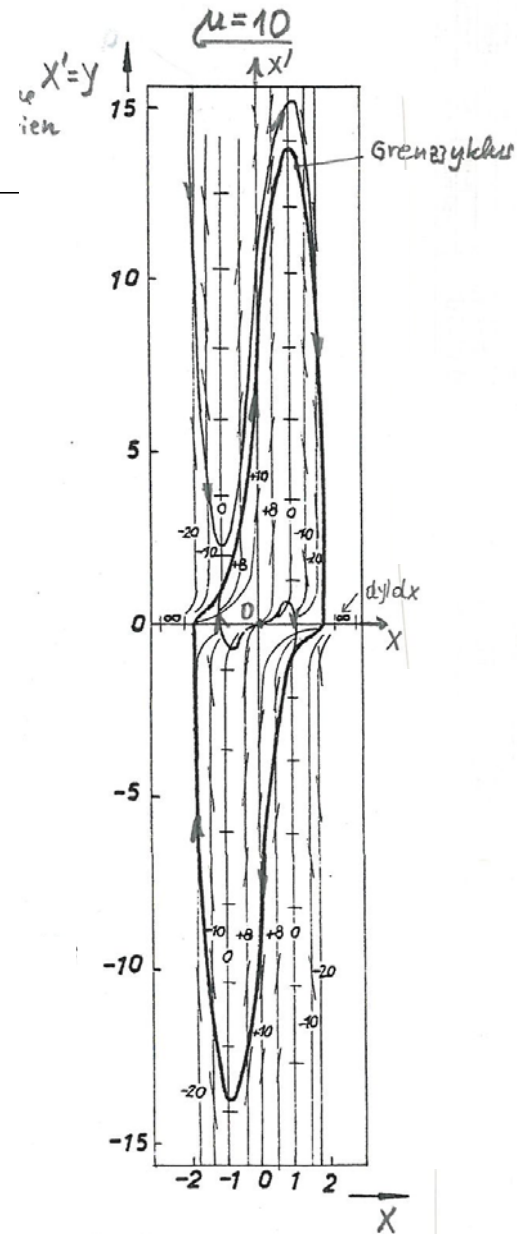
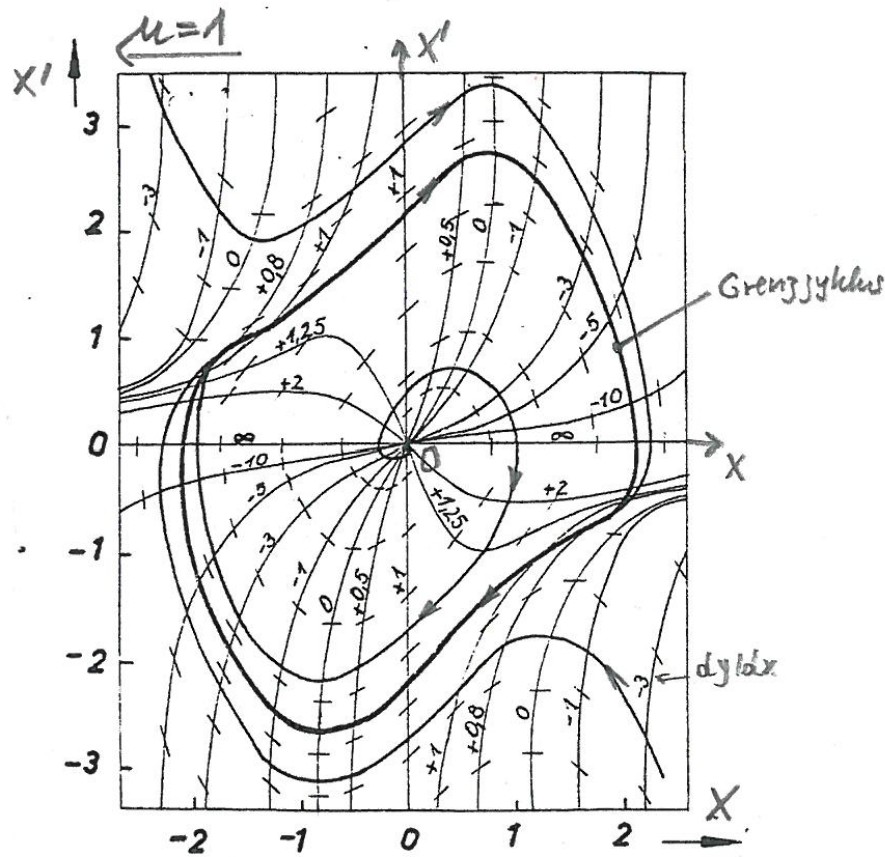


Normierte Van der Pol-Gleichung

$$x'' + \frac{\alpha}{\omega_0} \cdot (x^2 - 1) \cdot x' + x = 0$$

$$\mu = \frac{\alpha}{\omega_0}$$

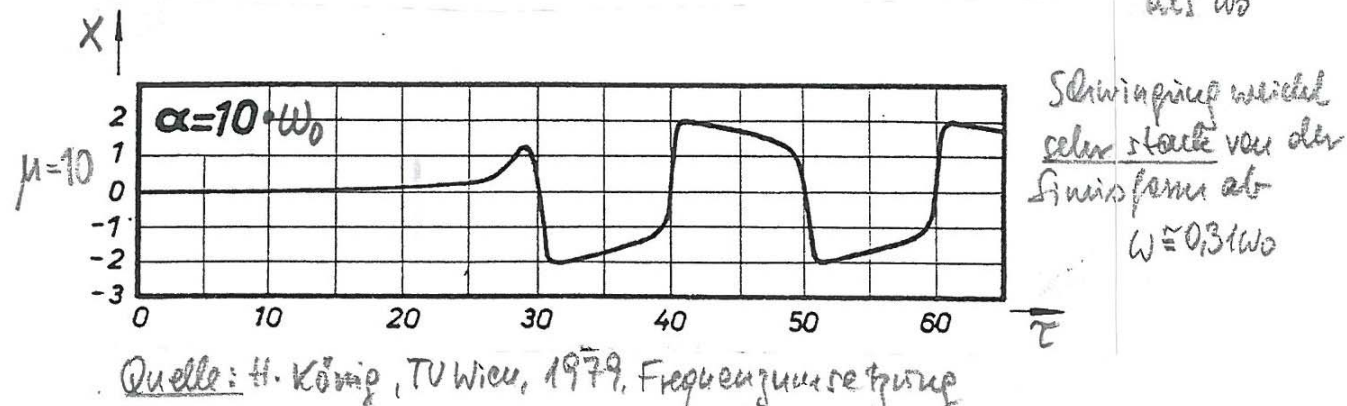
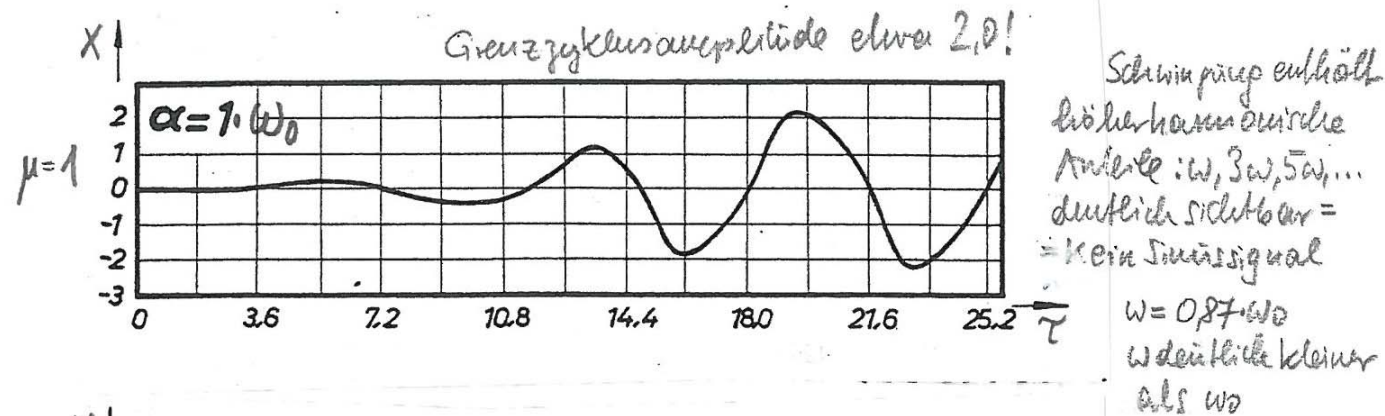
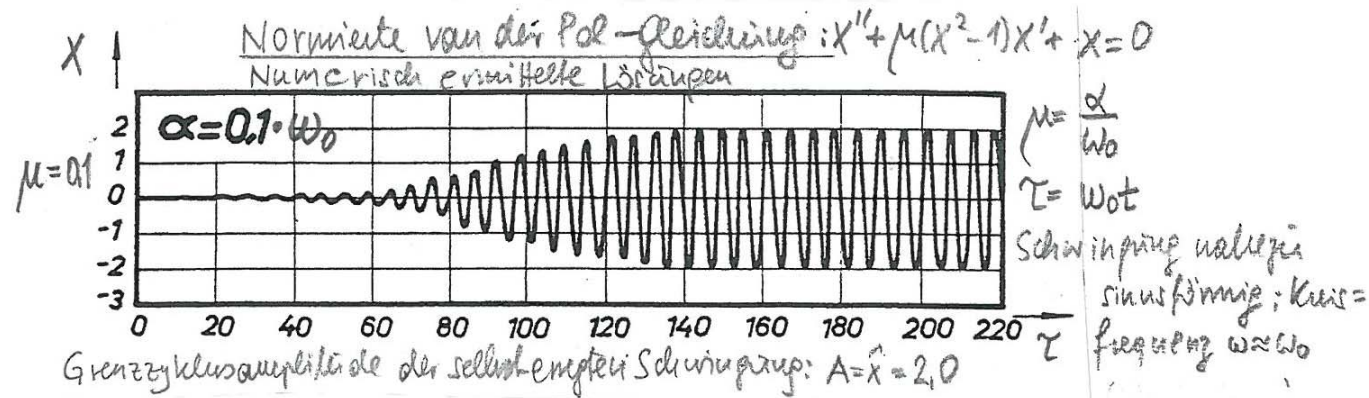
$$\frac{dx}{dz} = x'$$



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Aus:
H. König, TU WIEN 1979
Frequenzumsetzung







Näherungslösung: $\tau^* = \omega t$, $\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{\mu^2}{16} + \frac{17}{3072} \mu^4 + \dots\right)$ für $\mu < 1$

$$\begin{aligned} x(\tau) = & \left(2 - \frac{\mu^2}{8} + \dots\right) \cdot \cos \tau^* + \left(\frac{3}{4} \mu - \frac{7}{256} \mu^3 + \dots\right) \cdot \sin \tau^* \\ & + \left(\frac{3}{16} \mu^2 + \dots\right) \cdot \cos 3\tau^* + \left(-\frac{1}{4} \mu + \frac{21}{256} \mu^3 + \dots\right) \cdot \sin 3\tau^* \\ & + \left(-\frac{5}{96} \mu^2 + \dots\right) \cdot \cos 5\tau^* + \left(-\frac{35}{576} \mu^3 + \dots\right) \cdot \sin 5\tau^* + \dots \end{aligned}$$

$\frac{\omega}{\omega_0}$	1	0,999	$\approx 0,943$	aus der Näherungslösung (DIRSCHMID, Vieweg, 1988)
μ	0	0,1	1	

Aufklappen von $A(\tau) \approx \frac{2}{\sqrt{1 + e^{-\mu \cdot \tau} \cdot c}}$ c ist Anfangsbedingung $c = e^{-\alpha t_0}$: $0 < c < \infty$

Für $\mu < 1$:

$e^{-\mu \tau} \rightarrow 0$, umso rascher, je größer μ !

Je größer $\mu = \frac{\alpha}{\omega_0}$, desto rascheres Aufklappen!





Seltenstelektische Schwingungen:

Aufgabe: Für Übertragung elektromagnetischer Wellen via Antennen sind Hochfrequenzleistungsfähige Quellen nötig. Erzeugung über Synchrotron-Mittelfrequenz-generatorn; nur wenige kHz möglich.

RLC-Schwingkreis: Anstoßen der Eigenschwingung durch Zuschalten z.B. einer Gleichspannungsquelle führt zwar auf Hochfrequente Schwingungen $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$, wenn $\frac{R^2 C}{4L} < 1$, aber gedämpft mit $T = 2L/R$, daher keine Dauerschwingung.

Idee (vor 1900): Negatives „R“ einführen $\rightarrow$ Entdämpfte (aufklingende) Schwingung.

Wenn zusätzlich $R(I)$ (also nichtlinear), dann kann sich seltenstelektische Dauer-Schwingung einstellen, die (z.B. amplitudenmoduliert) als Signal über eine Antenne abgestrahlt werden kann.

Der Lichtbogen hat eine fallende $U(I)$ -Kennlinie und daher $R(I) < 0$.

$\Rightarrow$ Verwendung als Lichtbogen-Sender!

Gasentladungen: Gasdurchschlag zwischen zwei Elektroden (Spannungsabstimmung U) im Abstand d , wenn $E = \frac{U}{d} > E_D$ (Durchschlagfeldstärke)

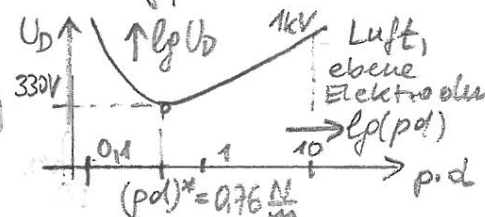
$E_D \approx 30 \dots 40 \text{ kV/cm}$ bei $10^{-2} \dots 1 \text{ mm}$ bei $10^{-2} \dots 1 \text{ bar}$, Homogenfeld E .

Allgemein: PASCHEN-Gesetz: $E_D = f(p, d) = f(p \cdot d)$

$U_{D, \min} = 330 \text{ V}$ bei $(p \cdot d)^* = 0,76 \frac{\text{N}}{\text{m}}$; bei $p = 10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ bar}$:

$$d = \frac{0,76}{10^5} \text{ m} \rightarrow E_D = \frac{U_D}{d} = \frac{330}{0,76} \cdot 10^5 = 434 \cdot 10^6 \frac{\text{V}}{\text{m}} = 434 \frac{\text{kV}}{\text{cm}}$$

Bei $1 \text{ mm} = d$, $p = 10^5 \text{ Pa}$; $p \cdot d = 10^2 \frac{\text{N}}{\text{m}}$: $U_D = 4,3 \text{ kV} \Rightarrow E_D = 43 \text{ kV/cm}$





Gasentladungen

selbstständig

Entladung erlischt ohne äußere Ladungsträgererzeugung (z.B.: Elektrodenheizung der Kathode = Elektronen-Gleichemission)

$$I < 10^{-12} \text{ A}$$

„Vorstrombereich“

selbstständig

Entladung erlischt von selbst aufrecht (abfließende Ladungsträger halten im Gas neue erzeugt d.h. Ionisation, Aufheizen der Elektroden beim Aufschlag)

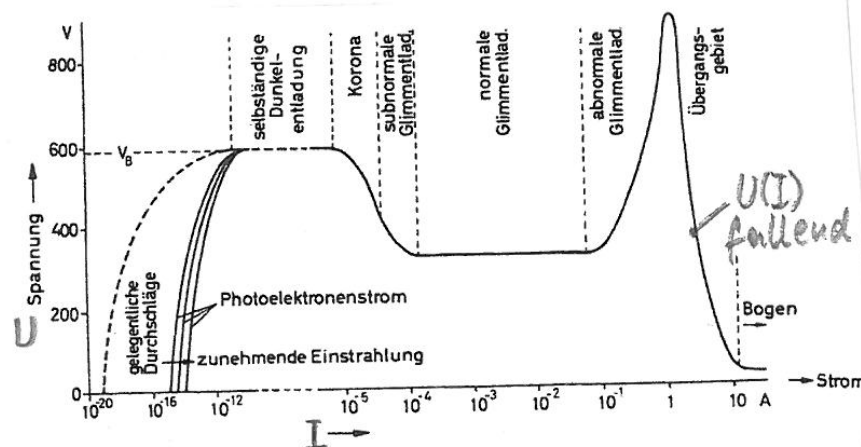
$$I > 10^{-12} \text{ A}$$

a) $10^{-12} \leq I \leq 10^{-5} \text{ A}$: Dunkelentladung

b) $10^{-5} \text{ A} \leq I \leq 1 \text{ A}$: Glühentladung

c) $1 \text{ A} < I$: Bogenentladung
(„Lichtbogen“)

Lichtbogen hat fallende $U(I)$ -Kennlinie, da mehr Strom den Bogen aufheizt, dadurch mehr Ladungsträger erzeugt werden und daher weniger Spannung benötigt wird.



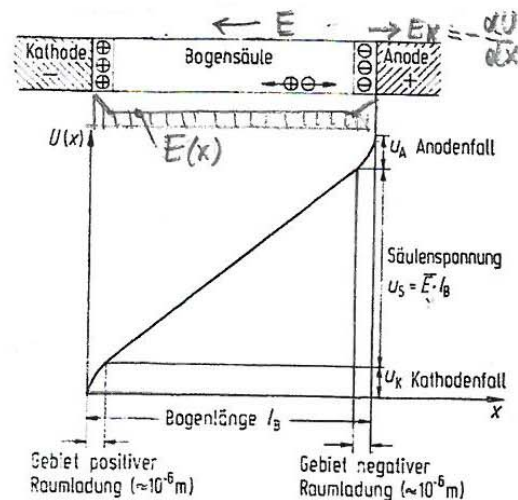
Strom-Spannungscharakteristik des gesamten Gasentladungsbereiches

Quelle: Prieder, W.: Plasma u. Lichtbogen, Vieweg, 1967





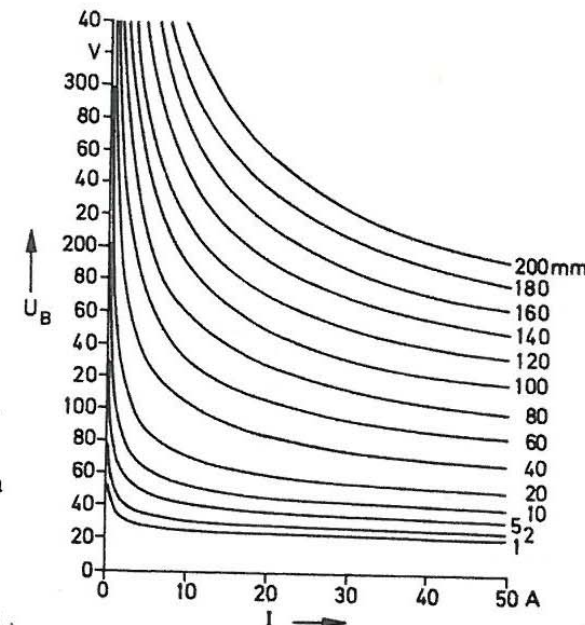
Der Lichtbogen:



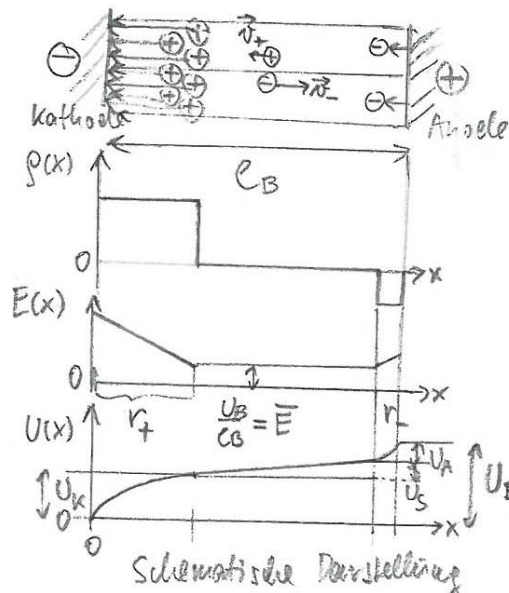
Quelle: HÜTTE, Ele. Energietechnik 3
Springer 1988

Stationäre Strom-Spannungs-
charakteristiken frei in Luft
brennender Niederstrombögen
mit Cu-Elektroden

Quelle: U. Rieder:
Plasma u. Lichtbogen,
Vieweg, 1967



Die auf die Kathode aufschlagenden pos. Ladungsträger der ionisierten Luft (O_2^+ , N_2^+ , ...) erzeugen eine, so dass durch Glühemission weitere Elektronen aus dem Metall in den Bogen austreten. Durch das E-Feld beschleunigt, ionisieren sie durch Stoßionisation weitere Luftmoleküle. Die langsamen (schweren) Luftionen ($\oplus$) bilden vor der Kathode eine positive Raumladung = Zone, wo das E-Feld stark abnimmt (Kathodenfall = Spannungsfall an dieser Zone U_k). Der Anodenfall U_A ist viel kleiner, da die schnellen (leichten) Elektronen rasch abfließen.



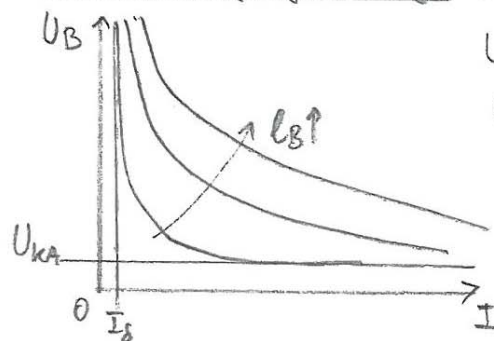
$$\begin{aligned} \text{div } \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{dE_x}{dx} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{E} &= -\text{grad } U \Rightarrow -\frac{dU}{dx} = E_x \\ \vec{E}_x &= -E \cdot \vec{e}_x, \quad E = -E_x = -\left(\frac{dU}{dx}\right) = U/l_B \\ \frac{dE_x}{dx} &= -\frac{dE}{dx} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow E = -\frac{\rho}{\epsilon_0} x + k, \quad \rho > 0: \oplus \\ &\quad \rho < 0: \ominus \\ E(x) &= \frac{U}{l_B} \end{aligned}$$

$$U_B = U_K + U_A + \underbrace{E \cdot (l_B - r_+ - r_-)}_{U_s} \approx U_K + U_A + E \cdot l_B$$

$r_+, r_- \ll l_B$

i.A. dominiert U_s über $U_K > U_A$! Daher nimmt U_B mit l_B zu, aber sinkt mit $I \uparrow$!

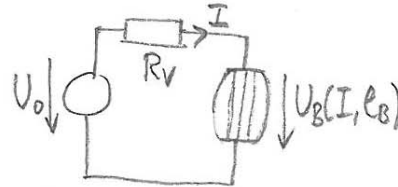
Stationäre Bogen Gleichung:



$$U_B = U_{KA} + (l_E + l_B) \cdot E_B \cdot \frac{1}{\ln^3\left(\frac{I}{I_s}\right)} \quad (\text{RIEDER}) \quad \text{gültig für } l_B > 3 \text{ cm}$$

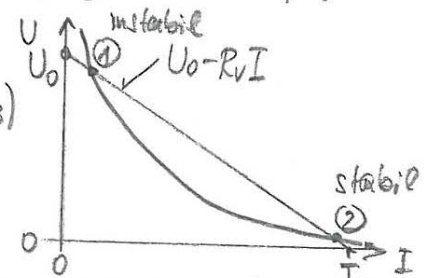
$$U_{KA} = U_K + U_A \approx U_K (\approx 26 \text{ V})$$

$$l_E = 1.3 \text{ cm bei Cu-Elektroden}, \quad E_B = 5.4 \text{ kV/cm}, \quad I_s = 7.4 \text{ mA}$$



$$U_0 = R_V I + U_B(I, l_B)$$

$$U_0 - R_V I = U_B(I)$$



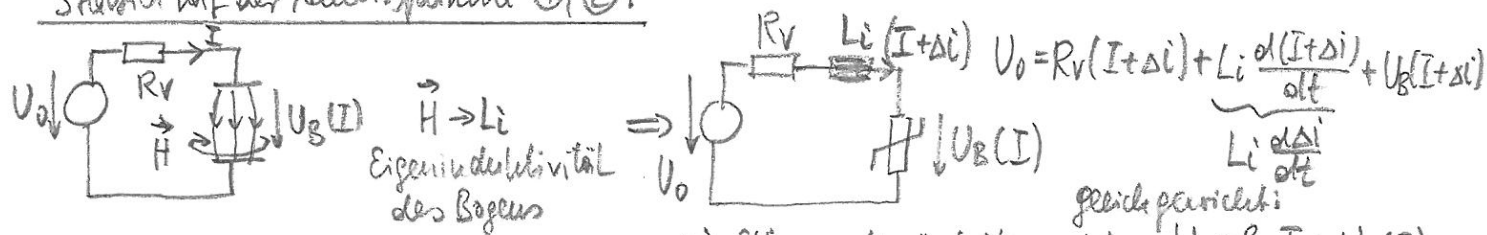
Zwei Betriebspunkte
①, ② möglich, aber
nur ② ist stabil!

$$I_K = U_0 / R_V$$





Stabilität der Lichtspannweite ①, ②:



$\vec{H} \rightarrow \vec{Li}$
Eigeninduktivität
des Bogens

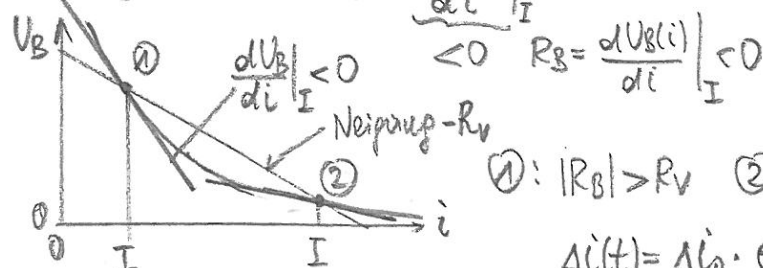
gleichgerichtet:

Δi : Störung des Arbeitspunkts $U_0 = R_V I + U_B(I)$

$$U_B(I + \Delta i) = U_B(I) + \left. \frac{dU_B(i)}{di} \right|_I \Delta i + \dots$$

$$U_0 - R_V I = R_V \Delta i + L_i \frac{d\Delta i}{dt} + U_B(I) + R_B \Delta i$$

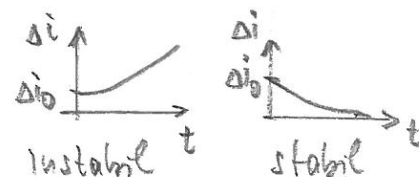
$$U = (R_V + R_B) \Delta i + L_i \frac{d\Delta i}{dt}, \Delta i(0) = \Delta i_0$$



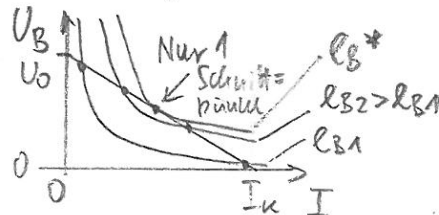
①: $|R_B| > R_V$ ②: $|R_B| < R_V$

$$\Delta i(t) = \Delta i_0 \cdot e^{-\frac{R_B + R_V}{L_i} t}$$

- ① $-\frac{R_B + R_V}{L_i} > 0$: Aufklappen von Δi instabil
 ② $-\frac{-R_B + R_V}{L_i} < 0$: Abklappen von Δi stabil



Löschen des Lichtbogens durch „Abweilen“ = natürliche Löchlänge l_B^* : Vergrößern der Bogenlänge $l_B \rightarrow$ größere Katalysatoroberfläche, Bogen Temperatur sinkt, selbstständige Entladung eintritt!

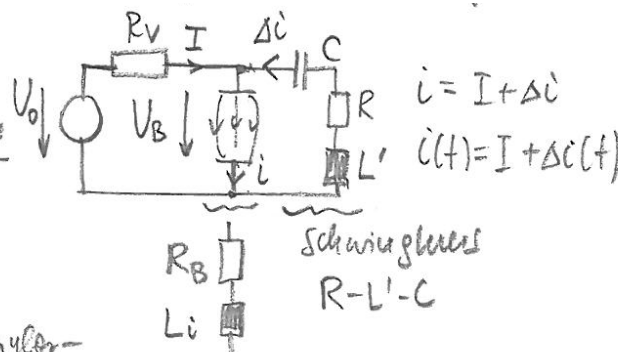


Für $l_B > l_B^*$ kein Schaltpunkt = KEIN Schaltpunkt = Lichtbogen erlischt!



Lichtbogen-schwingungen selbstregul.

Ausgangspunkt ②: $I \cdot (R_V + R_B) = U_0$
 $R_V - |R_B| > 0$



$U_B(i) = U_B(I + \Delta i(t)) \approx U_B(I) + \left. \frac{dU_B}{di} \right|_I \cdot \Delta i(t)$ Taylor-Reihe bis 1. grad

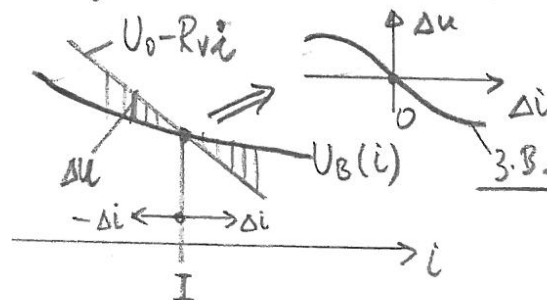
gleicher Strom I kann nicht über C fließen!
 Vereinfachung: Über U_0 fließt nur
 gleicher Strom I

$U_0 = R_V I + U_B(i) = R_V I + U_B(I) + R_B \Delta i + L_i \frac{d\Delta i}{dt}$
 $0 = U_B(I) + R_B \Delta i + L_i \frac{d\Delta i}{dt} + L' \frac{d\Delta i}{dt} + R \Delta i + \frac{1}{C} \int \Delta i dt$
 $\frac{U_0 - R_V I}{L} \Rightarrow (L_i + L') \frac{d\Delta i}{dt} + (R_B + R) \Delta i + \frac{1}{C} \int \Delta i dt = 0$

$L \frac{d^2 \Delta i}{dt^2} + (R - |R_B|) \frac{d\Delta i}{dt} + \frac{1}{C} \Delta i = 0, \Delta i(0) = \Delta i_0$

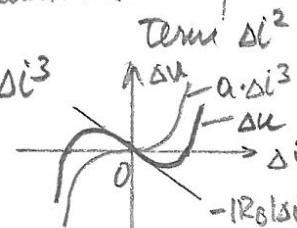
Bedingung für das Aufklappen von $\Delta i(t)$: $R - |R_B| < 0$: Entlastung!

Statt R_B : $U_B(I + \Delta i) = U_B(I) + \Delta U(\Delta i) = U_B(I) + \left. \frac{dU_B}{di} \right|_I \cdot \Delta i + \left. \frac{d^2 U_B}{di^2} \right|_I \cdot \frac{\Delta i^2}{2!} + \dots$



Fallende Kennlinie: kein quadratisches

3. B.: $\Delta U = -|R_B| \cdot \Delta i + a \cdot \Delta i^3$





$$L \cdot \frac{d\Delta i}{dt} + (R - |R_B|)\Delta i + a\Delta i^3 + \frac{1}{C} \int \Delta i dt = 0$$

$$L \frac{d^2\Delta i}{dt^2} + (R - |R_B|) \cdot \frac{d\Delta i}{dt} + a \cdot 3\Delta i^2 \cdot \frac{d\Delta i}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \Delta i = 0 \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$LC \cdot \frac{d^2\Delta i}{dt^2} + (R - |R_B| + a \cdot 3\Delta i^2) \cdot C \cdot \frac{d\Delta i}{dt} + \Delta i = 0$$

$$\frac{d^2\Delta i}{d(\omega_0 t)^2} + \underbrace{(R - |R_B| + 3a\Delta i^2) \cdot \left[\frac{C}{L}\right]}_{\substack{< 0 \\ -\mu}} \cdot \frac{d\Delta i}{d(\omega_0 t)} + \Delta i = 0, \quad y = \sqrt{\frac{-3a}{R - |R_B|}} \cdot \Delta i, \quad \omega_0 t = \tau$$
$$\underbrace{(R - |R_B|) \cdot \left[\frac{C}{L}\right]}_{< 0} \cdot \left(1 + \frac{3a}{R - |R_B|} \cdot \Delta i^2\right) = -\mu(1 - y^2)$$

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} - \mu(1 - y^2) \cdot \frac{dy}{d\tau} + y = 0$$

$$y(\tau) \approx \frac{2}{\sqrt{1 + e^{-\mu\tau}}} \cdot \cos(\tau + \varphi)$$

normierte van der Pol-Gleichung
für aufklingende Schwingungen mit
Grenzzyklus
 $y(0), y'(0) \Rightarrow C, \varphi$

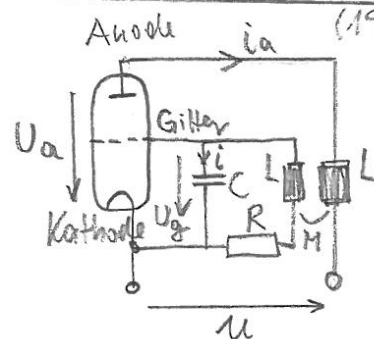


Lichtbogen sender aber unpraktisch, da Lichtbogen säule als gerader Lichtbogen auf Grund der thermischen Konvektionsströmung im magnetischen Eigenfeld nicht gerade bleibt. Ausbuchtung des Bogens $\rightarrow$ höheres B -Feld $\rightarrow$ an Innenausbuchtung $\rightarrow$ höhere Lorentz-Kraft $\rightarrow$ Bucht Bogen weiter aus $\rightarrow$ Bogenverlängerung $\rightarrow$ Wälzen. Abhilfe: Rotierender Bogen („Wälzbogen“), Trotzdem: Elektrodenabnutzung

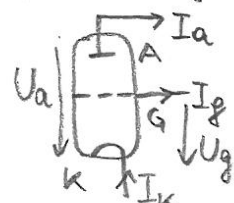




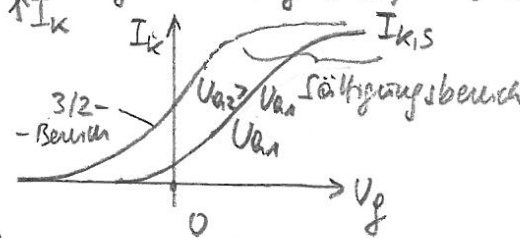
Alexander Klesner: Rückkopplungsschaltung mit Triode als Verstärker



(1913) ("Bohrungsgenerator") : Triode: Vakuumröhre mit beliebiger Kathode (unselbständige Entladung)



$$I_k = I_a + I_p = \bar{C} \cdot (U_g + \bar{D} \cdot U_a)^{3/2}$$



(gleichemission → Elektronen)
(R. v. Lieben, Lee deforest)
(3/2-Potentialladungsgesetz im Vakuum nach Langmuir)

$I_{k,s}$: Sättigungsstrom
(umso höher, je heißer Kathode ist: $I_s \sim T^2 e^{-\frac{B}{T}}$,
gleichemission, "Richardson-Formel")

$$\dot{U} = C \frac{dU_g}{dt}$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i d\tau = M \frac{di_a}{dt}$$

$$i_k \approx i_a \quad (i_p \approx 0)$$

$$LC \frac{d^2 U_g}{dt^2} + RC \frac{dU_g}{dt} + \frac{1}{C} U_g = M \frac{di_a}{dt}$$

$$\ddot{U}_g + \left(\frac{R}{L} - \frac{M}{LC} \frac{i_a}{U_g} \right) \dot{U}_g + \frac{U_g}{LC} = 0$$

$$\ddot{U}_g + \left(\frac{R}{L} - \frac{M}{LC} \beta - \frac{M}{LC} 3\mu U_g^2 \right) \dot{U}_g + \omega_0^2 U_g = 0$$

$$\ddot{U}_g + (a - b U_g^2) \dot{U}_g + \omega_0^2 U_g = 0 \rightarrow U_g = \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot x \rightarrow \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \ddot{x} + (a - b \cdot \frac{a}{b} x^2) \cdot \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \dot{x} + \omega_0^2 \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot x = 0$$

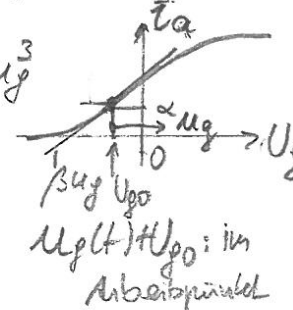
$$\ddot{x} - \mu(1-x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{van der Pol-Gleichung}$$

$\bar{D}$: Durchgriff

$$\frac{i_a}{U_g} = \frac{di_a/dt}{dU_g/dt} = \frac{di_a}{dU_g} = \beta + 3\mu U_g^2$$

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$$

$$\mu = -a > 0 = \mu(x^2 - 1)$$



Autonome Systeme vom Typ $f(x, \dot{x}) = f(\dot{x}) = D(\dot{x}) \cdot \dot{x}$

Für die freie Bewegung eines linearen (oder linearisierten) Systems mit einem Freiheitsgrad haben wir im Abschnitt 1.12.2. die Differentialgleichung

$$T\ddot{x} + D\dot{x} + Kx = 0 \quad (1)$$

mit konstanten Koeffizienten T , D und K untersucht. Wir betrachten nun die etwas allgemeinere Gleichung

$$T\ddot{x} + D(\dot{x})\dot{x} + Kx = 0, \quad (2)$$

wobei $D(\dot{x})$ eine, zunächst beliebige, Funktion der verallgemeinerten Geschwindigkeit $\dot{x}$ bedeutet (nichtlineares Dämpfungsglied).



Gleichungen dieser Art treten z.B. bei der Speisung elektromechanischer Systeme über nichtlineare Elemente $u(i)$ auf. Unter gewissen Umständen gibt es dann selbsterregte Schwingungen, die immer nichtlinearen Charakter haben.

Angenommen, $D(\dot{x})$ in (2) ist für $\dot{x}=0$ beschränkt, sodaß der Nullpunkt $x=0$ eine Gleichgewichtslage (einen stationären Zustand) angibt. Eine Linearisierung (falls möglich) liefert

$$T\ddot{x} + D(0)\dot{x} + Kx = 0.$$

Mit $T > 0$ und $K > 0$ ist die Nulllage für $D(0) < 0$ instabil, d.h., auf kleine Störungen folgt eine aufklingende Bewegung (oszillierend oder nicht oszillierend). Wir interessieren uns für die Bewegung des nichtlinearen Systems, wenn die Nulllage instabil ist.

Es kann folgender interessante Fall eintreten. Die Dämpfungsfunktion $D(\dot{x})$ ist zwar in der Umgebung von $\dot{x}=0$ negativ ($\rightarrow$ aufklingende Bewegung), nimmt aber für großen $|\dot{x}|$ positive Werte an und beschränkt damit das Anwachsen von $x(t)$. Als Folge davon kann sich eine oszillierende, stationäre Bewegung einstellen, die ungewöhnlich beständig ist. Diese Erscheinung nennt man selbsterregte Schwingung.





Tatsächlich läßt sich für eine Gleichung der Art (2) mit $T > 0$ und $K > 0$ zeigen:

Gibt es positive Konstanten A, B und C derart, daß

$$D(\dot{x}) > B \quad \text{für } |\dot{x}| \geq A, \quad D(\dot{x}) \geq -C \quad \text{für alle } \dot{x}$$

und ist $D(0) < 0$, dann gibt es mindestens eine (nicht konstante) periodische Lösung.

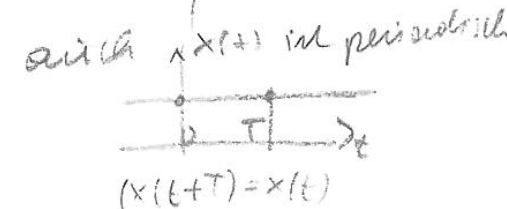
Schreibt man die Gleichung (2) in der Form

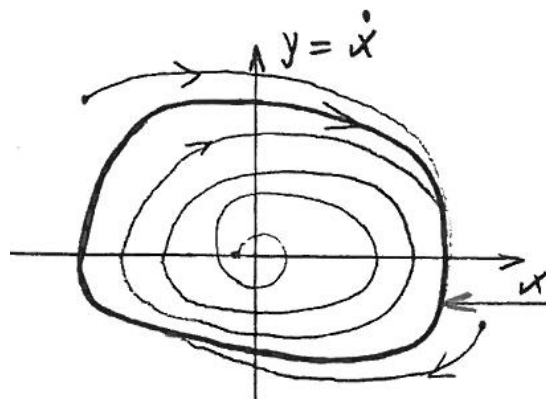
$$\dot{x} = y, \quad T\dot{y} = -D(y)y - Kx,$$

so definiert die Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{dy}{dx} = - \frac{D(y)y - Kx}{Ty} \quad (3)$$

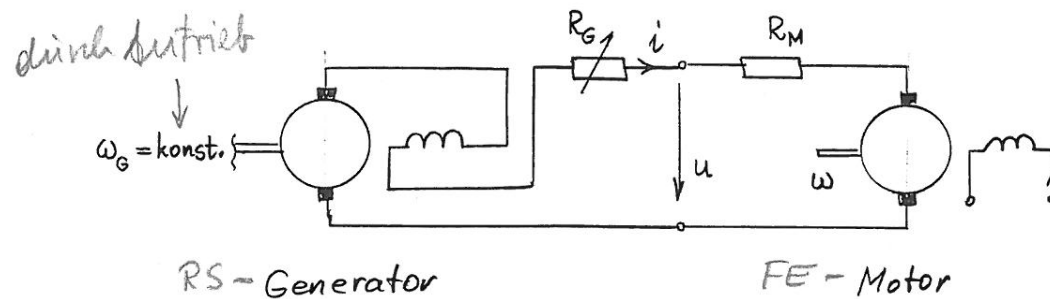
die Schar der Phasenkurven in der Phasenebene. Selbst wenn eine explizite analytische Lösung von (3) nicht möglich ist, läßt sich die Schar der Phasenkurven relativ einfach graphisch (Richtungsfeld, Isoklinen) oder numerisch bestimmen. Eine periodische Lösung entspricht einer geschlossenen Phasenkurve, z.B.





Phasenkurven von innen und außen münden
in einen
stabilen Grenzzykel
ein: selbsterregte Schwingung

Beispiel: Gleichstrom-Reihenschlußgenerator speist fremderregten Motor (Maschinenoszillator)



Motor unbelastet, einfachste Form der Gleichungen *(keine Streifelder, keine Ankerreaktion, etc.)*

$$u = K\omega + R_M i, \quad J \frac{d\omega}{dt} = K i \quad ; \quad K = \text{konst.} \quad (1)$$

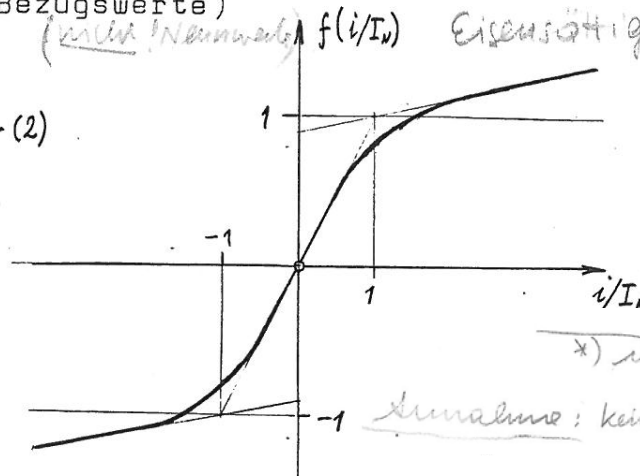
(dynamisch)
(= 2 \cdot \frac{1}{2} \Phi) ($\Phi = \text{const.}$)

Generator, einfachste Form der dynamischen Gleichung (mit $\omega_G = \text{konst.}$, U_N, I_N und L_N sind konstante Bezugswerte)

$$u = U_N f\left(\frac{i}{I_N}\right) - R_G i - L_N f'\left(\frac{i}{I_N}\right) \frac{di}{dt} \quad (2)$$

(nicht! Normalisierte) $f(i/I_N)$ *Eisensättigung*

$f(-\frac{i}{I_N}) = -f(\frac{i}{I_N}), \quad f'(0) = 1$



**)* $u = U_N f(i) - R_G \cdot i - \frac{d\Phi}{dt}$
Annahme: keine AKR, keine Streiffelder: $\Phi = \Phi_N \cdot f(i)$
Isoliert mit $\Phi = U_N \cdot f(i)$



Bezogene Größen und Abkürzungen:

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{i}{I_N}, \quad x = \frac{\omega}{\omega_N}, \quad \omega_N = \frac{U_N}{K}, \quad r = (R_M + R_G) \frac{I_N}{U_N}, \\ \beta &= L_N \frac{I_N}{U_N}, \quad a = \sqrt{\frac{L_N I_N^2}{J \omega_N^2}} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = Ki, \quad \frac{\omega K}{U_N} \cdot \underbrace{L_N \frac{I_N}{U_N}}_{\beta} = \frac{K^2}{J} \cdot \underbrace{\frac{i}{I_N}}_y \cdot \underbrace{\frac{1}{U_N}}_{\omega_N} \cdot L_N \frac{I_N^2}{U_N} \quad 70$$

$$\frac{K^2}{U_N^2} \cdot \frac{L_N I_N^2}{J} = \frac{L_N I_N^2}{J \omega_N^2} = a^2$$

Damit folgt aus (1) und (2)

$$\left. \begin{aligned} \beta f'(y) \dot{y} &= f(y) - ry - x \quad \checkmark \\ \beta \dot{x} &= a^2 y \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{nichthom. DGL-System} \\ \text{I.O.} \end{array} \quad (4)$$

$$\text{oder} \quad f'(\frac{\beta}{a^2} \dot{x}) \beta^2 \ddot{x} + [r - \frac{a^2}{\beta \dot{x}} f(\frac{\beta}{a^2} \dot{x})] \beta \dot{x} + a^2 x = 0 \quad \checkmark \quad (5)$$

Linearisierung um den Nullpunkt gibt

$$\overset{T}{\hookrightarrow} \beta^2 \ddot{x} + \underset{D}{(r-1)} \beta \dot{x} + \underset{K}{a^2} x = 0. \quad T \ddot{x} + D \dot{x} + K x = 0 \quad (6)$$



⇒ Der Nullpunkt ist instabil für $r < 1$ (hinreichend kleine Widerstände): instabiler Knoten für $r < 1 - 2a$, instabiler Strudelpunkt für $1 - 2a < r < 1$. Der Ausdruck in der eckigen Klammer in (5) ist dann bei $\dot{x} = 0$ negativ (Anfachung), kann aber für wachsenden $|\dot{x}|$ positiv werden (Dämpfung): Es kann sich u.U. eine selbsterregte, periodische Drehzahländerung des Motors einstellen.

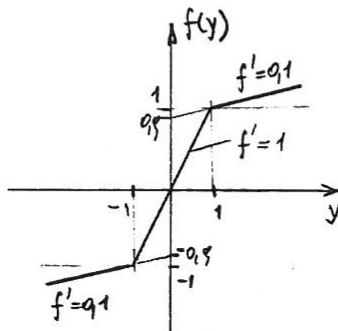


Aus (4) folgt die Gleichung der Phasenkurven

$$a^2 f'(y) y \frac{dy}{dx} = f(y) - ry - x \quad \text{mit} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \quad (7)$$

Ist die Funktion f z.B. graphisch gegeben, so läßt sich das Richtungsfeld zeichnen und damit die Schar der Phasenkurven graphisch ermitteln. Eine stabile, selbsterregte Schwingung liegt dann vor, wenn alle Phasenkurven für wachsende t in einen Grenzykel einmünden.

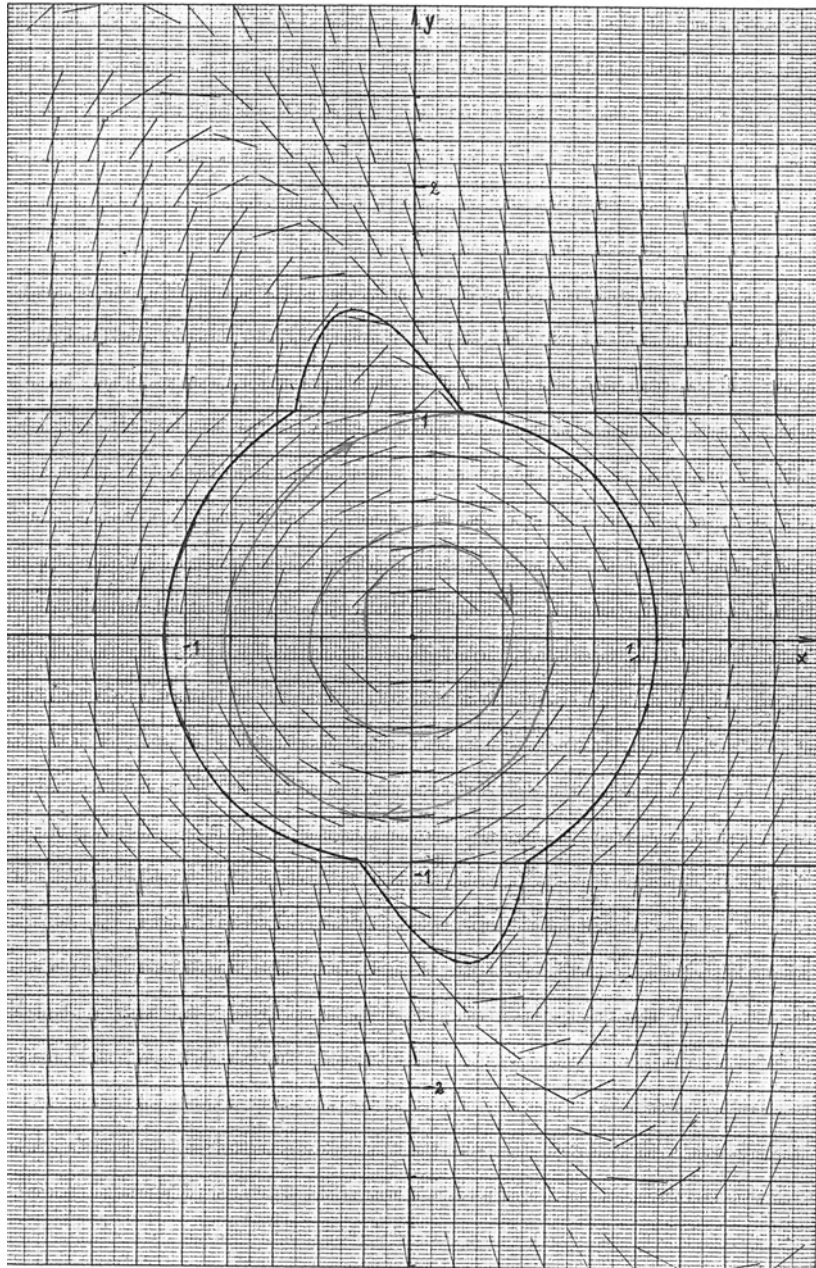
Das Bild auf S.71 zeigt das Richtungsfeld und den Grenzykel für den Fall $a=1$, $r=0,9$. Die Sättigungsfunktion f ist als



$$f(y) = \begin{cases} y & \text{für } |y| < 1 \\ \pm 0,9 + 0,1y & \text{für } y \geq \pm 1 \end{cases}$$

angenommen. (Damit ließe sich (7) auch analytisch integrieren).





Grenzzzyklus-Konstruktion mit der Isoklinen-Methode



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



Maschinenoszillator (1)



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Maschinenoszillator: RS-generator: Fluss pro Pol: $\Phi_G = \Phi_N' f(i/I_N) + \Phi_R$ 70.1

Generatorspannung: Erzeugerzählpfeilsystem

$$U = K_G \cdot \omega_G \cdot \Phi_G - i \cdot R_G \quad \text{stationär (}\dot{i} = \text{konst.)}$$

$\omega_G = \text{konst.}$ durch selbsteingeregte Maschine

FE GS-Motor: Verbundmotor-Zählpfeilsystem:

$$U = K_M \cdot \omega \cdot \Phi_M + i \cdot R_M$$

$$K_M = Z_M \cdot \frac{P_M}{a_M} \cdot \frac{1}{2\pi} : \text{Motorkonstante}$$

Φ_M : konstanter Motorfluss pro Pol

$\omega = 2\pi n$: Winkelgeschwindigkeit des Motors

$$K = K_M \cdot \Phi_M = \text{konst.}$$

Φ_R : Restmagnetismus pro Pol

i : Ankerstrom

R_G : Generator: Anker + Feld =
Wicklungswiderstand

$\omega_G = 2\pi n_G$: Generatorwinkel =
Periodeumlaufzeit

$K_G = Z_G \frac{P_G}{a_G} \cdot \frac{1}{2\pi}$: Generator-
konstante

$R = R_G + R_M$: gesamter
Ankerkreislau-Widerstand

$$K_G \cdot \omega_G \cdot \Phi_G = \underbrace{K_G \cdot \omega_G \cdot \Phi_N'}_{U_N} f(i/I_N) + \underbrace{K_G \cdot \omega_G \cdot \Phi_R}_{U_R} = U_N' f(i/I_N) + U_R, \quad y = \frac{i}{I_N} : \text{bezogener Ankerstrom}$$

$$U_N' f(y) + U_R - \underbrace{i}_{I_N} \cdot R_G \cdot I_N = K \cdot \omega + \underbrace{i}_{I_N} \cdot R_M \cdot I_N \Rightarrow U_N' f(y) + U_R - R \cdot I_N \cdot y = K \cdot \omega$$

stationär: $\int \frac{d\omega}{dt} = M_M - M_L = K \cdot i - M_L = 0 \Rightarrow \omega = \text{konst.}, \quad i = \frac{M_L}{K} \quad M_L: \text{Lastmoment}$



Maschinenoszillator (2)



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

stationäre $\omega(M_M)$ -Kennlinie:

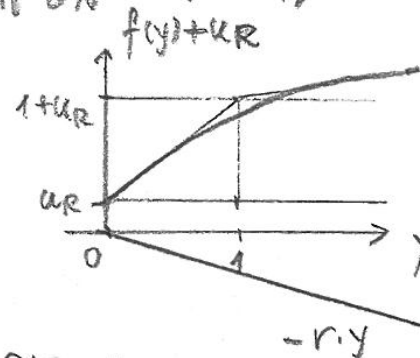
$$\omega = \frac{U_N \cdot f(y) + U_R - R I_N y}{K} = \frac{U_N}{K} \cdot \left[f(y) + \frac{U_R}{U_N} - \frac{R I_N}{U_N} y \right]$$

$\omega_0 = \frac{U_N}{K}$: Leerlaufdrehzahl
des FE-Motors bei Speisung
mit U_N ($\omega_0 \hat{=} \omega_N$)

$$\omega = \omega_0 \cdot [f(y) + u_R - r \cdot y]$$

$$\frac{\omega}{\omega_0} = f(y) + u_R - r y \hat{=} \frac{\omega}{\omega_N}$$

$$f(y_1) + u_R - r y_1 = 0 \rightarrow y_1$$



$$M_M = K \cdot I_N \cdot y = M_N \cdot y$$

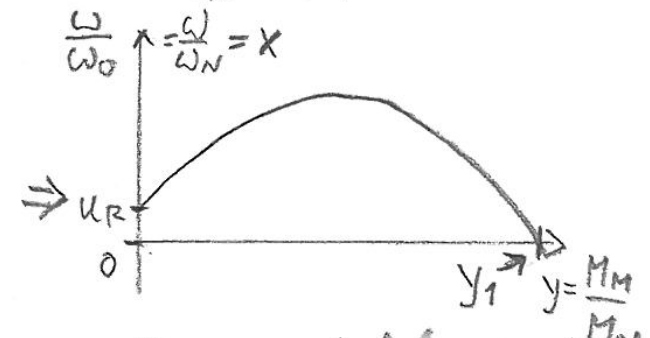
M_N : FE-Neinmoment

Bezogener Widerstand:

$$r = R / (U_N I_N)$$

Bezogene Spannung =
Spannung bei ω_0 :

$$u_R = U_R / U_N$$



y_1 : Bezogenes Anfahrmoment

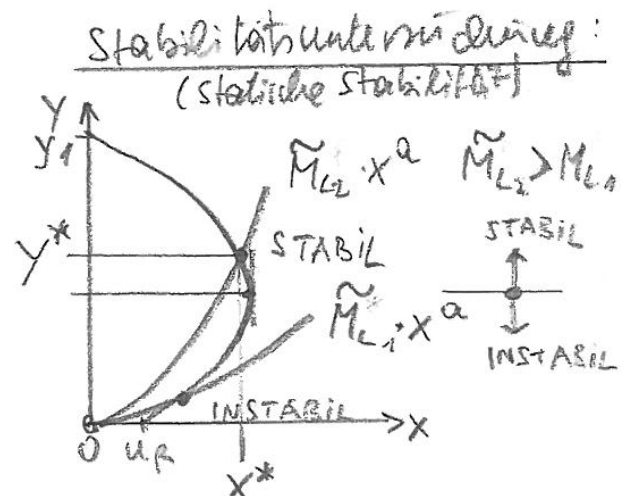
r : ausreichend klein
($r < 1$)



Maschinenoszillator (3)



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



$$M_L = \tilde{M}_L \cdot X^a$$

$$a=0: M_L = \tilde{M}_L = \text{konst.}$$

$$a>0: M_L \text{ nimmt mit } \omega \text{ zu}$$

ur ist nötig, damit überhaupt Strom i fließen kann.

$$\text{STABIL: } \int \frac{d\omega}{dt} = M_M - M_L \Rightarrow \int \frac{d(\omega^* + \Delta\omega)}{dt} = [M_M' - M_L'] \cdot \Delta\omega$$

$$\text{ARBEITSPUNKT } (x^*, y^*) = \left(\frac{\omega^*}{\omega_N}, \frac{M_M}{M_N} \right)$$

$$M_M(\omega) \approx M_M(\omega^*) + \left. \frac{dM_M}{d\omega} \right|_{\omega^*} \cdot \Delta\omega$$

$$M_L(\omega) \approx M_L(\omega^*) + \left. \frac{dM_L}{d\omega} \right|_{\omega^*} \cdot \Delta\omega$$

$$M_M(\omega^*) = M_L(\omega^*)$$

$$\left. \frac{dM}{d\omega} \right|_{\omega^*} = M'$$

$$\frac{d\Delta\omega}{dt} = \frac{M_M' - M_L'}{\int} \cdot \Delta\omega, \Delta\omega(0) = \Delta\omega_0$$

$$\Delta\omega(t) = \Delta\omega_0 \cdot e^{\frac{M_M' - M_L'}{\int} \cdot t}$$

$$\text{STABIL: } M_M' < M_L'$$

$$\text{INSTABIL: } M_M' > M_L'$$



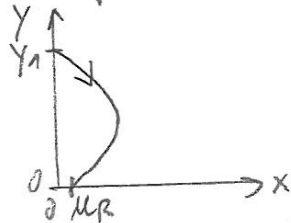
Maschinenoszillator (4)



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Vereinfachung: Vernachlässigung von u_R in der Kennlinie

Hochlauf von $\omega \sim x=0$ mit $M_M(0) \sim y_1$ auf z.B. Leerlauf ($M_L=0$), ist aber instabil!



$\omega(M_L=0) = u_R \cdot \omega_N$: Schwingung selbstanregt um $\omega(M_L=0)$.

Dazu: dynamische Gleichungen:

(1) Annahme: $u_R \approx 0$; $L_G \ll L_M$: Generator- u. Motorwiderstand = Induktivität

$$-\dot{\Phi}_G + U_N \cdot f(y) - y \cdot R_G I_N - \dot{y} L_G I_N = K \cdot \omega + y R_M I_N + \dot{y} L_M I_N$$

(2) Annahme: kein Lastmoment: $M_L=0$, keine Reibung: $D \cdot \omega = 0$

$$J \frac{d}{dt} \frac{\omega}{\omega_N} = \frac{M_M}{\omega_N} = \frac{K \cdot I_N}{\omega_N} = K \cdot I_N \cdot \frac{y}{\omega_N}, \quad L_G + L_M = L$$

$$\dot{\Phi}_G = \dot{\Phi}_N \cdot \frac{df(y)}{dy} \cdot \dot{y} + \dot{\Phi}_R = \dot{\Phi}_N \cdot f'(y) \cdot \frac{di}{dt} \cdot \frac{1}{I_N}, \quad \frac{\Phi_N}{I_N} = L_N, \quad \dot{\Phi}_G = L_N \cdot f'(y) \cdot \frac{di}{dt}$$

$$(1) U_N \cdot f(y) - L_N \cdot f'(y) \cdot \frac{di}{dt} \cdot \frac{1}{I_N} \cdot I_N - y \cdot R_I I_N - \dot{y} \cdot L \cdot I_N = K \cdot \omega \cdot \frac{1}{\omega_N}, \quad \beta = L_N \frac{I_N}{U_N}, \quad \bar{\beta} = L \frac{I_N}{U_N}$$

$$f(y) - \beta \cdot f'(y) \cdot \dot{y} - r y - \bar{\beta} \cdot \dot{y} = x \Rightarrow -f(y) + \beta \cdot f'(y) \cdot \dot{y} + r y + \bar{\beta} \dot{y} + x = 0$$

$$(2) \dot{x} = \frac{K I_N}{\omega_N} y \cdot \frac{1}{J} = \frac{K^2 I_N}{\omega_N J} y \Rightarrow \dot{x} \frac{L_N I_N}{U_N} = \dot{x} \beta = \frac{K^2 (I_N)^2}{J (\omega_N)^2} \cdot L_N \cdot y = \frac{L_N I_N^2}{J \cdot \omega_N^2} y = a^2 y, \quad a = \sqrt{\frac{L_N I_N^2}{J \omega_N^2}}$$

$$\dot{x} \beta = a^2 y \Rightarrow y = \dot{x} \beta / a^2$$

$$(1)+(2): \left(\frac{\beta^2}{a^2} f' \left(\frac{\dot{x} \beta}{a^2} \right) \cdot \ddot{x} - f \left(\frac{\dot{x} \beta}{a^2} \right) + r \dot{x} \frac{\beta}{a^2} + \bar{\beta} \ddot{x} \frac{\beta}{a^2} + x = 0 \right) | \cdot a^2$$

$$\left(\bar{\beta} \beta + \beta^2 f' \left(\frac{\dot{x} \beta}{a^2} \right) \right) \cdot \ddot{x} + \left[r - \frac{a^2}{\beta \dot{x}} f \left(\frac{\dot{x} \beta}{a^2} \right) \right] \cdot \beta \dot{x} + a^2 x = 0$$



Maschinenoszillator (5)



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Für kleine Werte $\dot{x}$: $r - \frac{a^2}{\beta \dot{x}} f(\frac{\dot{x}\beta}{a^2}) \approx r - \frac{a^2}{\beta \dot{x}} \cdot \frac{\dot{x}\beta}{a^2} = r - 1 < 0$, wenn $r = \frac{R_0 + R_M}{U_N I_N} < 1$
 $f(y) \approx f(0) + \frac{df}{dy} \Big|_{y=0} y = 0 + 1 \cdot y \approx y$ entdämpft (z.B.: $r \approx 0.1$)

Für große Werte $\dot{x}$: $f(y) \approx \frac{k_{\text{const.}}}{\approx 1}$ (Sättigung): $r - \frac{a^2}{\beta \dot{x}} f(\frac{\dot{x}\beta}{a^2}) \approx r - \frac{a^2}{\beta \dot{x}} \cdot k_{\text{const.}} \approx 1$
 $\approx r - \frac{a^2}{\beta \dot{x}} \Big|_{\dot{x} \gg 1} \approx r > 0$: gedämpft.

Fazit: Selbstverstärkte Schwingung um
gleichgewichtspunkt (instabil) möglich!

Lineare kleine Diff. Gleichung für $x \ll 1, \dot{x} \ll 1$: $f'(\frac{\dot{x}\beta}{a^2}) \approx f'(0) = 1$:

$$\underline{r < 1}: \underbrace{(\beta\beta + \beta^2 \cdot 1)}_T \cdot \ddot{x} + \underbrace{(r-1) \cdot \beta \dot{x}}_D + \underbrace{a^2 x}_K = 0 \quad T > 0, K > 0$$

$$D < 0$$

$$T\lambda^2 + D\lambda + K = 0, \lambda^2 + \frac{D}{T}\lambda + \frac{K}{T} = 0, \lambda_{1/2} = \underbrace{-\frac{D}{2T}}_{>0!} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{D}{2T}\right)^2 - \frac{K}{T}}_{>0!}} \quad \left. \begin{array}{l} \text{a) } D^2 > 4KT: \sqrt{\quad} \text{ reell} \\ \text{b) } D^2 < 4KT: \sqrt{\quad} \text{ imaginär} \end{array} \right\}$$

a) $D^2 > 4KT$: $(r-1)^2 \beta^2 > 4 \cdot a^2 \cdot \beta(\beta + \beta)$, für $\beta \ll \beta$: $(r-1)^2 > 4a^2 \Rightarrow (1-r)^2 > 4a^2$
 $1-r > 2a$
 $\underline{r < 1-2a}$

gleichgewichtspunkt ist
INSTABILER Knotenpunkt



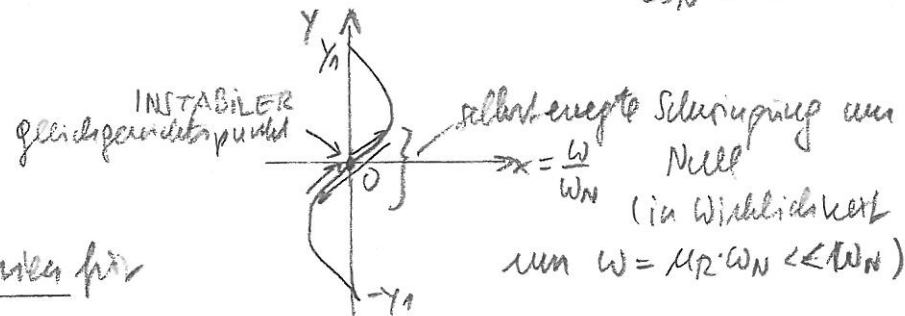
b) $D^2 < 4KT$: für $\beta \ll \beta$: $1-r < 2a \Rightarrow \underline{1-2a < r < 1}$: INSTABILER Strudelpunkt



Gleichgewichtspunkt: Für $u_R \approx 0$: $\ddot{x}=0, \dot{x}=0 \Rightarrow a^2 x=0 \Rightarrow x=0 = \frac{\omega}{\omega_N} \Rightarrow \omega=0$



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



Berechnung der Phasenkurven für

(1) $L_M + L_A = L \ll L_N \Rightarrow \beta \ll 1$

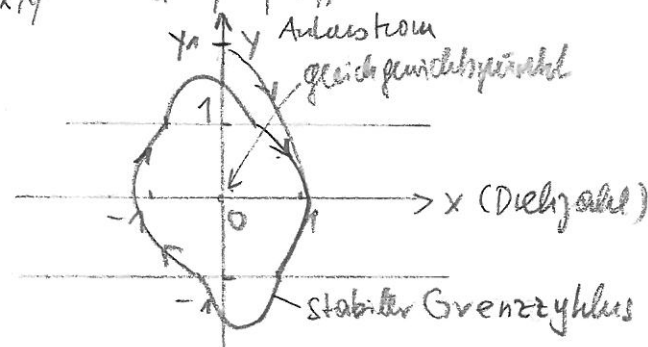
(2) $f(y) = y, |y| \leq 1$ und $\pm 0,9 + 0,1y, |y| \geq 1 \Rightarrow f'(y) = 1; |y| < 1$
 $f'(y) = 0,1; |y| > 1$

Aus $\beta f'(y) \cdot \dot{y} = f(y) - r y - x$ und $\beta \dot{x} = a^2 y$ folgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{[f(y) - r y - x] / (\beta \cdot f'(y))}{a^2 y / \beta} \Rightarrow a^2 y \cdot f'(y) \cdot \frac{dy}{dx} = f(y) - r y - x$$

Für jedes Wertepaar (x, y) in der Phaseebene $(x, \frac{\beta}{a^2} \dot{x})$ wird

berechnet: $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x,y} = \frac{f(y) - r y - x}{a^2 y \cdot f'(y)}$ für z.B.: $a=1, r=0,9 < 1!$



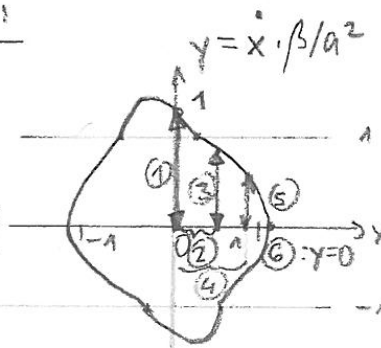
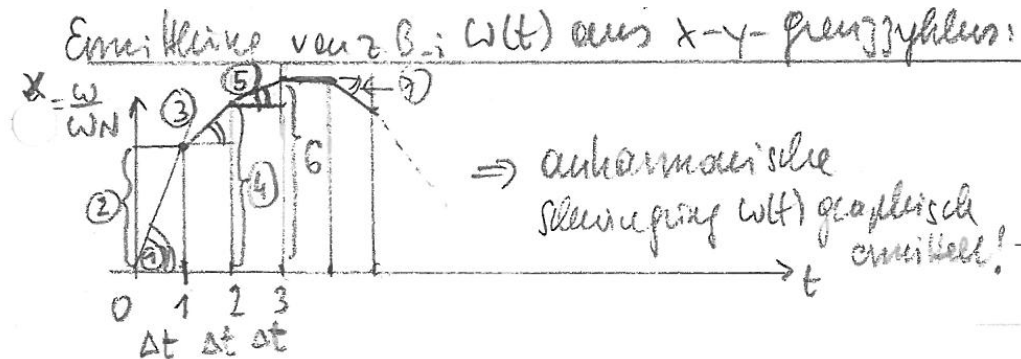
Maschinenoszillator (6)



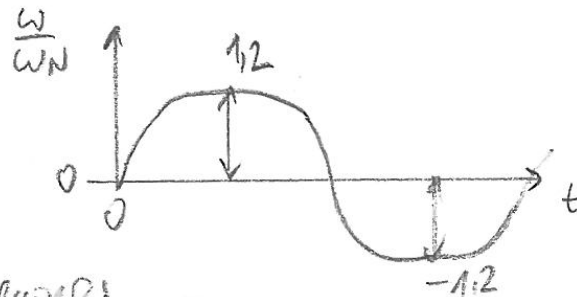
Maschinenoszillator (7)



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

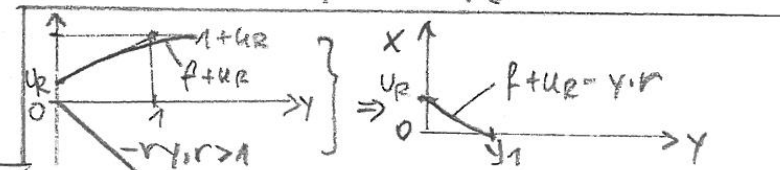


Bei $\dot{x} = 0$ ist in der Schwingungsgleichung aber $a^2 x \neq 0 \Rightarrow \ddot{x} = -a^2 x / (\beta^2 f'(\omega)) = -\frac{a^2 x}{\beta}$



$$\Rightarrow \ddot{x} = -\frac{a^2 x}{\beta} \Delta t \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ untere Hälfte des Zyklus wird erreicht!



Anmerkung:

Bei problem $r = \frac{R_0 + R_H}{\omega N f_{in}} > 1$ tritt keine selbstregte Schwingung auf, da $r-1 > 0$

eine positive Dämpfung ist. Fallende $\omega(t)$ bzw. $y(x)$ -Kurven, nur statisch stabile Arbeit punkte!



Maschinenoszillator (8)



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Einfluss des Lastmoments auf die Entstehung nichtlinearer Schwingungen:

$$(2) \quad \frac{d(W/W_N)}{dt} = \frac{M_M}{W_N} - \frac{M_L}{W_N}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{K \cdot \dot{\varphi} I_N I_N}{W_N \cdot J} - \frac{M_L}{W_N J}, \quad \dot{x} \frac{L N I_N}{W_N} = \dot{x} \beta = \gamma \cdot \Omega^2 - \frac{L N I_N}{W_N} \cdot \frac{M_L}{W_N J} = \gamma \Omega^2 - \Omega^2 \frac{M_L}{M_N}$$

$$\frac{M_L}{M_N} = m, \quad \dot{x} \beta = \Omega^2 (\gamma - m) \Rightarrow \underline{\underline{\dot{x} \frac{\beta}{\Omega^2} + m = \gamma}}$$

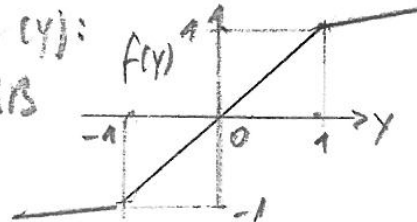
$$\frac{L N I_N}{K W_N^2 J} = \frac{L N I_N^2}{J W_N^2} \cdot \frac{1}{K I_N} = \Omega^2 \frac{1}{K I_N}$$

$$\rightarrow (1): \left(\beta \dot{x} + \beta^2 f' \left(\dot{x} \frac{\beta}{\Omega^2} + m \right) \right) \ddot{x} + \left[r + r \frac{m \Omega^2}{\dot{x} \beta} - \frac{\Omega^2}{\beta \dot{x}} f \left(\dot{x} \frac{\beta}{\Omega^2} + m \right) \right] \cdot \beta \dot{x} + \Omega^2 x = 0$$

$$K I_N = K_M \Phi_M I_N = M_N$$

$$(dM_L/dt=0) \Rightarrow \dot{m}=0$$

Wir verwenden für $f(y)$:
gemäß



$$f(y) = \begin{cases} y, & |y| \leq 1 \\ \pm 0,9 + 0,1y, & |y| > 1 \end{cases}$$

$$f'(y) = \begin{cases} 1, & |y| < 1 \\ 0,1, & |y| > 1 \end{cases}$$



Maschinenoszillator (9)



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

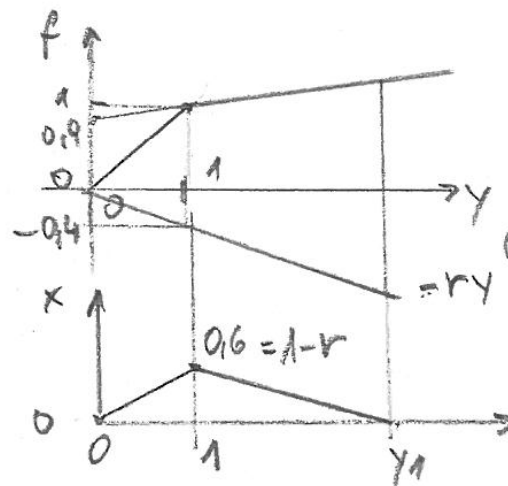
Fall 1): $\dot{x} \frac{\beta}{g^2} + m < 1 \Rightarrow f' = 1$, $f(y) = y = \dot{x} \frac{\beta}{g^2} + m$, $\dot{x} < 1 \Rightarrow m < 1$

$$\left. \begin{aligned} (\beta\beta + \beta^2) \ddot{x} + \left[r - \frac{a^2}{\beta\dot{x}} (\dot{x} \frac{\beta}{g^2} + m) \right] \beta \dot{x} + a^2 x &= -r m a^2 \\ (r-1 - \frac{m a^2}{\beta\dot{x}}) \beta \dot{x} &= (r-1) \beta \dot{x} - m a^2 \end{aligned} \right\} \text{gleich periodisch sprunghaft}$$

Stationäre Kennlinie:

$$x = \frac{w}{w_N} = f(y) + u_2 - r y \approx 0$$

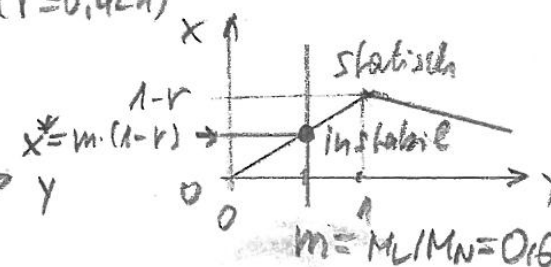
Stationär instabiler
Bereich! Es ist $r-1 < 0$,
daher Ausfaltungen
selbstangeregter Schwingungen!



$$x^* = m(1-r), \quad \frac{w^*}{w_N} = \frac{M_L}{K_{IN}} \cdot (1-r)$$

$$w^* = w_N \cdot \frac{M_L}{K_{IN}} \cdot (1-r)$$

$$0 \leq m < 1: w/w_N < 1$$



Maschinenoszillator (10)

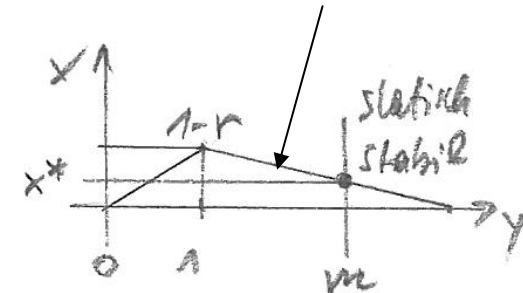
Fall 2): $\dot{x} \frac{\beta}{\alpha_2} + m > 1$, wegen $\dot{x} \ll 1 \Rightarrow m > 1$

$$f' = 0,1; f(y) = 0,9 + 0,1 \cdot (\dot{x} \frac{\beta}{\alpha_2} + m)$$

Fallender Ast der $x(y)$ -Kurve:
Anstieg: $0,1 - r < 0$, also $r > 0,1$

$$(\bar{\beta}\beta + \beta^2) \ddot{x} + \left[r - \frac{\alpha^2}{\beta \dot{x}} (0,9 + 0,1(\dot{x} \frac{\beta}{\alpha_2} + m)) \right] \beta \dot{x} + \alpha^2 x = -r m \alpha^2$$

$$\left[r - \frac{\alpha^2 0,9}{\beta \dot{x}} - 0,1 - \frac{\alpha^2}{\beta \dot{x}} 0,1 m \right] \beta \dot{x} = [r - 0,1] \beta \dot{x} - \alpha^2 (0,9 + 0,1 m)$$



$$(\bar{\beta}\beta + \beta^2) \ddot{x} + [r - 0,1] \beta \dot{x} + \alpha^2 x = -r m \alpha^2 + \alpha^2 (0,9 + 0,1 m)$$

Stationär stabiler Bereich!

gleichgew. d. $x = -r m + 0,9 + 0,1 m$

stabil!

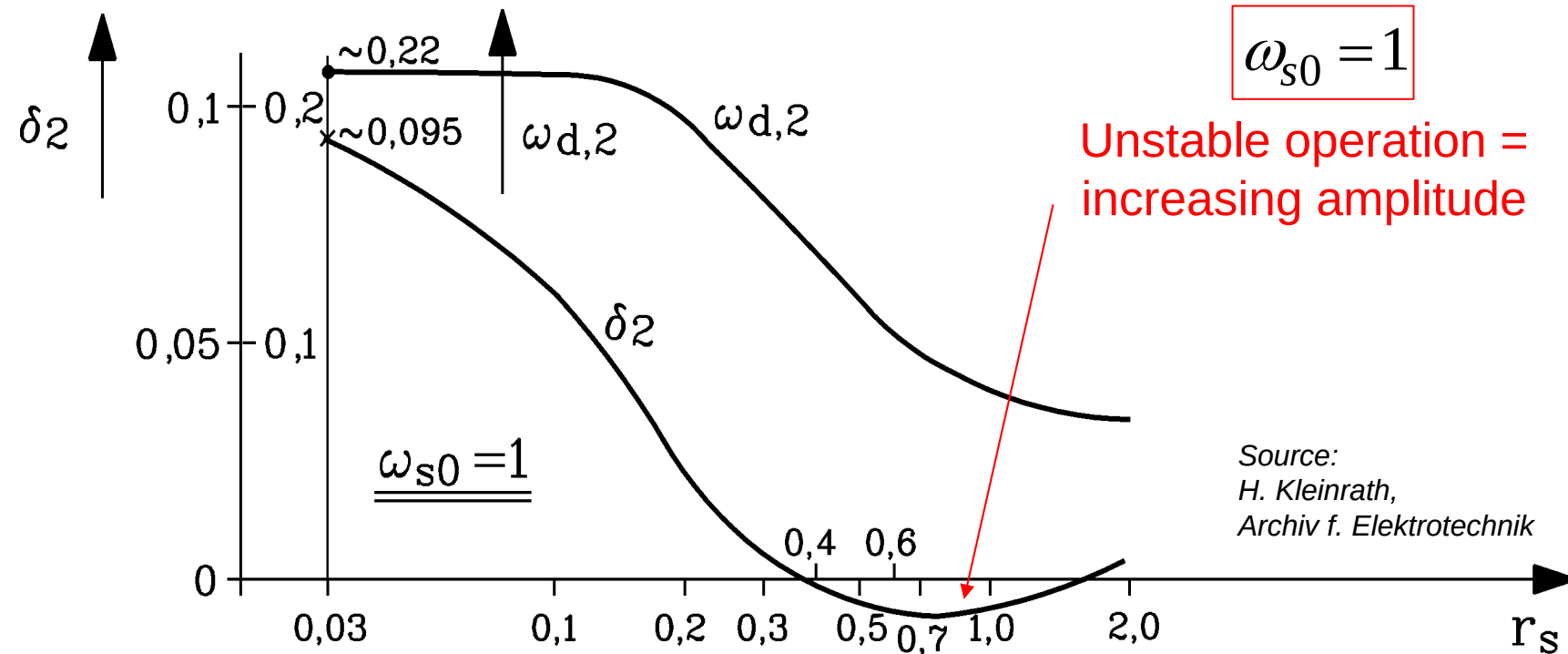
$$= m(0,1 - r) + 0,9 = x^*$$

Es ist $r - 0,1$ *) positiv, daher keine
aufblühenden selbstregulierten Schwingungen!

*) $r > 0,1$

Non-linear dynamics of induction machines

Linearization: Small signal transfer function for increasing stator resistance



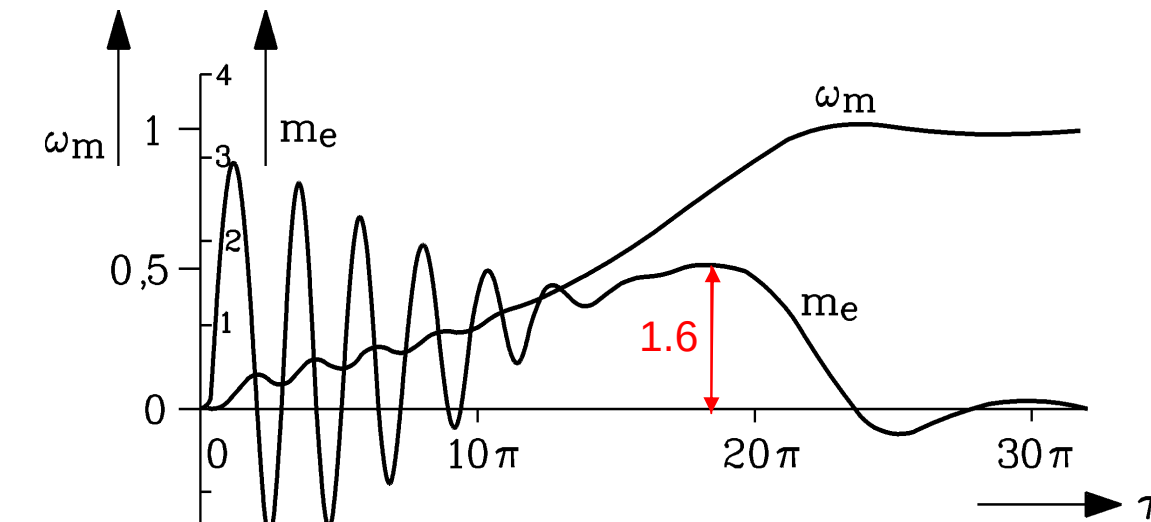
Source:
H. Kleinrath,
Archiv f. Elektrotechnik

- Variation of damping δ_2 and natural angular frequency $\omega_{d,2}$ with varying stator resistance at rated stator frequency and constant rotor flux linkage at rated value, no-load machine operation

- UNSTABLE OPERATION AT BIG STATOR RESISTANCE !

Numerical solution of non-linear dynamic equations of induction machine

Starting machine at no load, constant stator voltage & frequency



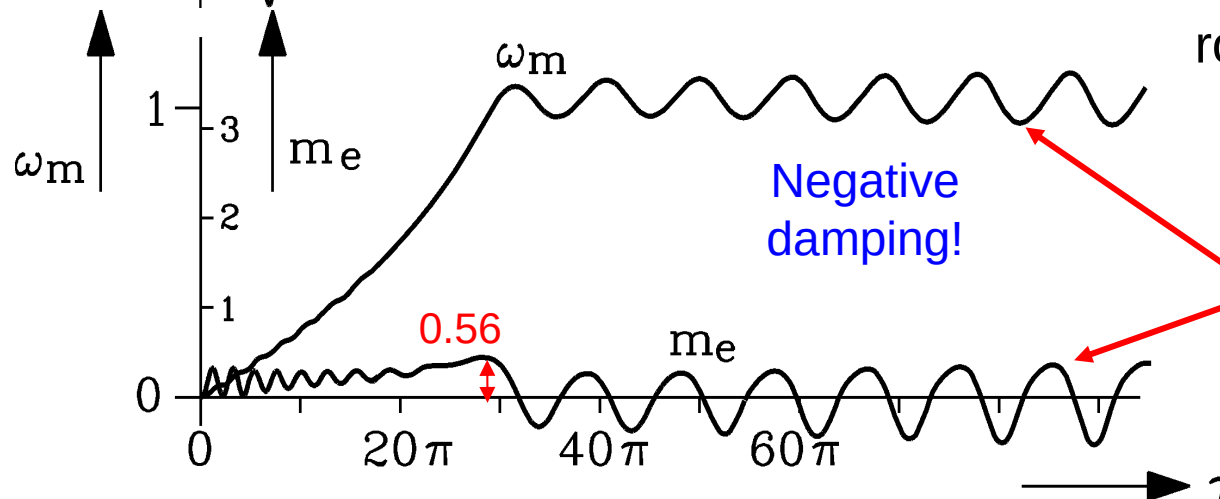
a) directly

$$r_s = 0.03, r_r' = 0.04, x_s = x_r' = 3.0, \\ \sigma = 0.0667, \tau_J = 75$$

b) with 13-fold increased
stator resistance

$$r_s = 13 \cdot 0.03 = 0.39$$

and by 1/3 reduced
rotor inertia: $\tau_J = 75/3 = 25$.

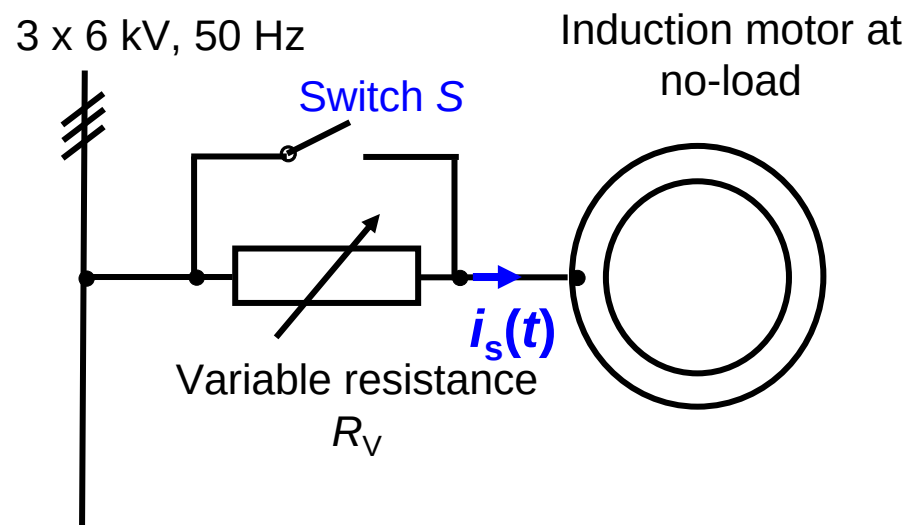


Reduced breakdown torque:

$$(1 - 0.39)^2 \cdot 1.6 \approx 0.56$$

**UNSTABLE operation: Speed
oscillation amplitude
increases, until it reaches the
limiting cycle**

Measurement of instability of the induction machine at big stator resistance



Cage induction motor with deep bar rotor

6 kV Y, 3500 kW, 415 A, 50 Hz

$$Z_N = 8.35 \, \Omega, 2p = 4$$

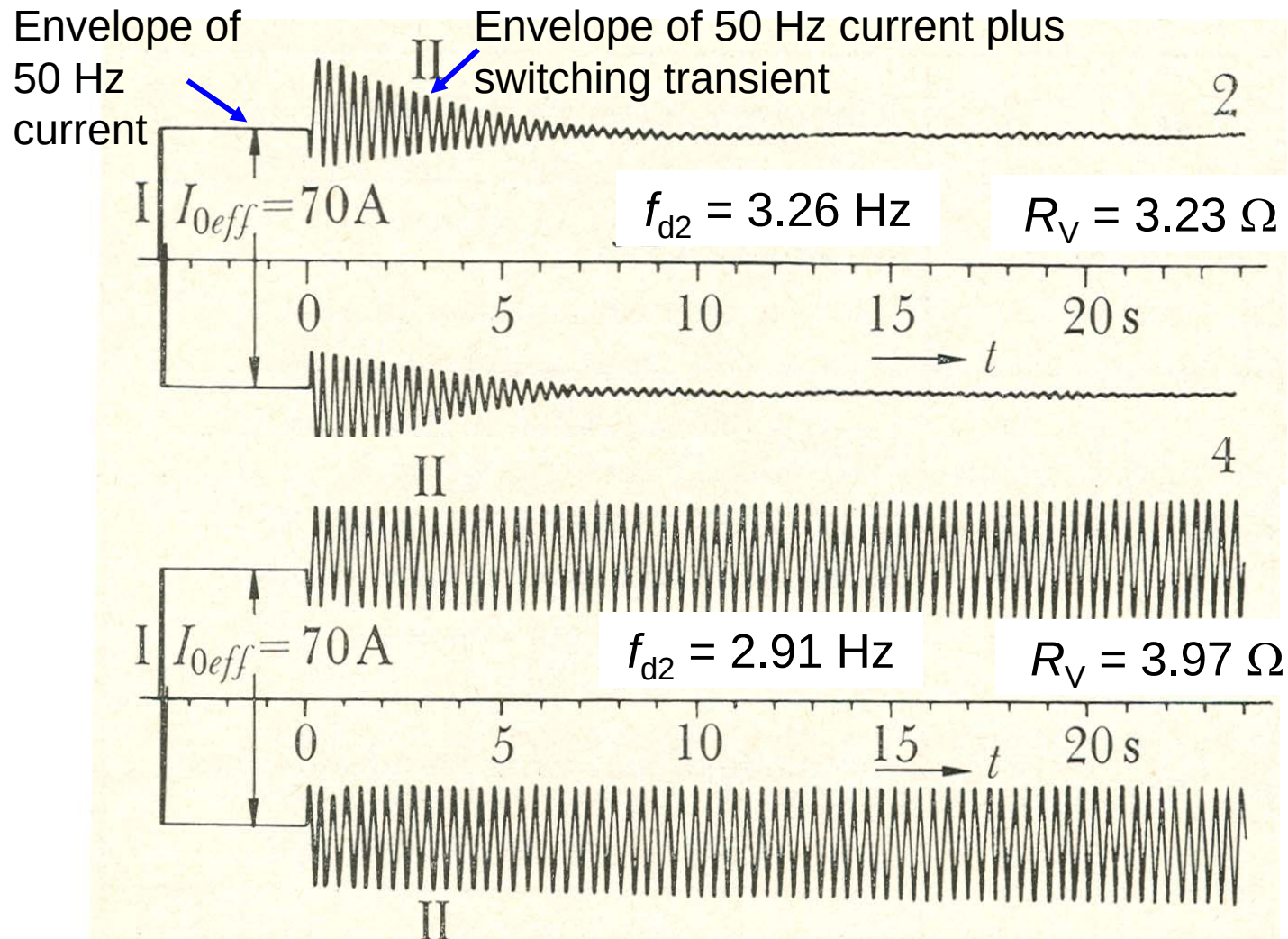
$$R_s = 0.0426 \, \Omega \, (20^\circ\text{C}), r_s = 0.0426/8.35 = 0.5\%$$

$$\text{No-load current: } I_{s0} = 74.2 \, \text{A}$$

Historically first reported measurement of induction machine instability (BBC, Mannheim, Germany, 1969):

- Direct no-load start up of the induction motor at the 20 kV-grid with a 20kV/6 kV-transformer at closed switch S. Transformer impedance $X_T \approx X_{s\sigma}$ helps to stabilize!
- Opening of the switch S after completed start-up at no-load speed
- Measurement of the 50 Hz-no-load current $i_s(t)$

Induction machine: Measured stator current with a big stator resistance



**Stable
operation**

$$R_V / R_s = 75.8$$

$$r_s + r_V = 0.39$$

**Zero damping
= Limit of
stability:**

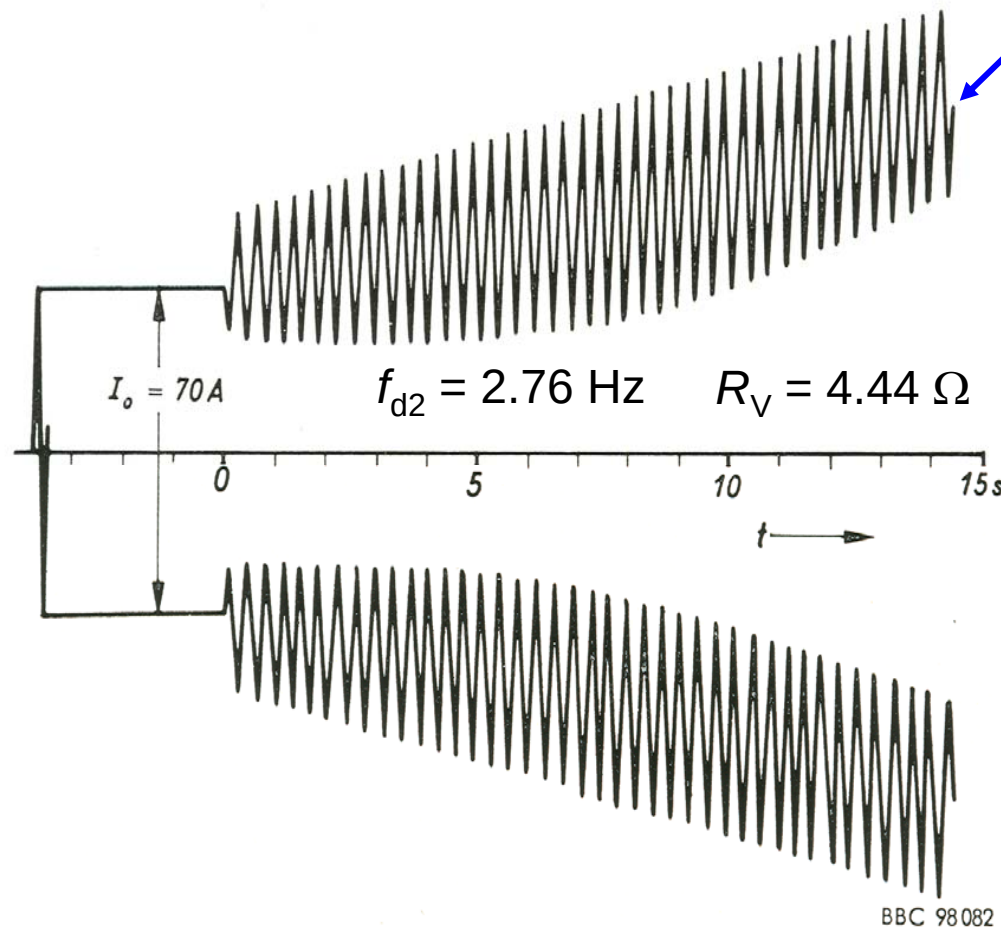
$$R_V / R_s = 93.2$$

$$r_s + r_V = 0.48$$

Source: BBC, Mannheim,
Germany



Induction machine: Measured unstable no-load stator current with a big stator resistance



Experiment **terminated** (before limiting cycle is reached) due to big noise of the motor, caused by mechanical vibrations

$$R_V / R_s = 104.2$$

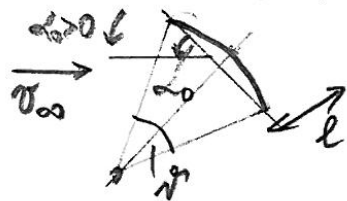
$$r_s + r_v = 0.54$$

Source: BBC,
Mannheim, Germany

BBC 98082

Selbstregende Flatterschwingung eines Strömungsprofils: P. HAGEDORN / Nichtlin. Schwingungen 1978

Elastischer Flügel: Federkonstante c , Profil z.B.: Kreisbogenumschale mit Öffnungswinkel γ AVG



v_{∞} : ungestörte Windströmung
 α_0 : Anstellwinkel des Profils
 l : Flügellänge
 ν : Windluftviskosität

Auftriebskraft: F_A
Widerstandskraft: F_W

$$F_A = C_A \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v_{\infty}^2 \cdot b \cdot l$$

$$F_W = C_W \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v_{\infty}^2 \cdot b \cdot l$$

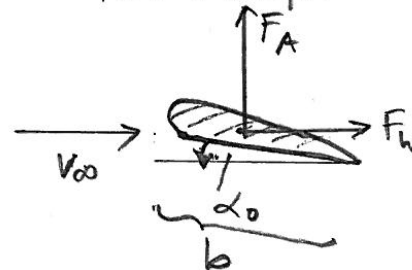
$C_A(\alpha_0)$, $C_W(\alpha_0)$

b : Flügellbreite

ρ : Luftdichte

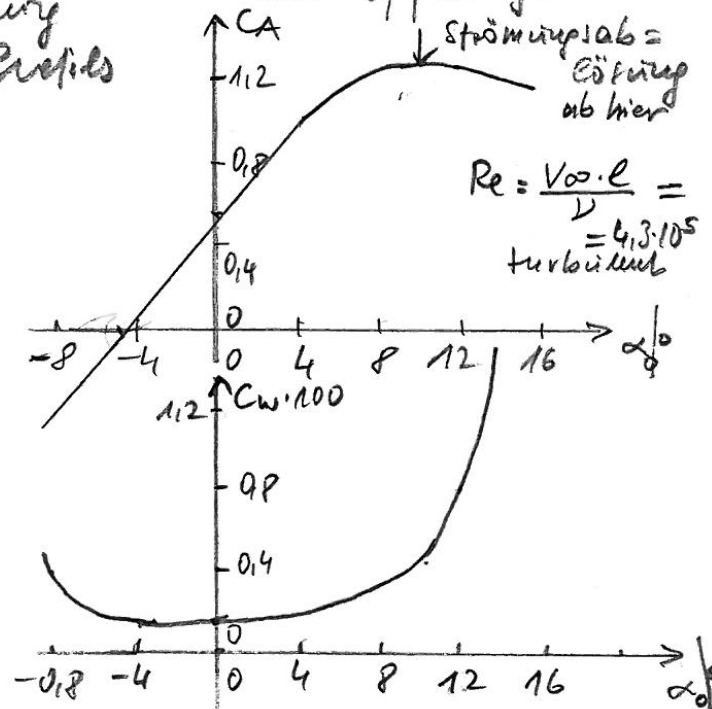


Beispiel:
NACA-Profil



$C_A \gg C_W$
(~ 100)

aber ab ca. 10° : Strömungsablösung: C_A sinkt wieder





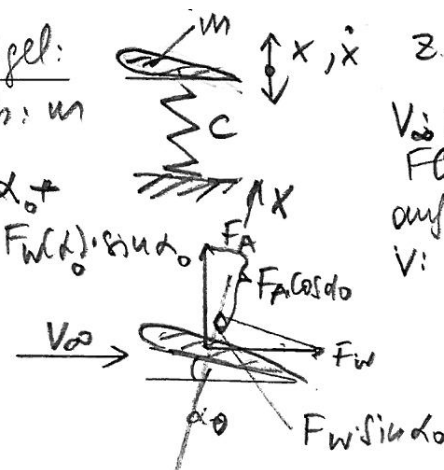
Schwingender Flügel:

masse des Flügels: m

$$m\ddot{x} + c\dot{x} = F_A(\alpha) \sin \alpha_0 +$$

Bewegungsgleichung:

x senkrecht zur
Profilchorda



z.B.: $\alpha_0 = 0$
 V_∞ relativ zum
Flügel, der z.B.
aufwärts schwingt mit $\dot{x}$
 V : Geschwindigkeit im Unendlichen
 $\alpha = \arctan\left(-\frac{\dot{x}}{V_\infty}\right)$ } $\alpha_0 = 0$
 $V = \sqrt{V_\infty^2 + \dot{x}^2}$

a) Kleine Schwingungsamplituden: $x = x_0 + \Delta x$, $\Delta x/x_0 \ll 1$

$$m\Delta\ddot{x} + c(\dot{x}_0 + \Delta\dot{x}) = \rho \frac{b\ell}{2} [V^2] \cdot [\cos \alpha \cdot C_A(\alpha) + \sin \alpha \cdot C_W(\alpha)]$$

$$\dot{x} = \Delta\dot{x}, \quad \alpha \approx -\frac{\Delta\dot{x}}{V_\infty}, \quad V^2 = V_\infty^2 + \Delta\dot{x}^2 \approx V_\infty^2$$

$$F_A \sim V^2$$

$$F_W \sim V^2$$

$$C_W(\alpha), C_A(\alpha)$$

$$\text{statt } F_A \sim V_\infty^2, F_W \sim V_\infty^2$$

$$C_W(\alpha_0), C_A(\alpha_0)$$

$$C_A(\alpha) \approx C_A(0) + \frac{dC_A}{d\alpha}|_0 \cdot \alpha, \quad C_W(\alpha) \approx C_W(0) + \frac{dC_W}{d\alpha}|_0 \cdot \alpha$$

$$V^2 \cdot (C_A(\alpha) \cos \alpha + C_W(\alpha) \sin \alpha) \approx (V_\infty^2 + \Delta\dot{x}^2) \cdot \left((C_A(0) + \frac{dC_A}{d\alpha}|_0 \cdot \alpha) \cdot (1 + \frac{\alpha^2}{2}) + (C_W(0) + \frac{dC_W}{d\alpha}|_0 \cdot \alpha) \cdot \alpha \right) \approx$$

$$\approx V_\infty^2 \left(C_A(0) + \frac{dC_A}{d\alpha}|_0 \cdot \alpha + C_W(0) \cdot \alpha + \frac{dC_W}{d\alpha}|_0 \cdot \alpha^2 \right) \approx V_\infty^2 \cdot (C_A(0) + \alpha (C_W(0) + \frac{dC_A}{d\alpha}|_0))$$

$$\Rightarrow m\Delta\ddot{x} + V_\infty \cdot \Delta\dot{x} \cdot (C_W(0) + \frac{dC_A}{d\alpha}|_0) \cdot \rho \frac{b\ell}{2} + c\Delta\dot{x} = 0$$

$$-V_\infty^2 \cdot C_A(0) \cdot \frac{\rho b\ell}{2} + c\dot{x}_0 = 0 \Rightarrow$$

$$-F_A(\alpha_0=0) : \text{aerodyn. Auftrieb}$$



pendelgewichtslege:

$$x_0 = \frac{F_A(\alpha_0=0)}{c}$$





Schwingungsgleichung für kleines $\Delta x/x_0$: bei Anströmwinkel $\alpha_0 = 0$:

$$m \Delta \ddot{x} + \rho \frac{b l}{2} v_{\infty} \cdot (C_W(0) + \left. \frac{dC_A}{d\alpha} \right|_0) + C \cdot \Delta x = 0$$

Selbstenergete Schwingung dann, wenn Dämpfung negativ: $C_W(0) + \left. \frac{dC_A}{d\alpha} \right|_0 < 0$
(DEN HARTOG, 1932)

Beispiel: Beim obigen NACA-Profil ist $\left. \frac{dC_A}{d\alpha} \right|_0 > 0$, $C_W(\alpha_0=0) > 0$, daher:

KEINE selbstenergeten Flatterschwingungen, also als Flügel brauchbar!

Die Dämpfung ist für $\alpha_0 \neq 0$ und kleines $\Delta x/x_0$ gegeben durch:

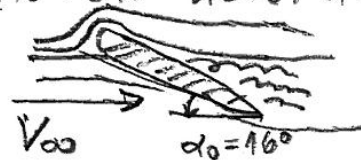
$$\rho \frac{b l}{2} v_{\infty} \cdot \left[\left. \frac{dC_A}{d\alpha} \right|_{\alpha_0} + C_W(\alpha_0) - (C_A(\alpha_0) - \left. \frac{dC_W}{d\alpha} \right|_{\alpha_0}) \cdot \tan \alpha_0 + 2 \cdot (C_A(\alpha_0) \cdot \cos \alpha_0 + C_W(\alpha_0) \sin \alpha_0) \cdot \sin \alpha_0 \right]$$

Bei $\alpha_0 = 16^\circ$: Strömungsablösung: $\left. \frac{dC_A}{d\alpha} \right|_{\alpha_0} = -1,9$, $C_W = 2 \cdot 10^{-2}$, $C_A = 1,15$, $\left. \frac{dC_W}{d\alpha} \right|_{\alpha_0} = 0,286$

$$\tan \alpha_0 = 0,286, \cos \alpha_0 = 0,96, \sin \alpha_0 = 0,275$$

$$-1,9 + 2 \cdot 10^{-2} - (1,15 - 0,286) \cdot 0,286 + 2 \cdot (1,15 \cdot 0,96 + 2 \cdot 10^{-2} \cdot 0,275) \cdot 0,275 = -1,04 < 0 \Rightarrow \text{es treten}$$

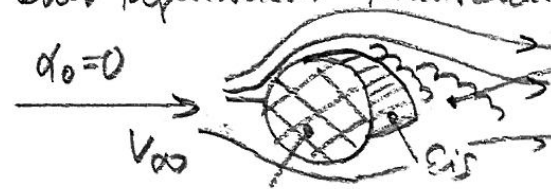
selbstenergete Flatterschwingungen auf





Beispiel: Freileitungseis mit asymmetrischem Eisbelag (der meist im Wind = schrägen wächst) oder Regenwasser-Rinnrinnen an der Seilbefläche!

Eis-Seil-Profil ist
unsymmetrisch wie
Tragflügel!



Strömungsablösung
bei $\alpha_0 = 0!$ →
→ negative Dämpfung!

Es werden selbstexcitierte Seilschwingungen („galloping“) erzeugt!

ACHTUNG: Bei großen Schwingungsamplituden X ist der Dämpfungs-
term wegen der Nichtlinearität positiv → Begrenzung der Amplitude →
→ Grenzyklus! der Schwingung

Dämpfung: $\rho \frac{bL}{2} \cdot (V_{\infty}^2 + \dot{X}^2) \cdot (C_A(\alpha) \cdot \cos \alpha + C_W(\alpha) \cdot \sin \alpha)$ mit $\alpha = -\arctan \frac{\dot{X}}{V_{\infty}}$, $\dot{X} \uparrow \downarrow$

bei $\alpha_0 = 0$

$$\Rightarrow C_A(\alpha) \cdot \cos \alpha + C_W(\alpha) \sin \alpha > 0$$

$$\begin{matrix} \text{für } \alpha > -4^\circ: 0,1 \dots 1,2 \\ \approx 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{für } \alpha < 4^\circ: 0,1 \dots 1,2 \\ \approx 0,4 \cdot 10^{-2} < 0 \end{matrix}$$

$-8^\circ \leq \alpha \leq 8^\circ$ um 0°
siehe NACA-
-Profil

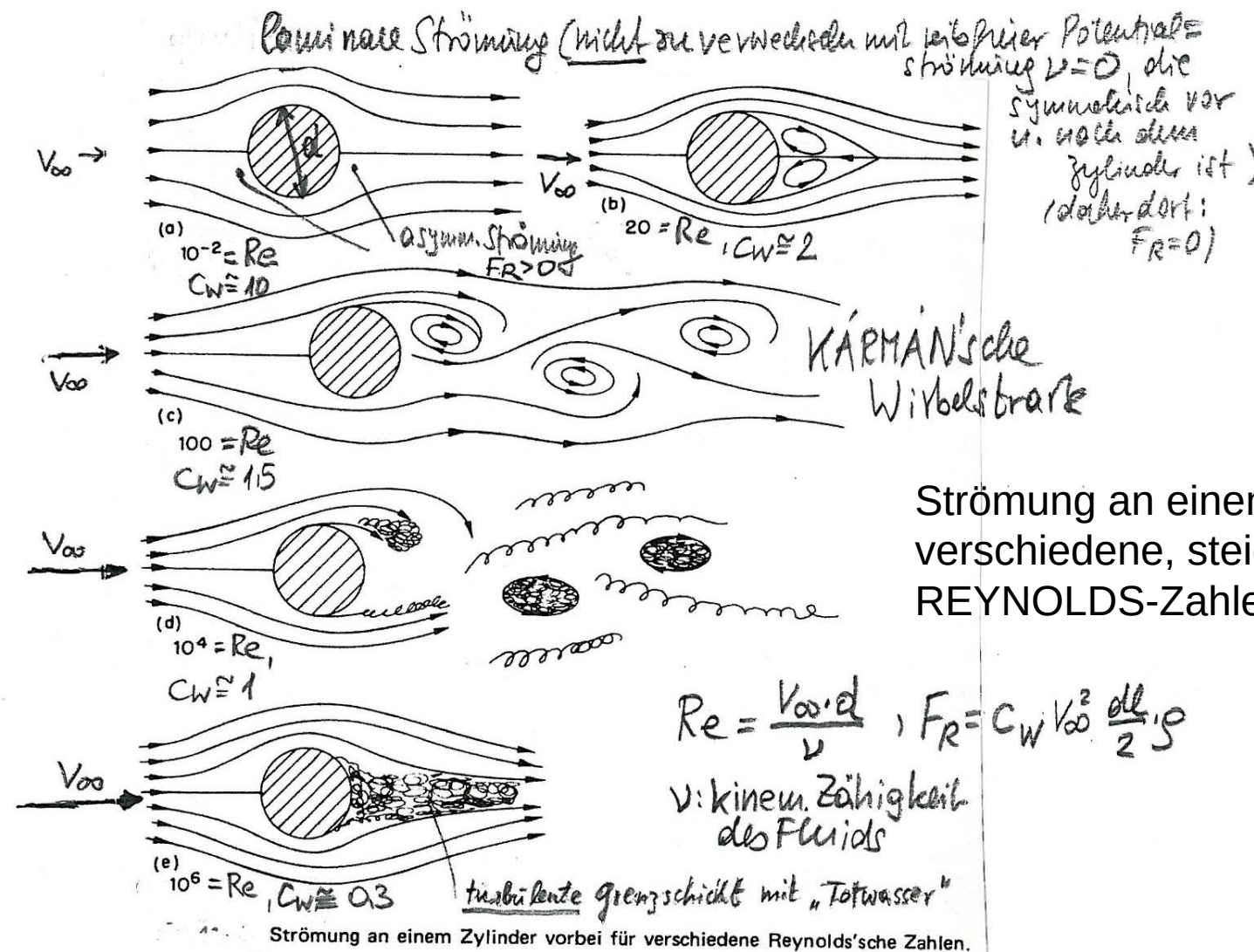
Für $\alpha > -4^\circ$: Dämpfung positiv





ACHTUNG: Selbsterregte Seilschwingungen dürfen nicht mit Winkel-
erregten Seilschwingungen („vibrations“) verwechselt werden.
Winkelerregte Seilschwingungen treten beim symmetrischen Seilprofil
durch abwechselnde Winkelabhängigkeit an der Laststelle (= periodische
Kraftimpulse) auf, die im Resonanzfall $f_{\text{reson}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{E}{m}}$ große
Schwingungsamplituden ergeben!

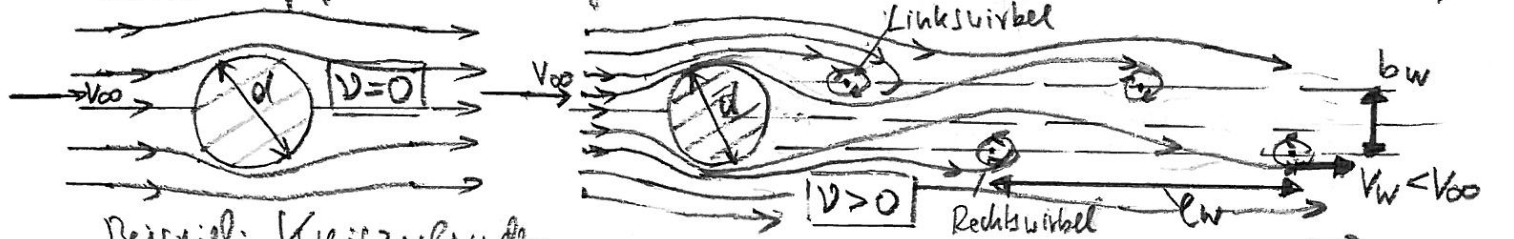




(aus: FEYNMAN Lectures, Oldenbourg, Bd. 2)



- Theodor von KÁRMÁN: Berechnung der Wirbelstärke, die durch (kleine)
 • Reibung in dem Fluid (Zähigkeit ν) an der abströmenden Seite entsteht.
 • In reibungsfreien Strömungen (Potentialströmung) entstehen KEINE Wirbel!



Beispiel: Kreiszylinder

"Impulsartige" Wechselkraft
 F_{Rz} senkrecht zur Windrichtung v_∞

b_w : Breite der Wirbelstraße

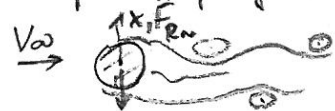
l_w : Periode der Wirbel räumlich

v_w : Wirbelzentrum-Geschwindigkeit

Wirbel lösen sich durch Diffusion auf

Reynoldszahl: $Re = \frac{v_\infty \cdot d}{\nu}$ klein, "laminare" Strömung

Frequenz der Wirbelablösung vom Kreiszylinder: $f_w = \frac{v_\infty - v_w}{l_w}$ = Frequenz der Kraftanregung. $b_w/l_w \approx 0,28$, Strömungswiderstand d.h. Wirbelbildung:



$$C_w = \frac{F_R}{\frac{\rho}{2} \cdot v_\infty^2 \cdot d} \approx \frac{l_w}{d} \left[1,55 \frac{v_w}{v_\infty} - 0,63 \left(\frac{v_w}{v_\infty} \right)^2 \right]$$

Differentialgleichung für Seilschwingung: $m\ddot{x} + cx = \hat{F}_R \cdot \sin(2\pi f_w t)$

Schwingungsamplitude $\hat{x}$ meist kleiner als Seildurchmesser d ("vibrations"), können durch Abstandshalter bzw. Seil dämpfer verkleinert werden.

Für $500 < Re < 50000$ ist $0,18 \leq St = \frac{d \cdot f_w}{v_\infty} \leq 0,2$ (STROUHAL-Zahl, 1878)





a) Seilvibrationen: Windgeschwindigkeit $v_{\infty} = 1 \dots 6 \text{ m/s}$,
 $d \approx 5 \dots 35 \text{ mm}$
 $I_N \approx 90 \dots 1150 \text{ A}$
 $J = \frac{I_N}{d^2 \pi} \approx 4,5 \dots 12 \text{ A/mm}^2$
 $f_W = 5 \dots 50 \text{ Hz}$, $\hat{x} \approx 0 \dots 20 \text{ mm}$: Gefahr Ermüdungsbruch
 $f_W = 5 \cdot v_{\infty} / d \approx 0,2 \cdot (1 \dots 6) / 0,02 = 10 \dots 60 \text{ Hz}$
 $d = 20 \text{ mm}$

b) Seilclausen (galloping): bei Starkwind $v_{\infty} = 15 \dots 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und Eisansatz ($\Delta \approx 0^\circ \text{C}$):
komplexe Schwingungen (selbstregener Grenzzyklus) mit großen Amplituden:
 $f \approx 1 \dots 5 \text{ Hz}$, $\hat{x} \approx 5 \dots 10 \text{ m} \rightarrow$ Gefahr der Seilberührung
unterschiedlicher Phasen U, V, W $\rightarrow$ Kurzschlüsse!

(H. STIMMER: Freileitungen; EUM, 1977, H. 11, p. 451 ÷ 461)

(J. WALLASCHER: Ermittlung maxisbezogener Windungsanforderungen durch
Schwingungsversuchen an de. Freileitungen, E-Wirtschaft 88 (1989)

(H. MAIER et al.: Anwendung des Winklerwellenverfahrens
auf den Entstehungsmechanismus winderegter
Seilschwingungen, E-Wirtschaft, 86 (1987), H. 21, p. 931 ÷ 936





Brückenschwingungen durch WINDERREGUNG:

Beispiel: Brücke über die TACOMA NARROWS, USA, Bundesstaat Washington.

Brücke als Hängebrücke mit Hohlkasten träger (Höhe $h = 2,4 \text{ m}$),
Spannweite: $l = 853 \text{ m}$, sehr schlank: $h:l = 1/350$, daher wenig steif und
Schwingungsanfällig.

Eröffnung: 1.7. 1940; schon bei leichtem Wind: Wirkelartige Biege-
Schwingungen mit Resonanz bei $f \approx 1 \text{ Hz}$ mit Amplituden von 60 cm
→ Kamera zum Monitoring installiert! („galloping gestic“)

Herbststurm: $V = 67 \text{ km/h}$: sehr heftige Schwingungen als Torsions-
Schwingung, $f \approx 0,2 \text{ Hz}$ (wieder) mit hoher Amplitude, nach 45 Minuten
reißen die Hänge seile, und die Brücke stürzt ins Wasser.

Neubau 1950 als Hängebrücke mit Fachwerkträgern zur Verstärkung.
Seit 2007: größere Hängebrücke neu erbaut!

1.14.5 Chaotisches Verhalten nichtlinearer Systeme

Chaotisches Verhalten nichtlinearer Systeme

Ein dynamischer Prozess hat trotz nahe beisammen liegender Anfangswerte $x_1(0), x_2(0)$ Lösungen $x_1(t), x_2(t)$, die sehr stark differieren. Auch elektrische Antennen und Aktoren mit nichtlinearen Stellgliedern können sich „chaotisch“, zwar deterministisch, aber regellos, verhalten.

Beispiel: Wachstumsprozess 1: lineares System - Exponentielles Wachstum

$x_{n+1} - x_n = B \cdot x_n$ Der Zuwachs ist proportional zur Ausgangspopulation x_n .
 B ist als Wachstumsrate eine reelle Zahl, x_0 : Startwert ($n=0$)

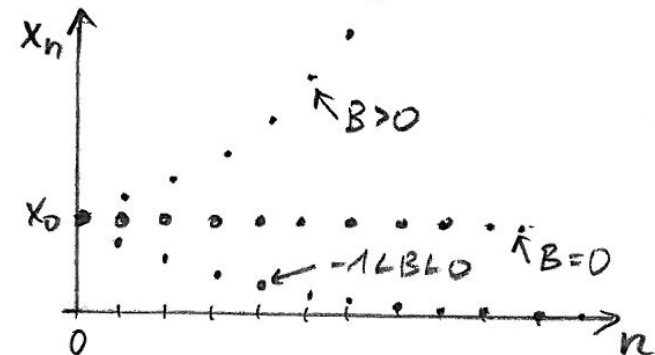
Lösung: $x(n) = x_n$: $x_{n+1} = Bx_n + x_n = (B+1)x_n = (B+1)^2 x_{n-1} = \dots = (B+1)^{n+1} x_0$

$$\underline{x_n = (B+1)^n \cdot x_0 = x_0 \cdot e^{n \cdot \ln(B+1)}}$$

$-1 < B < 0$: $0 < 1+B < 1$: $-\infty < \ln(1+B) < 0$: Abnahme
 exponentiell
 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \rightarrow 0$

$B = 0$: $\ln(1+B) = \ln 1 = 0$: $x_n = x_0$: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$
 kein Wachstum

$0 < B$: $\ln(1+B) > 0$: exponentielles Wachstum



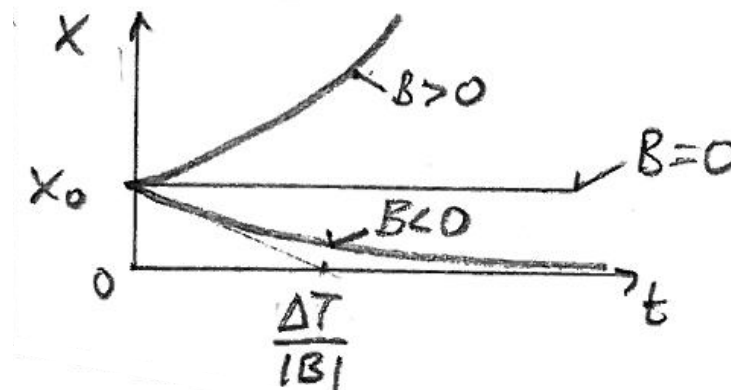


Kontinuierliche Näherung des diskreten Wachstumsprozesses ($n \rightarrow n+1$: Zeit ΔT , z. B. Vegetationsperiode mit Samenbildung, Aussaat, Fruchtentwicklung, Samenbildung...

$\Delta T \rightarrow 0$: kontinuierliche Vermehrung: $\frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta T} = \frac{B}{\Delta T} \cdot x_n = b \cdot x_n$ $b = \frac{\text{Wachstum}}{\text{Zeit}}$

$\lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta T} = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{x(t+\Delta T) - x(t)}{\Delta T} = \frac{dx}{dt} = b \cdot x(t)$ $x_n = x(t), x_{n+1} = x(t+\Delta T)$

Differentialgleichung ist linear: $x' - b \cdot x = 0$: $x(t) = x_0 \cdot e^{bt} = x_0 e^{\frac{B \cdot t}{\Delta T}}$





Beispiel: Wachstumsprozess 2: „Verdüht“-Modell
nicht linear!

$$X_{n+1} = B \cdot X_n (1 - X_n) \quad 0 \leq X_n \leq 1 \text{ normiert, } B \geq 0$$

Die nächste generation ist proportional zur
Vorgänger generation, aber auch zu den begrenzten
Ressourcen, die von der Vorgänger generation übrig gelassen werden, also
normiert: $1 - X_n$!

$$X_{n+1} - X_n = (B-1)X_n - B X_n^2, \quad \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{X_{n+1} - X_n}{\Delta T} = \dot{X} = \frac{(B-1) \cdot X}{\Delta T} - \frac{B X^2}{\Delta T} : \text{kontinuierliches Modell}$$

$$\frac{B-1}{\Delta T} = a, \quad \frac{B}{\Delta T} = b : \text{Wachstumsraten (Anzahl/Zeit)} : \dot{X} = aX - bX^2 = a \cdot \left(X - \frac{b}{a} X^2 \right)$$

$$\text{Trennung der Veränderlichen: } \frac{dx}{x(1 - \frac{b}{a}x)} = a \cdot dt \Rightarrow \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{1 - \frac{b}{a}x} \cdot \frac{b}{a} = \int a \, dt$$

$$\ln x \rightarrow \ln \left[1 - \frac{b}{a}x \right] + \underbrace{\ln K}_{\text{Integr.konstante}} = a \cdot t \Rightarrow \ln \left(\frac{x \cdot K}{1 - \frac{b}{a}x} \right) = a \cdot t, \quad \frac{x \cdot K}{1 - \frac{b}{a}x} = e^{a \cdot t}$$

$$x \cdot K = e^{a \cdot t} - \frac{b}{a} x e^{a \cdot t}, \quad x \cdot \left(K + \frac{b}{a} e^{a \cdot t} \right) = e^{a \cdot t}, \quad x = \frac{e^{a \cdot t}}{K + \frac{b}{a} e^{a \cdot t}} = \frac{1}{\frac{b}{a} + K \cdot e^{-a \cdot t}}$$

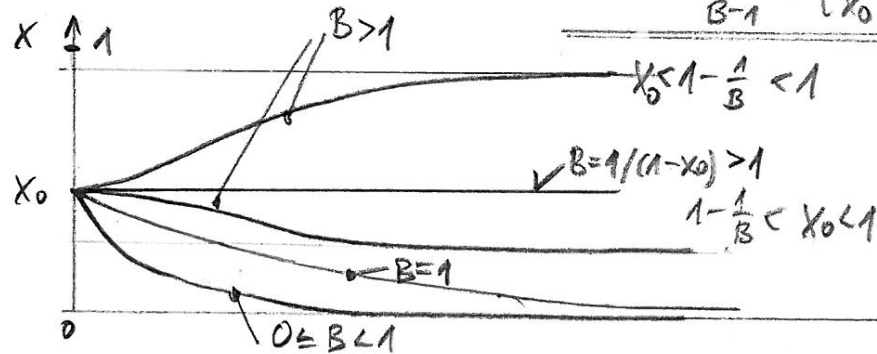
$$X_0 = x(0) = \frac{1}{\frac{b}{a} + K} \Rightarrow K = \frac{a}{X_0} - \frac{b}{a}$$

Logistische "Wachstumsfunktion":

$$x(t) = \frac{1}{\frac{b}{a} + \left(\frac{1}{x_0} - \frac{b}{a}\right) \cdot e^{-at}}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{B/\Delta T}{(B-1)/\Delta T} = \frac{B}{B-1}$$

$$x(t) = \frac{1}{\frac{B}{B-1} + \left(\frac{1}{x_0} - \frac{B}{B-1}\right) \cdot e^{-(B-1) \cdot t/\Delta T}}$$



$$\bullet \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{B-1}{B} = 1 - \frac{1}{B} \quad B > 1$$

$$\bullet \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0 \quad B = 1/(1-x_0)$$

$$\bullet \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad B < 1$$

$$\star) B = \frac{1}{1-x_0} \cdot \frac{1}{x_0} = \frac{1}{1-x_B} = \frac{B}{B-1} \Rightarrow \frac{1}{x_0} - \frac{B}{B-1} = 0 \Rightarrow x(t) = \frac{1}{\frac{B}{B-1} + 0} = \frac{B-1}{B} = x_0!$$

$$\bullet \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0, \text{ denn } \lim_{B \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{B}{B-1} + \left(\frac{1}{x_0} - \frac{B}{B-1}\right) \cdot e^{-(B-1) \cdot t/\Delta T}} = \lim_{B \rightarrow 1} \frac{B-1}{B + \left(\frac{B-1}{x_0} - B\right) e^{-\frac{B-1}{\Delta T} t}} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{B \rightarrow 1} \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x_0} - 1\right) \cdot e^{-\frac{B-1}{\Delta T} t} + \left(\frac{B-1}{x_0} - B\right) \cdot e^{-\frac{B-1}{\Delta T} t} \cdot \left(-\frac{t}{\Delta T}\right)} =$$

$$= \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x_0} - 1\right) \cdot e^0 + (0-1) e^0 \cdot \left(-\frac{t}{\Delta T}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{x_0} + \frac{t}{\Delta T}}, \quad |x(t)| = \frac{x_0}{1 + \frac{x_0}{\Delta T} t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

Folgt: Es ist kein unbegrenztes Wachstum wegen der Ressourcenknappheit möglich!



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT





Diskretes Wachstum mit Replikationsperiode $\Delta T^* > 0$: $x_{n+1} = B \cdot x_n (1 - x_n)$

i) Damit $x_{n+1} < 1$ bleibt, muss $B \leq 4$ bleiben!
(normiert)

$$y = Bx(1-x) \\ \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} : y_{\max} = \frac{B}{4} \Rightarrow$$

(ii) Startwerte $0 < x_0 < 1$ sind mit den Lösungen

symmetrisch zu $x_0 = 0.5$: denn: $x_{01} = \frac{1}{2} + a \Rightarrow x_{01} \cdot (1 - x_{01}) \cdot B =$

$$= \left(\frac{1}{2} + a\right) \left(\frac{1}{2} - a\right) \cdot B$$

$$x_{02} = \frac{1}{2} - a \Rightarrow x_{02} (1 - x_{02}) \cdot B = \left(\frac{1}{2} - a\right) \left(\frac{1}{2} + a\right) \cdot B \text{ identisch!}$$

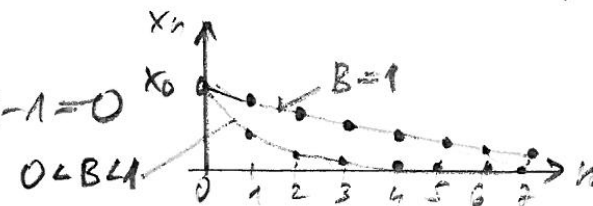
(iii) gemäß der kontinuierlichen Lösung ist ein Grenzwert zu erwarten, also

$$x_{n \rightarrow \infty} = x_{\infty} = B \cdot x_{\infty} (1 - x_{\infty}) \Rightarrow x_{\infty} = B x_{\infty} (1 - x_{\infty}), \text{ falls } x_{\infty} \neq 0, \text{ dann}$$

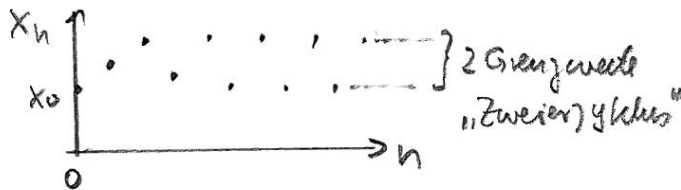
$$\Rightarrow 1 = B(1 - x_{\infty}) \Rightarrow x_{\infty} = \frac{B-1}{B} = \underline{\underline{1 - \frac{1}{B}}}$$

(iv) Wann ist $x_{\infty} = 0$? $x_{n+1} = 0 = B \cdot x_n (1 - x_n)$, wenn $B = 0$ oder $x_n = 1$, also $x_0 = 1$!
oder $0 \leq B < 1$.

$$B=1: x_{n+1} = x_n (1 - x_n) \rightarrow x_{\infty} = 1 - \frac{1}{B} = 1 - 1 = 0$$



(v) Sind auch 2 Grenzwerte möglich? Ab welchem B?



$$\left. \begin{aligned} x_{\infty 2} &= B \cdot x_{\infty 1} \cdot (1 - x_{\infty 1}) \\ (n+1) \quad (n) \quad (n) \\ x_{\infty 1} &= B \cdot x_{\infty 2} \cdot (1 - x_{\infty 2}) \\ (n) \quad (n-1) \quad (n-1) \end{aligned} \right\}$$

$$x_2 = B x_1 (1 - x_1), x_1 = B x_2 (1 - x_2) \Rightarrow x_2 = B [B x_2 (1 - x_2) - B (x_2 B (1 - x_2))^2] =$$

$$= B^2 x_2 [1 - x_2 - B x_2 + 2 B x_2^2 - B x_2^3]$$

$$x_2 \neq 0: \frac{1}{B^2} = 1 - (1+B)x_2 + 2Bx_2^2 - Bx_2^3 \Rightarrow x_2^3 - 2x_2^2 + x_2(1 + \frac{1}{B}) - (\frac{1}{B} - \frac{1}{B^3}) = 0$$

Polynom 3. Grades, garantiert eine reelle Lösung: daher existiert x_2 und daher auch x_1 und damit ein 2-er-Zyklus. $\uparrow \xrightarrow{f_{B^3}}$

Ab wann hilft dieser auf? Bei $B=3$: Beweis: $x_2^3 + a x_2^2 + b x_2 + c = 0$
 $a = -2, b = 1 + \frac{1}{B} = \frac{4}{3}, c = -\frac{1}{B} + \frac{1}{B^3} = -\frac{8}{27}$

$$\text{Mit } z = x_2 + \frac{a}{3} \Rightarrow x_2 = z - \frac{a}{3} \Rightarrow z^3 + z \cdot 3p + 2q = 0, 3p = b - \frac{a^2}{3}$$

$$2q = \frac{2a^3}{27} - \frac{a \cdot b}{3} + c$$

CARDANO-FORMEL für Nullstelle $(z - z_{01})(z - z_{02})(z - z_{03}) = 0$

$$z_{01} = u + v, u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + p^3}}, v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + p^3}}$$

$$\text{hier: } 3p = \frac{4}{3} - \frac{(-2)^2}{3} = 0, 2q = \frac{2}{27} \cdot (-2)^3 - \frac{(-2) \cdot \frac{4}{3}}{3} - \frac{8}{27} = \frac{-24 + 24}{27} = 0$$

$$z^3 = 0 \Rightarrow z_{01} = z_{02} = z_{03} = 0 \Rightarrow x_2 = 0 - \frac{(-2)}{3} = \frac{2}{3}$$

$$x_2 = \frac{2}{3} \Rightarrow x_1 = B x_2 (1 - x_2) = 3 \cdot \frac{2}{3} (1 - \frac{2}{3}) = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = x_2$$



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT





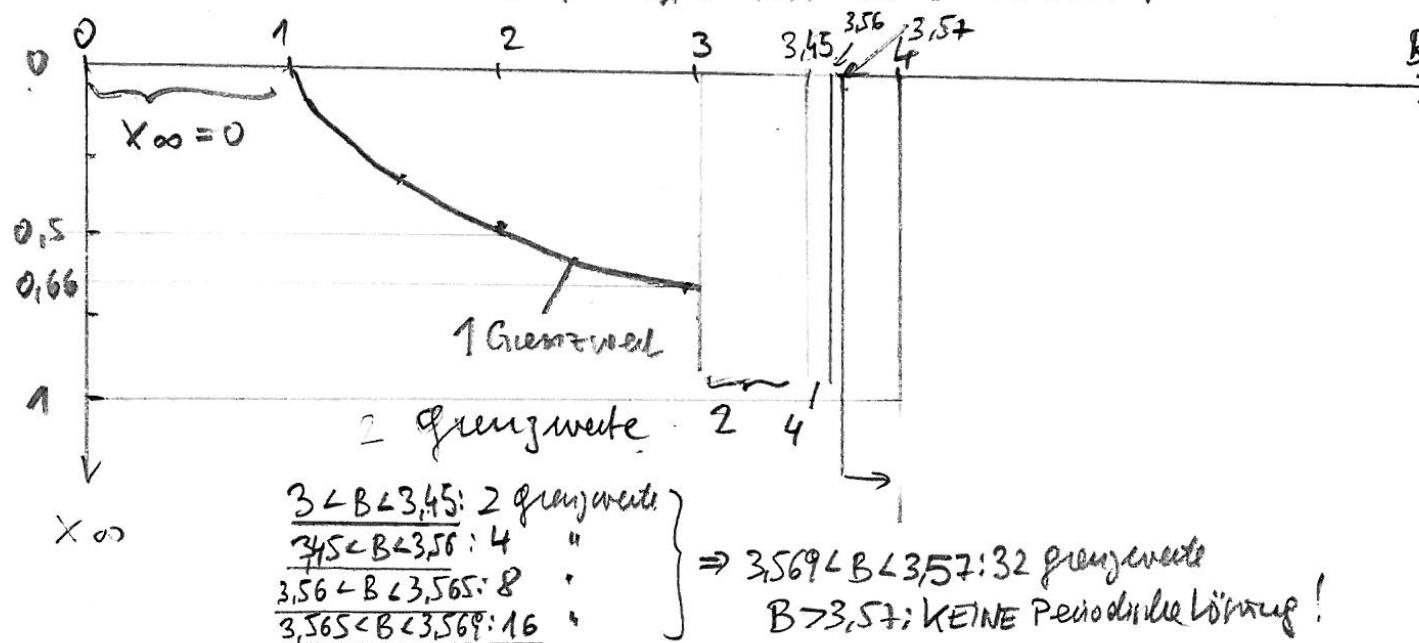
Für $1 \leq B \leq 3$: Ein Grenzwert $x_\infty = 1 - \frac{1}{B}$.

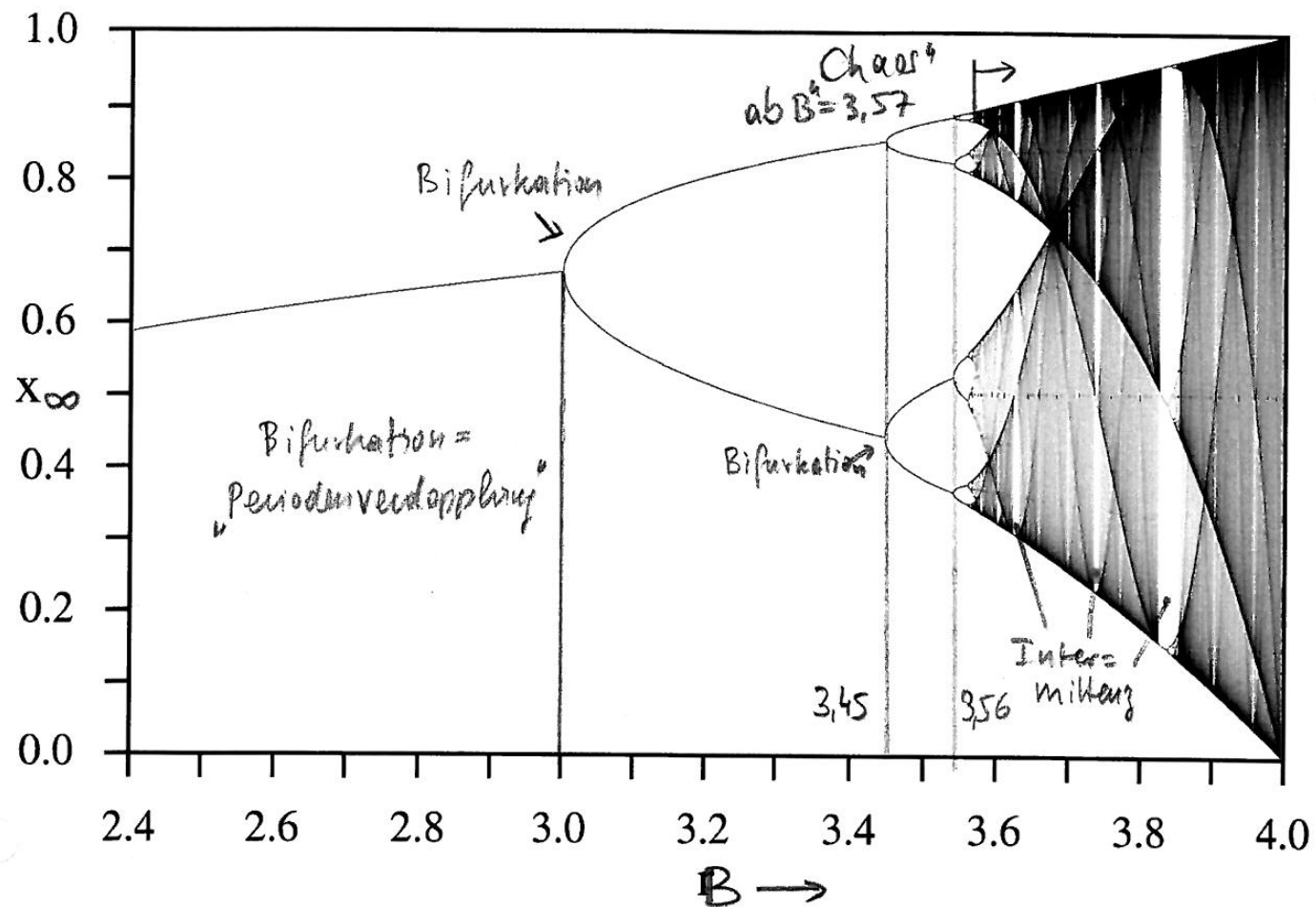
Ab $B > 3$: Zunächst zwei Grenzwerte $\rightarrow$ aus $P_3(x) = 0$: $z_{0,1} = x_2 - \frac{2}{3} \rightarrow x_1 = \dots$

Beispiel: $B = 3,05$: $x_2 = 0,737704886$

$$x_1 = 3,05 \cdot x_2 (1 - x_2) = 0,590168871$$

$$x_2 = 3,05 \cdot x_1 (1 - x_1) = 0,737704886 \text{ usw.}$$







- $B > 3,57$: Alle Werte innerhalb $0 < x_n < \dots < x_0 < 1$ treten auf und werden z.B. für $n = 10^6 \dots n = 10^6 \cdot 2$ (also 10^6 Werte) geplottet.
- Der Bereich $[x_n, x_0]$, innerhalb dem alle Werte ohne Periodizität auftreten, wird mit $B \uparrow$ immer breiter und erreicht bei $B = 4$: $[0,1] =$ alle Werte treten auf!
- z.B.: $\because x_0 = 0,5 \Rightarrow B = 4 : x_1 = 4 \cdot 0,5(1-0,5) = 1, x_2 = 4 \cdot 1(1-1) = \underline{0} \quad | x_2 = 4 \cdot 0(1-0) = \underline{0} \dots$

$$x_{n+1} = 4 \cdot x_n(1-x_n) \Rightarrow 4x_n - 4x_n^2 = x_{n+1} \quad | \quad x_n^2 - x_n + \frac{x_{n+1}}{4} = 0$$

$$\text{Vorgängerwerte } x_{n+2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{x_{n+1}}{4}} = \frac{1}{2} (1 \pm \sqrt{1 - x_{n+1}}) \in [0,1]$$

Fazit: Ein Nachfolgerwert hat 2 Vorgängerwerte bei $B = 4$, also 4 Vorgängerwerte, so dass jeder beliebige Vorgängerwert $\in [0,1]$ zu einem Nachfolgerwert $\in [0,1]$ führt, also das ganze Intervall $[0,1]$!

- Zwischen $3,57 \leq B \leq 4$ treten plötzlich Bereiche (z.B.: $3,81 \leq B \leq 3,82$ (ca.)) auf, wo nur 3 Grenzpunkte existieren, also Periodizität und kein Chaos.

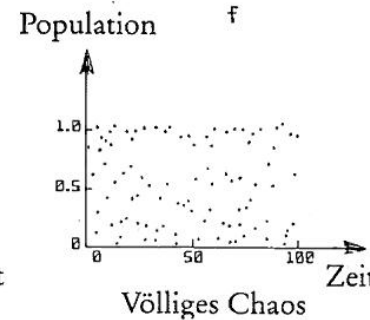
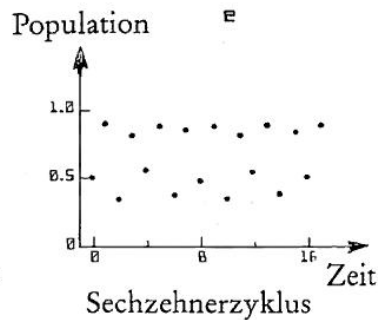
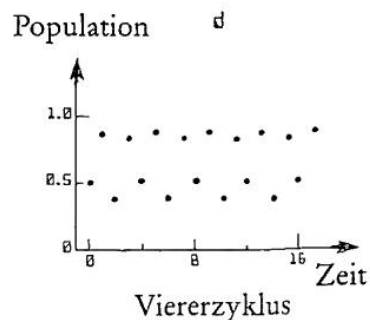
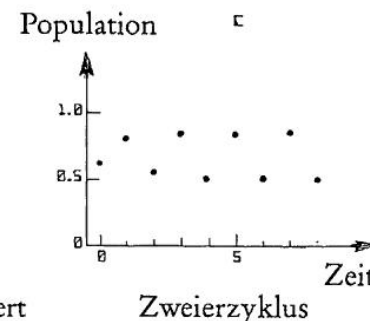
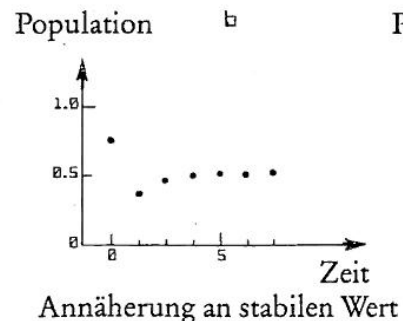
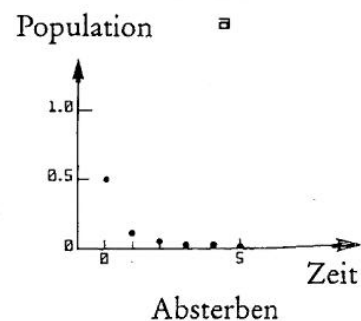
Intermittenz: Auftreten gesonderter Bereiche B zwischen Chaos-Abschnitten.

- $B < 4$: $x_{n+1} = B x_n(1-x_n) \Rightarrow x_{n+2} = \frac{1}{2} \cdot (1 \pm \sqrt{1 - \frac{x_{n+1}}{B} \cdot 4})$

x_{n+1} -Werte können wir auflösen
für $1 - \frac{4}{B} x_{n+1} > 0 \Rightarrow x_{n+1} < \frac{B}{4}$,

also z.B.: $B = 3,8 : x_{n+1} < \frac{3,8}{4} = 0,95$!





Aus:
Briggs-Peat: Entdeckung
des Chaos, Hanser, 1990

Entwicklung einer Population von Jahr zu Jahr für verschiedene (aber jeweils gleichbleibende) Nahrungsangebote oder Geburtenraten. Die Population kann rasch absterben (a), einem Gleichgewichtswert zustreben (b) oder nach Überschreitung gewisser kritischer Geburtenraten in

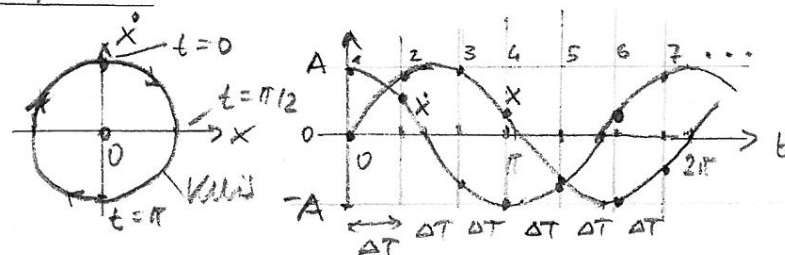
gleichmäßige Sprünge (zwischen 2, 4, 8, 16... verschiedenen festen Werten) übergehen (c, d, e). Oberhalb eines weiteren kritischen Wertes der Wachstumsrate steigt und fällt die Population von Jahr zu Jahr völlig chaotisch (f).





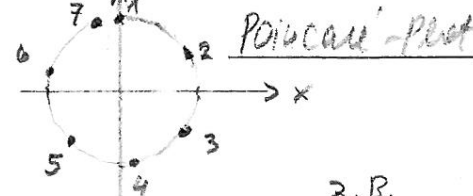
Poincaré-Plot: Hilfreiche Darstellung bei chaotischen Vorgängen,
die wir mittels der Berechenbarkeit sind. Es werden zwei- oder
dreidimensionale Darstellungen der Lösungen $x(t)$ bzw. $x(t), y(t), z(t)$ zu festen
Zeitpunkten $t, t+\Delta T, t+2\Delta T, t+3\Delta T, \dots$ dargestellt.

Beispiel 1): Nicht chaotisches Verhalten: Schwingung $x(t) = A \sin t, \dot{x} = A \cos t$



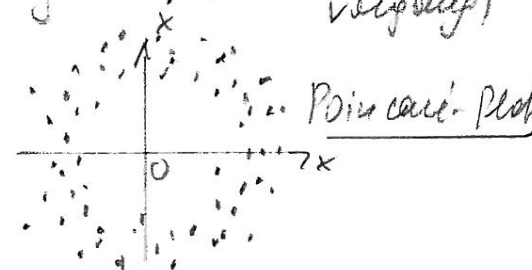
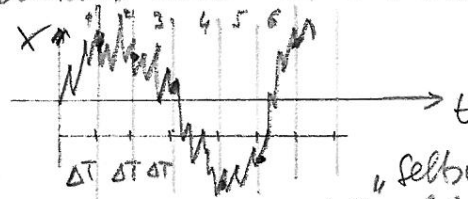
$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{\dot{x}}{A}\right)^2 = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

Kreis, Radius A



Viele Abtastpunkte ergeben
den Kreis als „Attraktor“

Beispiel 2): Chaotisches Verhalten der Schwingung überlagert: (Schalt =
versperrt)



„Selbster“
Attraktor als
Punktwolke

Während sich im Zeitverlauf $x(t)$ häufig keine Regelmäßigkeit erkennen
lässt, kann im Poincaré-Plot sich eine „starke“ Struktur als
„selbster“ Attraktor erkennen.



Beispiel: chaotisches Wettersystem: Luftmassenbewegung über

heißer Oberfläche: E. N. LORENZ, USA, 1963 $\dot{x} = -\sigma(x-y)$, $x \geq 0$

Re : REYNOLDS-Zahl $\dot{y} = Re \cdot x - y - x \cdot z$, $y \geq 0$

$x(0), y(0), z(0)$ gegeben $\dot{z} = -b \cdot z + x \cdot y$, $z \geq 0$

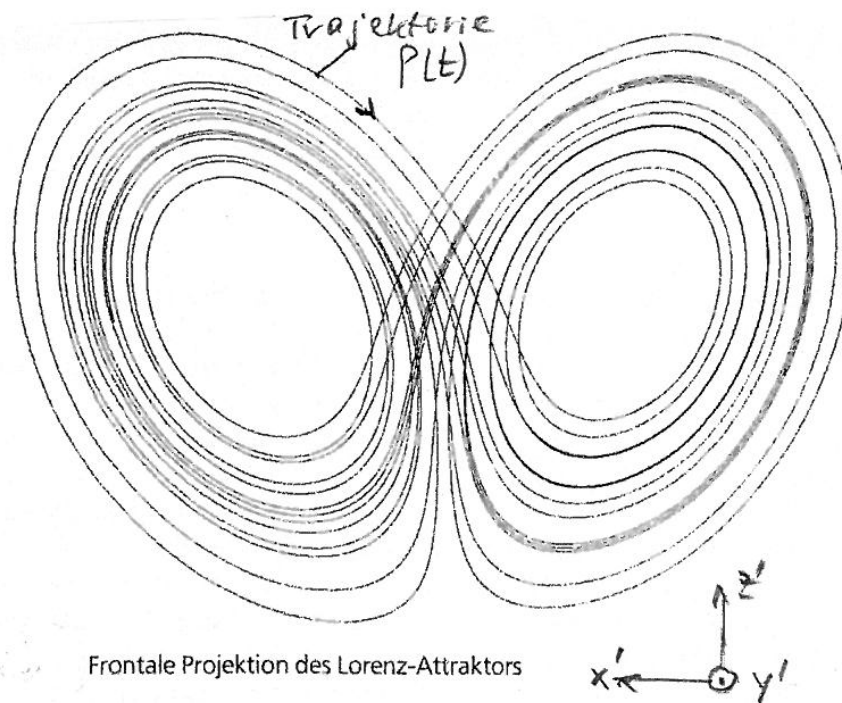
$\sigma = 10$, $b = 8/3$

Bei zunehmender Hitze nimmt thermische Grenzviskosität und damit Re der Luftmassen zu. (x, y, z) = Trajektorie $P(t)$ im Raum.

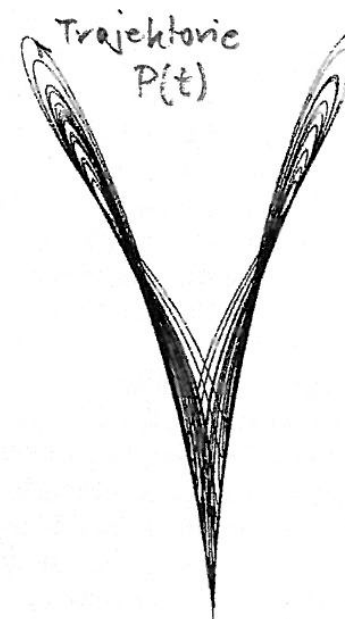
Gleichgewicht: $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$: $x = y$, $(Re-1)x - z \cdot x = 0$, $x \neq 0$, $z = Re-1$,
 $-b(Re-1) + x^2 = 0$: $x_{\infty} = \sqrt{\frac{b}{3} \cdot (Re-1)} = y_{\infty} > 0$, $Re > 1$

LORENZ fand: Für $1 \leq Re \leq 24.7$ endet die Trajektorie $P(t)$ für $t \rightarrow \infty$ unabhängig vom Startpunkt $Q = (x(0), y(0), z(0))$ im Gleichgewichtspunkt $(x_{\infty}, y_{\infty}, z_{\infty})$. Für $Re > 24.7$ ergibt $P(t)$ Schleifen (Raumkurven), die sich einem Grenzgebilde (selbstamer LORENZ-Attraktor) annähern, aber in immer weiteren Schleifen weiterbewegen!

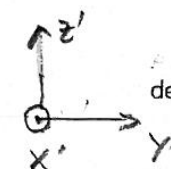




LORENZ-Attraktor



$Re > 25$



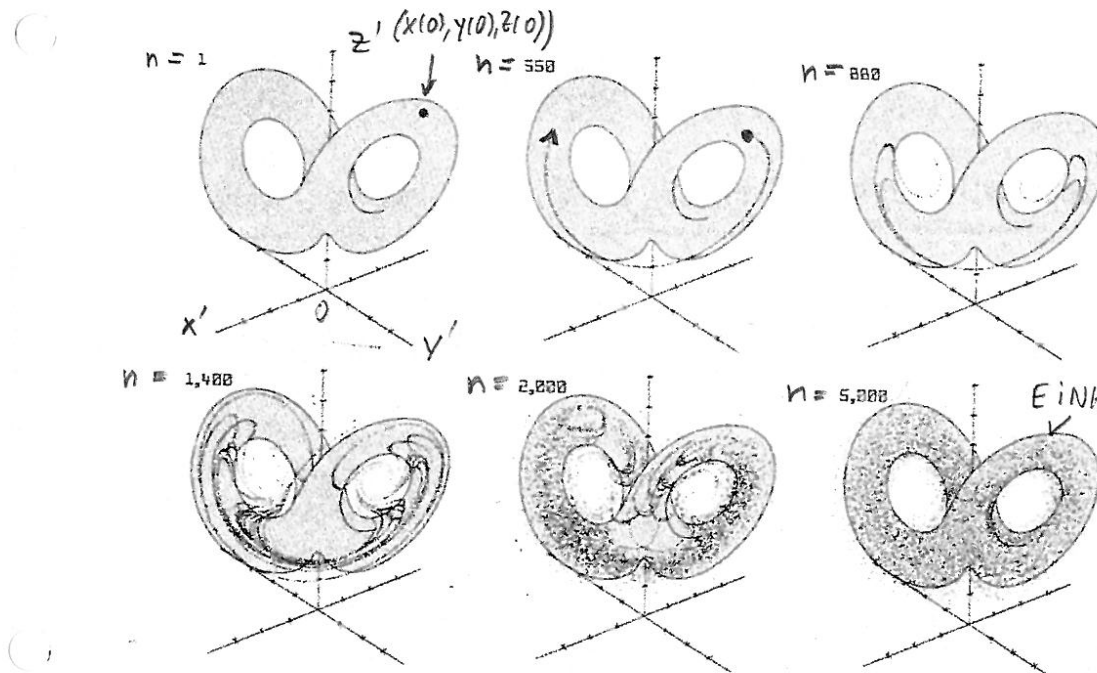
Seitliche Projektion
des Lorenz-Attraktors

aus: LAUWERIER, H.: Unendlichkeit,
rororo, 1993

LORENZ-Attraktor



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



Darstellung $P(t)$ für
zeiten $t, t+\Delta t, t+2\Delta t, \dots$
 $\dots, t+n\Delta t, \dots$

aus: Briggs, Peat:
Entstehung des Chaos,
Hanser, 1990

EINWIRKUNDE DES
LORENZ-ATTRAKTORS,
innerhalb der für
 $\text{Re} > 25$ alle Punkte
der Raumkurve $P(t)$
liegen:
„Globale Stabilität“

aber „lokal“ unvorhersagbar, denn:

Bei geringsten Änderungen der Anfangsbedingungen $x^*(0) = x(0) + \Delta x$, $\frac{\Delta x}{x(0)} \ll 1$
in die Trajektorie $P^*(t) = (x^*(t), y^*(t), z^*(t))$ zwar $y^*(0) = y(0) + \Delta y$, $\frac{\Delta y}{y(0)} \ll 1$
auch innerhalb des LORENZ-Attraktors, aber die $z^*(0) = z(0) + \Delta z$, $\frac{\Delta z}{z(0)} \ll 1$
Distanzen $P(t)P^*(t)$ zu gleichen Zeiten t sind nicht
beliebig klein, sondern variieren unregelmäßig = chaotisches Verhalten.
Daraus resultiert die „lokal“ Unvorhersagbarkeit des Wetters.



Strömungslehre: (Quelle: R. FEYNMAN/LEIGHTON/SANDS: BAND 2, LECTURES ON PHYSICS, OLDENSBURG)



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

a) Massenhaltung: $m = \text{konst.}$: $\frac{dm}{dt} = 0 \Rightarrow \Delta m = \rho \cdot \Delta x \Delta y \Delta z \Rightarrow \nabla \cdot (\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ (1)
 ρ : Dichte des Fluides $v_x = \frac{\partial x}{\partial t}, v_y = \frac{\partial y}{\partial t}, v_z = \frac{\partial z}{\partial t}; \vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$

KONTINUITÄTSGLEICHUNG

b) Newton's Kraftgesetz: je Volumen $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$: ρ : Dichte, ∇p : Druckgradient
 $\rho \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p - \rho \nabla \Phi + \vec{f}_{visk}$ Φ : Kräftepotential: z.B.: Schwerkraft

$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$
 $\frac{d\vec{v}}{dt} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial t} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \dots + \frac{\partial v_y}{\partial t} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \dots + \frac{\partial v_z}{\partial t} \end{array} \right\} =$

$\rho \nabla \Phi = \rho \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \Phi \vec{e} =$
 $= \rho(0, 0, g) = \rho g \vec{e}_z$
 $\Phi = g z$

$\vec{f}_{visk}$: Viskositätskraft/Volumen der Flüssigkeit

$= \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z + \frac{\partial v_x}{\partial t} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \dots + \frac{\partial v_y}{\partial t} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x + \dots + \frac{\partial v_z}{\partial t} \end{array} \right\} = v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} =$
 $= -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \Phi + \vec{f}_{visk}/\rho$

$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$ $\vec{v}_c$: konstant, wird nicht von $\vec{v}$ verändert!

$\vec{v}_c \times (\nabla \times \vec{v}) = \nabla(\vec{v}_c \cdot \vec{v}) - (\vec{v}_c \cdot \nabla) \vec{v} \Rightarrow (\vec{v}_c \cdot \nabla) \vec{v} = \nabla(\vec{v}_c \cdot \vec{v}) - \vec{v}_c \times (\nabla \times \vec{v}) =$
 $= \frac{1}{2} \nabla \vec{v}^2 + \underbrace{(\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v}_c}_{\vec{\Omega} \times \vec{v}} = \frac{1}{2} \nabla \vec{v}^2 + \vec{\Omega} \times \vec{v}$
 $\nabla(\vec{v}_c \cdot \vec{v}) + \nabla(\vec{v} \cdot \vec{v}_c) = \nabla(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \nabla \vec{v}^2$
 $2 \nabla(\vec{v}_c \cdot \vec{v}) \Rightarrow \nabla(\vec{v}_c \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} \nabla \vec{v}^2$ nicht linear!

$\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{v}$: Wirbel von $\vec{v}$

$\frac{1}{2} \nabla \vec{v}^2 + \vec{\Omega} \times \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \Phi + \vec{f}_{visk}/\rho$ (2)

NAVIER-STOKES-GLEICHUNG



NAVIER-STOKES-Gleichung - Sonderfälle

Sonderfall: Reibungsfrei: $\vec{f}_{visk} = 0$ $\frac{1}{2} \nabla \vec{v}^2 + \vec{\Omega} \times \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \Phi$ (2)'

Sonderfall: Stationär: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$: $\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$ und $\vec{\Omega} \times \vec{v} = -[\nabla \frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{\nabla p}{\rho} + \nabla \Phi]$
 $\rho(x, y, z, t) \rightarrow (\partial \rho / \partial t = 0, \partial \vec{v} / \partial t = 0)$

Sonderfall: inkompressibel: $\rho = konst$: $\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = \rho (\nabla \cdot \vec{v}) = 0 \Rightarrow \underline{\nabla \cdot \vec{v} = 0}$

"Stromlinie" $\vec{v}$
 $\nabla \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{v}) = 0 = -\vec{v} \cdot \nabla [\frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Phi] \Rightarrow \frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Phi = konst.$
 keine Änderung in Richtung von $\vec{v}$, da $\vec{v} \cdot \nabla [\dots] = 0 \Rightarrow \nabla [\dots] = 0$
 1. Integral der Bewegungsgleichung: $\frac{\vec{v}^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g z = konst.$ {Längs einer Stromlinie (Bernoulli-Gleichung)}

Sonderfall: Wirbelfrei: $\vec{\Omega} = 0$

$\nabla \times \vec{v} = 0, \nabla \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \underline{\Delta \vec{v} = 0}$ Laplace-Gleichung für v_x, v_y, v_z

Reale Flüssigkeitsströmung: häufig: $\rho = konst.$ (inkompressibel), $\rightarrow \nabla \cdot \vec{v} = 0$,
 aber nicht: $\vec{f}_{visk} = 0$, sondern $\vec{f}_{visk} = \eta \nabla^2 \vec{v}$



$$\vec{f}_{visk} = \eta (\nabla \cdot \nabla) \vec{v} = \eta \Delta \vec{v} = \eta \nabla^2 \vec{v}, \quad \eta: \text{dynamische Zähigkeit}, \quad \frac{\eta}{\rho} = \nu: \text{kinematische Zähigkeit}$$

$$\rho \left\{ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \times \vec{\omega} + \frac{1}{2} \nabla v^2 \right\} = -\nabla p - \rho \nabla \Phi + \eta \nabla^2 \vec{v}$$

$$\text{Mit } \rho = \text{konst.} \Rightarrow \nabla \times: \rightarrow \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{\omega} \times \vec{v}) = \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 (\nabla \times \vec{v}) = \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \vec{\omega}$$

(mit $\nabla \times \nabla(\dots) = 0$) ($\nabla \times (\nabla \cdot \nabla) \vec{v}$) = $(\nabla \cdot \nabla) \nabla \times \vec{v} = \nabla^2 \vec{\omega}$)

Normierung: $x' = x/D, y' = y/D, z' = z/D, V_{\infty}$: V weit weg von einem Strömungskörper mit dem Durchmesser D ; $t' = t/\tau, \tau = D/V_{\infty}$ (z.B.: $V_{\infty} \times$)

$$\frac{\partial \vec{\omega}'}{\partial t'} \cdot \frac{1}{D} \nabla' \times \left(\frac{\vec{\omega}'}{D/V_{\infty}} \times \vec{v}' \cdot V_{\infty} \right) = \frac{\eta}{\rho} \cdot \frac{1}{D^2} \nabla'^2 (\vec{\omega}') \cdot \frac{1}{D/V_{\infty}}$$

$$\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z) = \frac{1}{D} (\partial/\partial x', \partial/\partial y', \partial/\partial z') = \frac{1}{D} \nabla', \quad \vec{v}' = \vec{v}/V_{\infty}$$

$$\vec{\omega}' = \vec{\omega} \cdot (D/V_{\infty})$$

$$\frac{\partial \vec{\omega}'}{\partial t'} + \nabla' \times (\vec{\omega}' \times \vec{v}') = \underbrace{\left(\frac{D}{V_{\infty}} \right)^2 \cdot \frac{V_{\infty}}{D} \cdot \frac{1}{D^2} \frac{\eta}{\rho}}_{\frac{\eta}{V_{\infty} \rho D} = \frac{1}{Re}} \cdot \nabla'^2 \vec{\omega}'$$

$$Re = \frac{V_{\infty} \rho D}{\eta} : \text{Reynoldszahl}$$

$$Re = \frac{V_{\infty} D}{\nu}$$

Dimensionslose Größen:

$$\vec{\omega}', \vec{v}', t', x', y', z' \Rightarrow \nabla'$$

$$\frac{\partial \vec{\omega}'}{\partial t'} + \nabla' \times (\vec{\omega}' \times \vec{v}') = \frac{1}{Re} \nabla'^2 \vec{\omega}'$$

$$\nabla' \cdot \vec{v}' = 0 \quad \text{inkompressibel}$$

$$\vec{\omega}' = \nabla' \times \vec{v}'$$

Herleitung der REYNOLDS- Zahl



Laminare und turbulente Strömung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Beispiel:

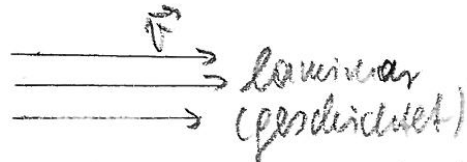
Strömung um einen Zylinder mit Durchmesser D , $V_\infty = V_{00K}$, ρ , μ

$10^{-2} \leq Re \leq 20$: Zähigkeit dominiert Trägheitsterm $\rightarrow \approx \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$: laminare Strömung

$20 \leq Re \leq 200$: KARMAN'sche Wirbelstraße = periodisch laminar

$200 \leq Re \leq 20000$: Turbulenz (= chaotisch) mit periodischen Abschnitten

$20000 \leq Re \leq 10^7$: Turbulente Randzone im Zylinder



(mit keiner Potentialströmung)



turbulente (chaotische) Strömung

(chaotische Bewegung der mit kleinen Strömungsgeschwindigkeit überlagert)

Achtung: Für $Re \rightarrow \infty$, also $\nu \rightarrow 0$,
Verdrängte rechte Seite nicht, weil

$\nabla^2 \vec{\Omega}$ bei Kernbedingungen dritter Art als 2. Ableitung stärker wirkt,

also $\frac{\nabla^2 \vec{\Omega}}{Re}$ nicht gegen Null strebt.



DUFFING'scher Schwinger (1)



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Beispiel: DUFFING'sche Differentialgleichung: Mechanischer Schwinger mit nicht-

linearer Feder

$$F_F(x) = \beta x + \alpha x^3, \beta > 0$$

$\alpha > 0$: zunehmend härtere Feder („überlinear“)

$\alpha < 0$: zunehmend weichere Feder („unterlinear“)

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx + k_3x^3 = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{d}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x + \frac{k_3}{m}x^3 = 0$$

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \beta x + \alpha x^3 = 0 \quad \begin{cases} \delta = d/m \\ \beta = k/m \\ \alpha = k_3/m \end{cases}$$

Sonderfall: ungedämpfte Eigenschwingung: $\delta = 0$

$$\ddot{x} + \beta x + \alpha x^3 = 0$$

Integrale zur Darstellung in der Phasenebene: $\dot{x}\ddot{x} + \beta\dot{x}x + \alpha\dot{x}x^3 = 0, \dot{x} \neq 0$

$$\dot{x}\ddot{x} = \frac{d}{dt}(\dot{x})^2 \cdot \frac{1}{2}, \dot{x}x = \frac{d}{dt}(x)^2 \cdot \frac{1}{2}, \dot{x}x^3 = \frac{d}{dt}x^4 \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\dot{x}^2}{2} + \beta \frac{x^2}{2} + \alpha \frac{x^4}{4} = \text{const.} = E$$

Phasenkurven: $\dot{x}^2 = 2E - \beta x^2 - \alpha x^4/2$

Gleichgewichtspunkte: $d/dt = 0 \Rightarrow \beta x_0 + \alpha x_0^3 = 0, x_0 = 0, \beta + \alpha x_0^2 = 0: x_0^2 = -\frac{\beta}{\alpha}$

Für $\alpha < 0, \beta > 0: -\beta/\alpha > 0: x_0 = \pm \sqrt{-\beta/\alpha}$



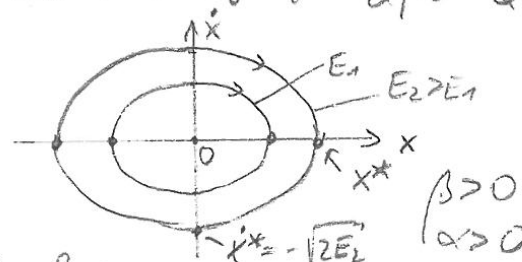
DUFFING'scher Schwinger (2)

$$\dot{x} = \pm \sqrt{2E - \beta x^2 - \alpha x^4/2} : \text{symm. zur } x\text{-Achse und wegen } (-x)^2 = x^2 \text{ auch symm. zur } \dot{x}\text{-Achse}$$

$$E=0 \rightarrow x=0 \text{ für } \beta > 0, \alpha > 0$$

$$E \uparrow \rightarrow \dot{x}=0 \text{ für } \frac{\alpha x^4}{2} + \beta x^2 - 2E = 0 \Rightarrow x^2 = f : f^2 + \frac{2}{\alpha}\beta f - \frac{4E}{\alpha} = 0 : f_{1,2} = -\frac{\beta}{\alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + \frac{4E}{\alpha}} = x^2 > 0$$

$$x=0 : \dot{x}^* = \pm \sqrt{2E}$$



$(\dot{x}_0, x_0) = (0, 0)$: stabiler Gleichgewichtspunkt!

Allgemein: $\ddot{x}m + F(x) = 0 \quad (x, \dot{x}) : \int \cdot dt \Rightarrow \int F(x) \dot{x} dt = \int F(x) \frac{dx}{dt} dt = \int F(x) dx$

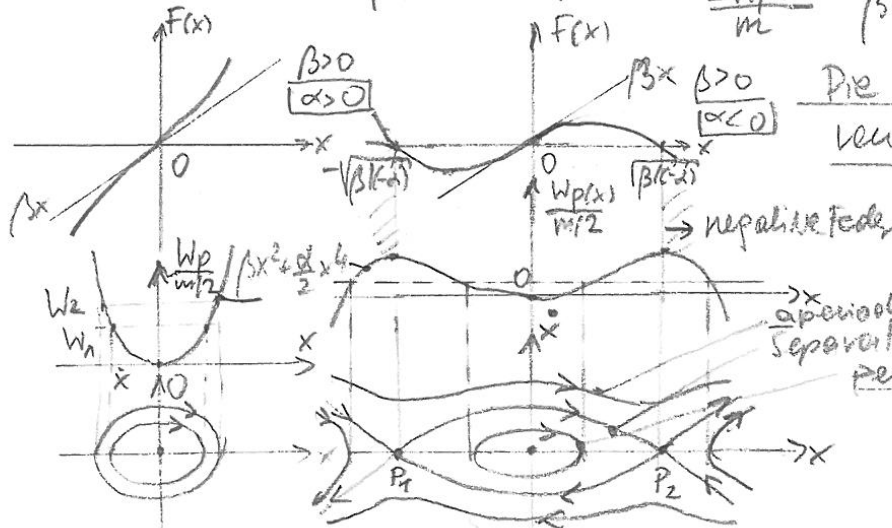
$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + \int F(x) dx = W, \quad \int F(x) dx = W_p(x) \Rightarrow W_{kin} + W_p = W = \text{const.}$$

Konservatives System $W/m = E$

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(W - W_p(x))}$$

$$\frac{2W_p(x)}{m} = \beta x^2 + \alpha x^4/2$$

Die Separatrix trennt die periodischen von den aperiodischen Lösungen!



Ursprung ist stabiler Gleichgewichtspunkt; P_1, P_2 instabile Gleichgewichtspunkte

DUFFING'scher Schwinger (3)



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Lösung der ungedämpften DUFFING-Gleichung für freie Schwingungen:

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(W - W_p(x))} \rightarrow \text{Trennung der Variablen: } t = t_0 + \int_0^x \frac{dx'}{\pm \sqrt{\frac{2}{m}(W - W_p(x'))}}$$

$$\int_0^x \frac{dx'}{\pm \sqrt{\frac{2}{m}(W - W_p(x'))}} = \int_0^x \frac{dx'}{\pm \sqrt{2E - \underbrace{\beta x^2 - \alpha x^4/2}_{U(x)}}} \Rightarrow \text{elliptisches Integral, da } U(x) \text{ maximal Polynom 4. Grades}$$

Gedämpfte DUFFING'sche Gleichung: Freie Schwingungen: $\delta > 0$

$$E = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\beta x^2}{2} + \frac{\alpha x^4}{4} \Rightarrow \frac{dE}{dt} = \dot{x}(\ddot{x} + \beta x + \alpha x^3) = \dot{x}(-\delta \dot{x}) = -\delta \dot{x}^2 < 0$$

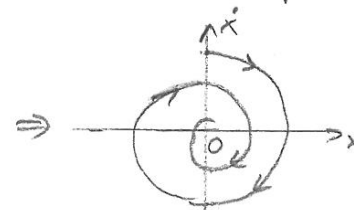
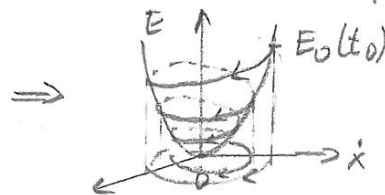
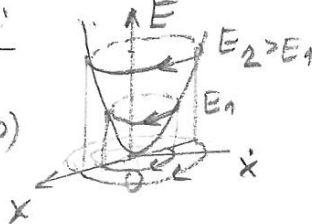
$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + \beta x + \alpha x^3 = 0$$

Fazit: Die konstante E der Phasenebenenkurve sinkt mit der Zeit t vom Anfangswert $E_0(t_0) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$.

Beispiel:

$$\delta = 0$$

($\beta > 0, \alpha > 0$)



Näherung für kleine Dämpfung: δ

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + \beta x + \alpha x^3 = 0 \quad | \cdot \dot{x}, \text{ soll}$$

$$= \left(\underbrace{\frac{\dot{x}^2}{2}}_{\sim W_k} + \underbrace{\frac{\beta x^2}{2} + \frac{\alpha x^4}{4}}_{\sim W_p} \right) \Big|_t^{t+\Delta t} + \int_t^{t+\Delta t} \delta \dot{x} \dot{x} dt \Rightarrow \underbrace{(W_k + W_p) \Big|_t^{t+\Delta t}}_{-\Delta E} = \Delta E : \text{Dämpfungsverlust}$$



DUFFING'scher Schwinger (4)



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Ungedämpfte erzwungene Schwingungen $\delta=0$

$\ddot{x} + \beta x + \alpha x^3 = \mu \cdot \cos \omega t$: Es gibt keine analytische periodische Lösung

Methode nach DUFFING (Näherung):

$\ddot{x} = -\beta x - \alpha x^3 + \mu \cdot \sin \omega t$, Ansatz: $x_1 = C \sin \omega t$, $C = \text{konst.}$

$$\ddot{x}_2 = -\beta x_1 - \alpha x_1^3 + \mu \cdot \sin \omega t = -\beta C \sin \omega t - \alpha C^3 \sin^3 \omega t + \mu \sin \omega t$$

$$\sin^3 \omega t = \frac{1}{4}(3 \sin \omega t - \sin 3\omega t)$$

$$\ddot{x}_2 = (-\beta C + \mu - \frac{3}{4}\alpha C^3) \sin \omega t + \frac{1}{4}\alpha C^3 \sin 3\omega t$$

$\int \ddot{x}_2 dt = x_2 + k_1 t + k_2 \rightarrow x_2$ soll periodisch sein $\rightarrow k_1=0, k_2=0$
und alternieren

$$x_2 = -(-\beta C + \mu - \frac{3}{4}\alpha C^3) \cdot \frac{1}{\omega^2} \sin \omega t - \frac{1}{36\omega^2} \alpha C^3 \sin 3\omega t : \text{Nächster Näherungsansatz} \rightarrow$$

$\ddot{x}_3 = -\beta x_2 - \alpha x_2^3 + \mu \sin \omega t \rightarrow \int \ddot{x}_3 dt = x_3$ usw. Es treten in der Lösung die Frequenzen ω (Erregerfrequenz), $3\omega, 5\omega, \dots$ auf. Die Schwingung ist periodisch, aber nicht harmonisch. Hier: Abbruch bei x_2 !

Bestimmung von C : $x_1 = C \sin \omega t$, $x_2 \approx (\beta C - \mu + \frac{3}{4}\alpha C^3) \frac{1}{\omega^2} \sin \omega t$, $x_1 \stackrel{!}{=} x_2 \Rightarrow \underline{C}$!



DUFFING'scher Schwinger (5)



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

$$C = C \frac{1}{\omega^2} \left(\beta - \frac{k}{C} + \frac{3}{4} \alpha C^2 \right) \Rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 - \frac{k}{C} + \frac{3}{4} \alpha C^2 \Rightarrow \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 = 1 - \frac{k}{C\beta} + \frac{3}{4} \frac{\alpha}{\beta} C^2$$

linearer Schwinger: $\ddot{x} + \beta x = 0 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\beta}, \beta = \omega_0^2$
($\alpha=0$) $\beta > 0$

linearer Schwinger: $\alpha=0$:

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 = 1 - \frac{k}{C\beta}$$

$$x_2(t) = C \cdot \sin \omega t - \frac{1}{36} \alpha C^3 \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \frac{k}{C} + \frac{3}{4} \alpha C^2} \cdot \sin 3\omega t \quad (\text{Näherungslösung})$$

Sie stimmt immer genauer, je kleiner α ist. Bei kleinem α ist:

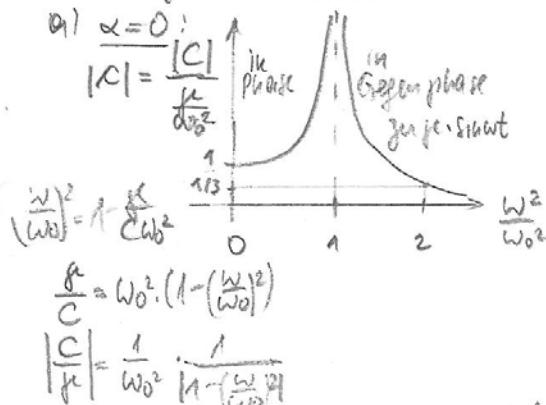
$$x_2(t) \approx C \cdot \sin \omega t - \frac{1}{36} \alpha C^3 \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - k/C} \cdot \sin 3\omega t, \quad \frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{1 - \frac{k}{C\beta} + \frac{3}{4} \frac{\alpha}{\beta} C^2}$$





Resonanzdiagramme:

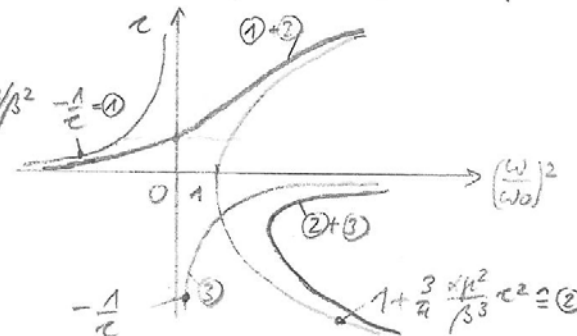
a) $\alpha = 0$:



b) $\alpha > 0$: $(\frac{\omega}{\omega_0})^2 = 1 - \frac{1}{\epsilon} + \frac{3}{4} \frac{\alpha \mu^2}{\beta^2} \epsilon^2 = -\frac{1}{\epsilon} + 1 + \frac{3}{4} \frac{\alpha \mu^2}{\beta^2} \cdot \epsilon^2$

$\epsilon = \frac{C}{\omega_0^2} = \frac{C\beta}{\mu}$

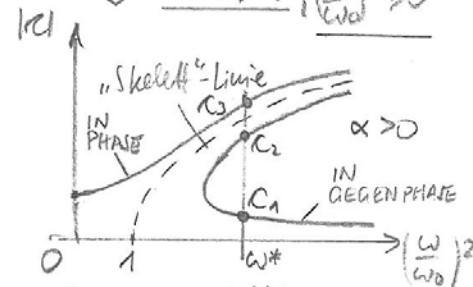
$C^2 = \epsilon^2 \mu^2 / \beta^2$



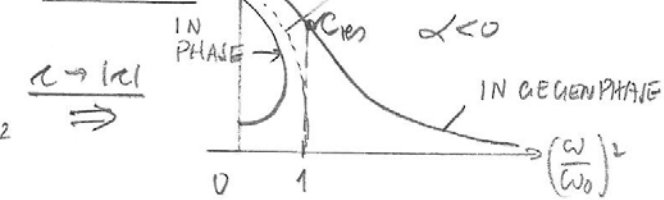
"Skelett"-Linie:

②: $(\frac{\omega}{\omega_0})^2 = 1 + \frac{3}{4} \frac{\alpha \mu^2}{\beta^2} \epsilon^2$

$\epsilon \rightarrow |C|, (\frac{\omega}{\omega_0})^2 \geq 0$

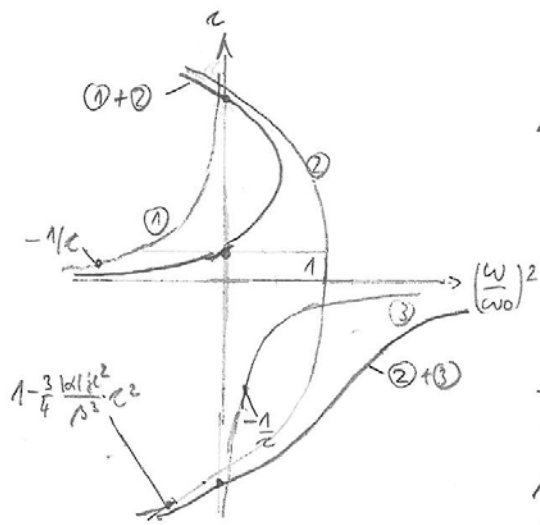


c) $\alpha < 0$:



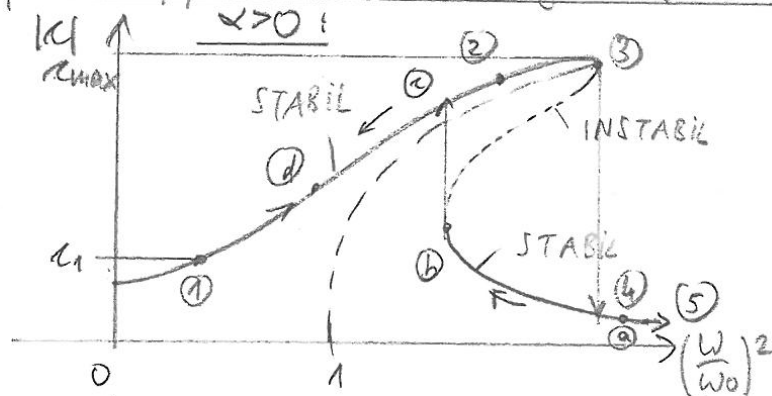
Fazit: Bei bestimmten Antriebsfrequenzen ω^* sind DREI Amplituden möglich.
Auch bei Resonanz $\omega = \omega_0$ bleibt die Amplitude endlich! $C_{\text{res}} < \infty$!

DUFFING'scher Schwinger (6)



DUFFING'scher Schwinger (7)

Gedämpfte nichtlineare erzwungene Schwingung: $\delta > 0$



Freiungserlöschung:

Amplituden $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow$ Sprung =
 große Amplitudenabnahme auf
 4, dann weiteres Sinken 5 usw.

Freiquerzunehmung: $5 \rightarrow 4$:

Amplitude wächst, „Springkräfte“

Erlösung von $5 \rightarrow 4$, dann plötzliche bis 3 usw. bis $W=0$.

Stabilitätsgrenzen dort, wo $dW/dk=0$!

„Springphänomene“

in nichtlinearen Schwingungssystemen
 bei erzwungenen Schwingungen!

Subharmonische Systemschwingungen in nichtlinearen Schwingern:

hier: ungedämpft $\delta=0$: $\ddot{x} + \beta x + \alpha x^3 = f \cdot \sin \omega t$

Ansatz: $x = \underbrace{C' \sin\left(\frac{\omega}{3} t\right)}_{\text{„sub“ harmonische Schwingung mit } \frac{\omega}{3} \text{ tritt auf!}} + C \cdot \sin \omega t$

$$\dot{x}' = -\frac{1}{9} C' \sin \frac{\omega}{3} t \cdot \omega^2 - C \omega^2 \sin \omega t,$$

$$(C' \sin \frac{\omega}{3} t + C \sin \omega t)^3 = C'^3 \sin^3 \frac{\omega}{3} t + 3C'^2 C \sin^2 \frac{\omega}{3} t \cdot \sin \omega t + 3C' C^2 \sin \frac{\omega}{3} t \sin^2 \omega t + C^3 \sin^3 \omega t =$$

$$= C'^3 \frac{1}{4} (3 \sin \frac{\omega}{3} t - \sin \omega t) + 3C'^2 C \cdot \frac{1}{2} (\sin \omega t - \frac{1}{2} \sin \frac{5\omega}{3} t - \frac{1}{2} \sin \frac{\omega}{3} t) +$$

$$+ 3C' C^2 \cdot \frac{1}{2} (\sin \frac{\omega}{3} t - \frac{1}{2} \sin \frac{7\omega}{3} t + \frac{1}{2} \sin \frac{5\omega}{3} t) + C^3 \frac{1}{4} (3 \sin \omega t - \sin 3\omega t)$$

Terme bei $\sin \frac{\omega}{3} t$: $-\frac{1}{9} C' \omega^2 + \beta C' + \alpha [C'^3 \frac{3}{4} - 3C'^2 C \frac{1}{4} + 3C' C^2 \frac{1}{2}] \stackrel{!}{=} 0$ muss Null sein

Terme bei $\sin \omega t$: $-C \omega^2 + \beta C + \alpha [-C'^3 \frac{1}{4} + 3C'^2 C \frac{1}{2} + C^3 \frac{3}{4}] \stackrel{!}{=} f$

Die Terme bei $5\omega/3, 7\omega/3, 3\omega$ werden näherungsweise nicht weiter betrachtet!

$$(\beta - \frac{\omega^2}{9}) \cdot C' + \frac{3}{4} \alpha (C'^3 - C'^2 C + 2C' C^2) = 0 \quad (1) \rightarrow \text{für } C' \neq 0: | \times \frac{1}{C'}$$

$$(\beta - \omega^2) \cdot C + \frac{\alpha}{4} (-C'^3 + 6C'^2 C + 3C^3) = f \quad (2)$$

$$\beta - \frac{\omega^2}{9} + \frac{3}{4} \alpha (C'^2 - C' C + 2C^2) = 0 \quad (1)' \rightarrow \omega^2 = 9\beta + \frac{27}{4} \alpha (C'^2 - C' C + 2C^2) \rightarrow (2)$$

$$(\beta - 9\beta - \frac{27}{4} \alpha (C'^2 - C' C + 2C^2)) \cdot C + \frac{\alpha}{4} (-C'^3 + 6C'^2 C + 3C^3) = f$$

$$\underline{\underline{-8\beta C = f - \frac{\alpha}{4} (-C'^3 - 21C'^2 C + 27C' C^2 - 51C^3)}}$$



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

DUFFING'scher
Schwinger (8)



DUFFING'scher Schwinger (9)



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Iteration gelöst: 1. Schritt: $\alpha=0$: $\omega_{(1)}^2 = 9/\beta = 3\omega_0^2 = \omega_{(1)} = 3\omega_0$, $C_{(1)} = -\frac{\kappa}{8\beta} = -\frac{\kappa}{8\omega_0^2}$
für $\alpha < 1$ 2. Schritt: $\omega_{(2)}^2 = 9/\beta + \frac{27}{4}\alpha(C_{(1)}^2 - C_{(1)}'C_{(1)} + 2C_{(1)}^2)$

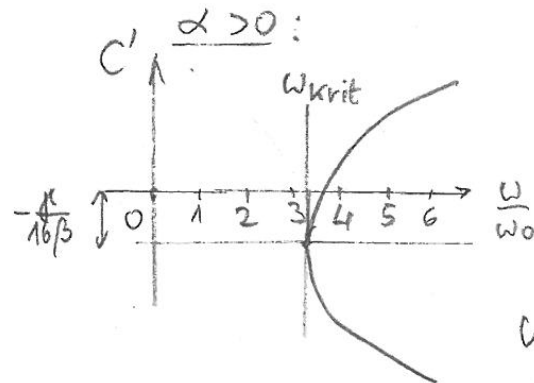
$$C_{(2)} = -\frac{1}{8\beta} \left[\kappa - \frac{\alpha}{4} (-C_{(1)}^3 - 21C_{(1)}^2C_{(1)}' + 27C_{(1)}'C_{(1)}^2 - 51C_{(1)}^3) \right]$$

Abnahme der Iteration nach dem 2. Schritt:

$$(*) \rightarrow \omega_{(2)}^2 = 9\omega_0^2 + \frac{27}{4}\alpha \cdot (C_{(1)}^2 + C_{(1)}' \frac{\kappa}{8\omega_0^2} + 2(\frac{\kappa}{8\omega_0^2})^2)$$

$$(**) \rightarrow C_{(2)} = -\frac{1}{8\omega_0^2} \left[\kappa - \frac{\alpha}{4} (-C_{(1)}^3 + 21C_{(1)}^2 \frac{\kappa}{8\omega_0^2} + 27 \cdot C_{(1)}' \frac{\kappa^2}{(8\omega_0^2)^2} + 51 \frac{\kappa^3}{(8\omega_0^2)^3}) \right]$$

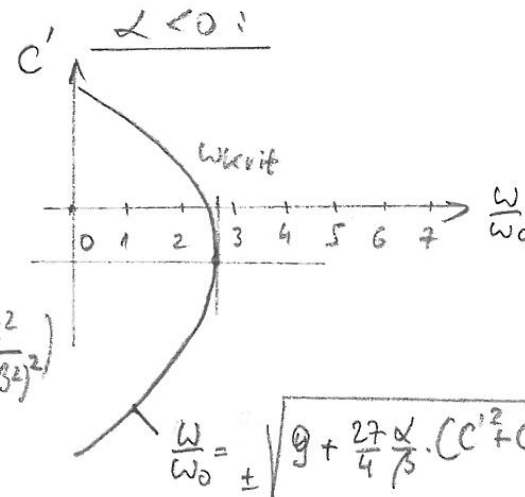
(*) : $\omega^2 = f(C')$ für $\alpha > 0$: Ellipse in der $\omega - C'$ -Ebene } zu einer gewählten Amplitude C' der
für $\alpha < 0$: Hyperbel — " — " — } sinusförmigen Schwingung liefert (*) die zugehörige Eigenfrequenz ω .
Aus (**) folgt wegen $C = g(C')$ die Amplitude der Schwingung ω .



$$\omega_{krit} = 9\omega_0^2 + \alpha \frac{27}{4} \frac{\kappa^2}{(8\beta)^2}$$

$$C' = -\kappa/16\beta$$

ω_{krit}



$$\frac{\omega}{\omega_0} = \pm \sqrt{9 + \frac{27}{4} \frac{\alpha}{\beta} \cdot (C_{(1)}^2 + C_{(1)}' \frac{\kappa}{8\beta} + 2 \frac{\kappa^2}{(8\beta)^2})}$$



DUFFING'scher Schwinger (10)



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Subharmonische Schwingungen mit $\omega/3$ werden beim DUFFING-Schwinger immer angeregt ($C' \neq 0$), wenn bei $\alpha > 0$ die Erregungsfrequenz $\omega > \omega_{\text{krit}}$ ist, bzw. bei $\alpha < 0$, wenn $\omega < \omega_{\text{krit}}$ ist. Bei $C' = 0$ ist gemäß (**): $C = \frac{k}{8\beta} \cdot \left(\frac{51}{32} \alpha \frac{k^2}{8^2 \beta^3} - 1 \right)$.
Bei dieser Amplitude tritt auch die „Kreuzverknüpfung“ der Schwingung ω zu ω und $\omega/3$ auf.



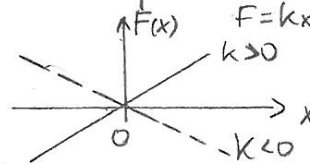
DUFFING'scher Schwinger (11)



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Negative Federkonstante: $\beta < 0$ (wenn magnetische Kräfte wirksam sind)

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + \beta x + \alpha x^3 = \begin{cases} 0 \\ f(t) \end{cases} \quad a)$$



$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\beta = k/m$$

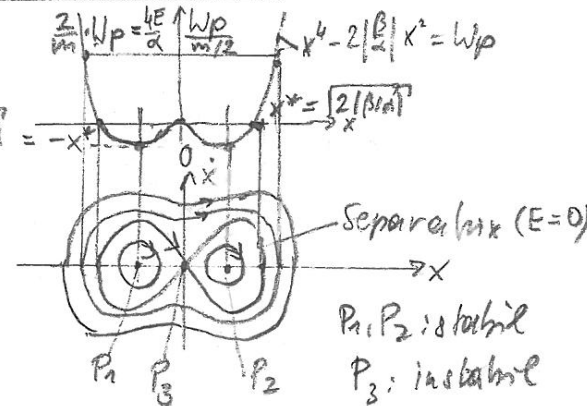
a) freie Schwingungen:

ungedämpft: $\delta = 0$: $x^4 \frac{\alpha}{2} + \beta x^2 - 2E = 0$, $x^2 = \xi$: $\xi^2 + \frac{2\beta}{\alpha}\xi - \frac{4E}{\alpha} = 0$: $\xi_{1,2} = -\frac{\beta}{\alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + \frac{4E}{\alpha}}$

$\beta > 0, \alpha > 0$: $x^* = \pm \sqrt{-\frac{\beta}{\alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + \frac{4E}{\alpha}}} \rightarrow 0$ $x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{\beta}{\alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + \frac{4E}{\alpha}}}$

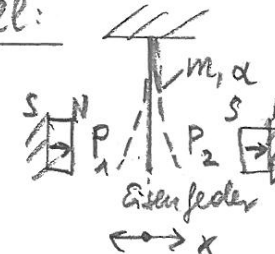
$\beta < 0, \alpha > 0$: $x^* = \pm \sqrt{-\frac{\beta}{\alpha} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 + \frac{4E}{\alpha}}} \rightarrow \pm \sqrt{2|\beta/\alpha|}$ für $E \rightarrow 0$
 $\xrightarrow{E \rightarrow 0} \pm \sqrt{2|\beta/\alpha|}$

Zwei Gleichgewichtspunkte stabil bei negativer Feder (P_1, P_2), bei positiver Feder nur einer ($P_3 = 0$)!

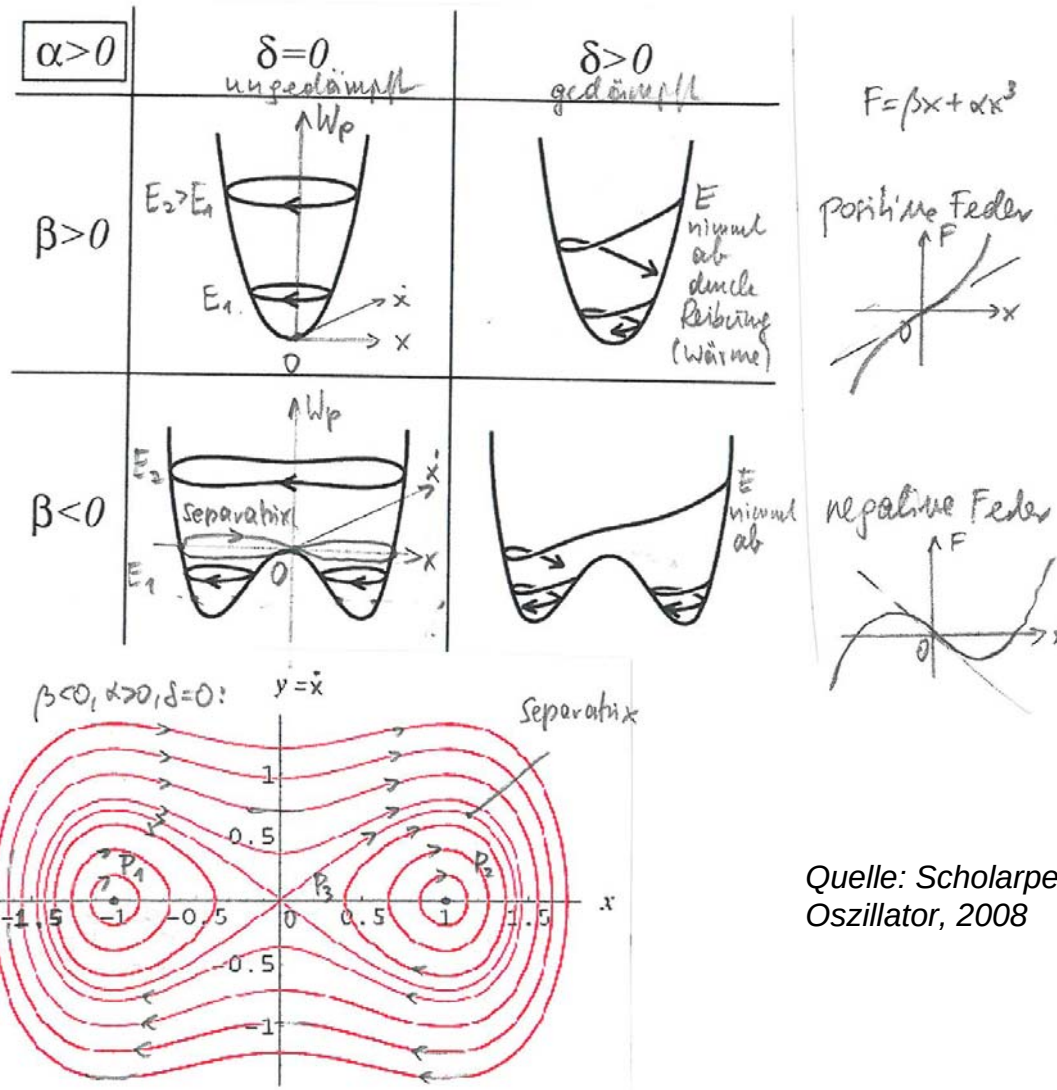


gedämpft: $\delta > 0$: Die Phasentrajektorien
 kollabieren in die Gleichgewichtspunkte
 hinein!

Beispiel:



DUFFING'scher Schwinger (12)



Quelle: Scholarpedia: Duffing-Oszillator, 2008

DUFFING'scher Schwinger (13)



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

b) Erzwungene Schwingungen mit harmonischer Anregung bei negativer Feder:

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + \beta x + \alpha x^3 = \mu \cdot \cos \omega t \quad \psi = \omega t; \text{ mod } (2\pi) \quad \psi(0) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ -\delta \dot{x} - \beta x - \alpha x^3 + \mu \cdot \cos \psi \\ \omega \end{pmatrix} \quad (\text{Quelle: Scholarpedia})$$

UEDA rechnet bereits 1961 diese erzwungene Schwingung für

$$\alpha = 1; \beta = 0; \delta = 0,05; \mu = 7,5; \omega = 1 \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

und stellt chaotische Schwingungen fest, published this also
ent 1979: Journal of Statistical physics, Vol. 20, 181-196

Auch bei $\beta < 0$ tritt Chaotisches Schwingungsverhalten auf!

$$(\text{KANAMARU; 2007}) \quad \alpha = 1; \beta = -1; \delta = 0,2; \mu = 0,3, \omega = 1$$

$$\mu \cdot \cos(\omega t + \Phi), \quad \Phi = 0$$

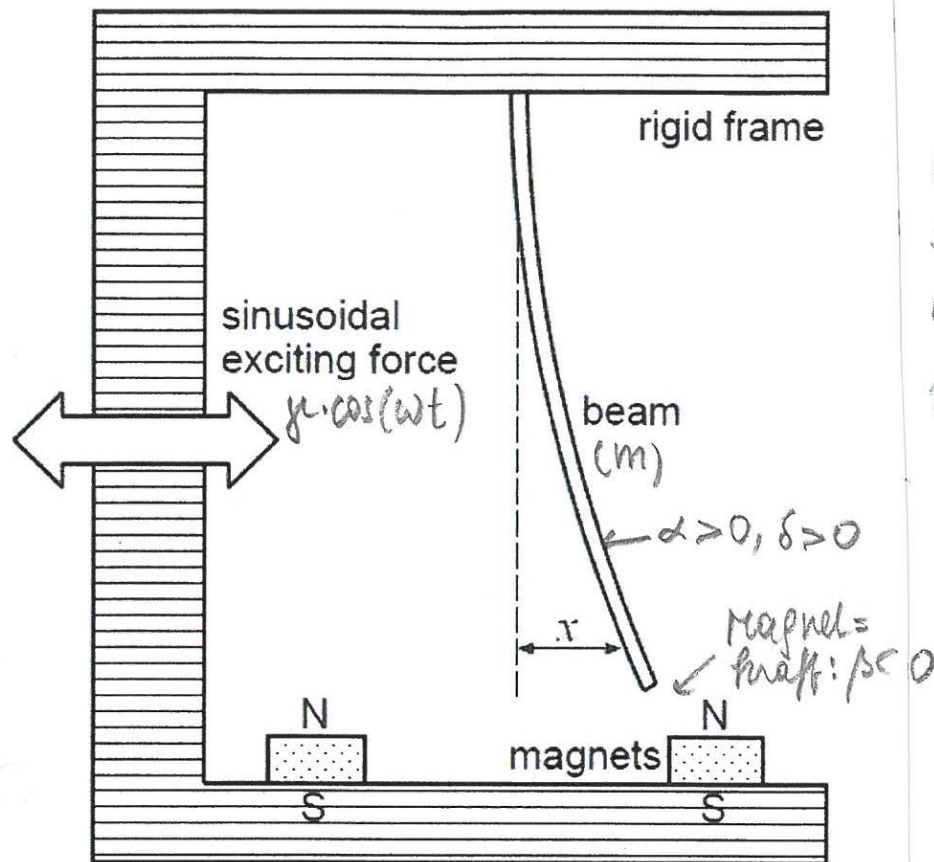
Quelle: Scholarpedia: Duffing-
Oszillator, 2008



DUFFING'scher Schwinger (14)



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

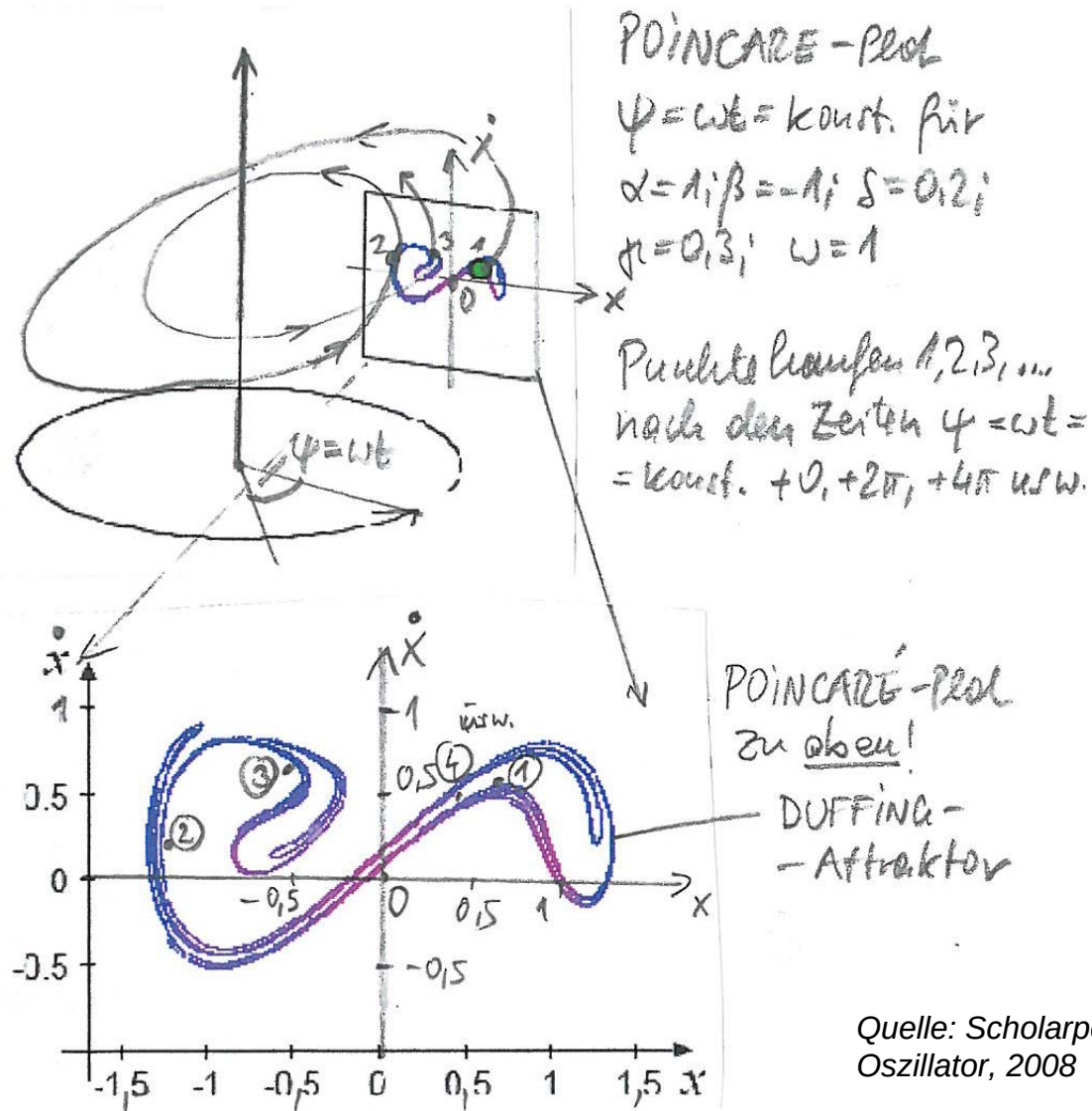


Elektromechanisches
Modell für die
Erregung chaotischer
Schwingungen mit
dem DUFFING-Schwinger
für $\beta < 0, \alpha > 0, \delta > 0$

Quelle: Scholarpedia: Duffing-
Oszillator, 2008



Chaotische Bewegungen des DUFFING'schen Schwingers (1)



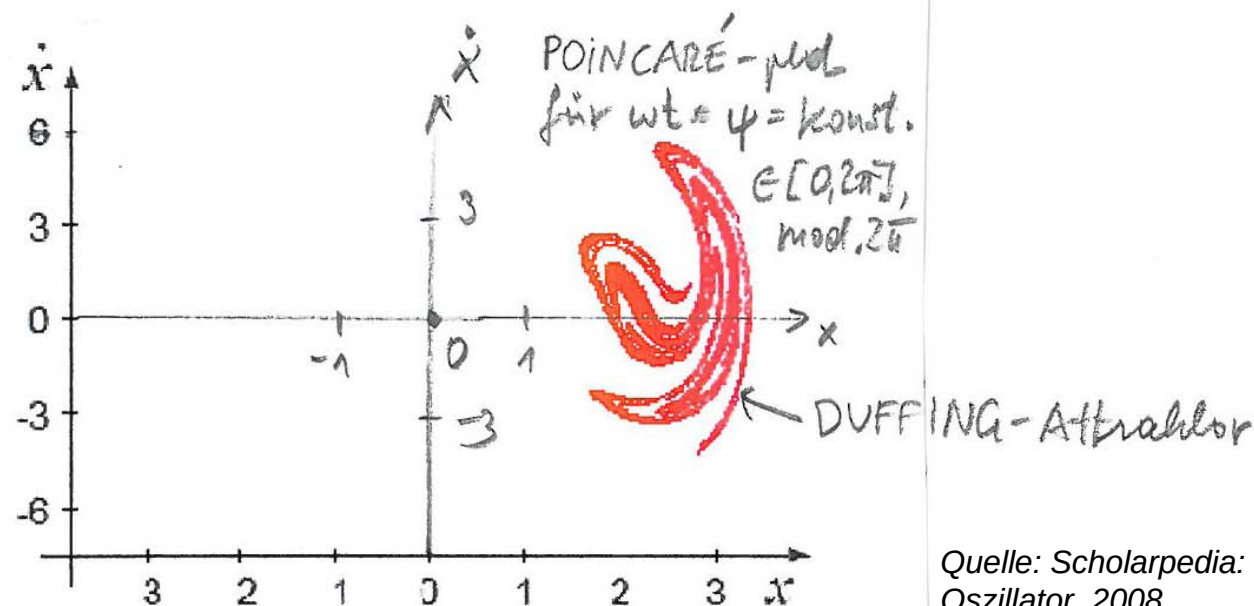
Quelle: Scholarpedia: Duffing-Oszillator, 2008

Chaotische Bewegungen des DUFFING'schen Schwingers (2)



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

DUFFING-Attraktor nach VEDA für $\alpha=1; \beta=0; \delta=0.05; \mu=7.5; \omega=1$
im POINCARÉ-Schnitt für $\omega t = \text{konst.}, \text{mod}(2\pi)$



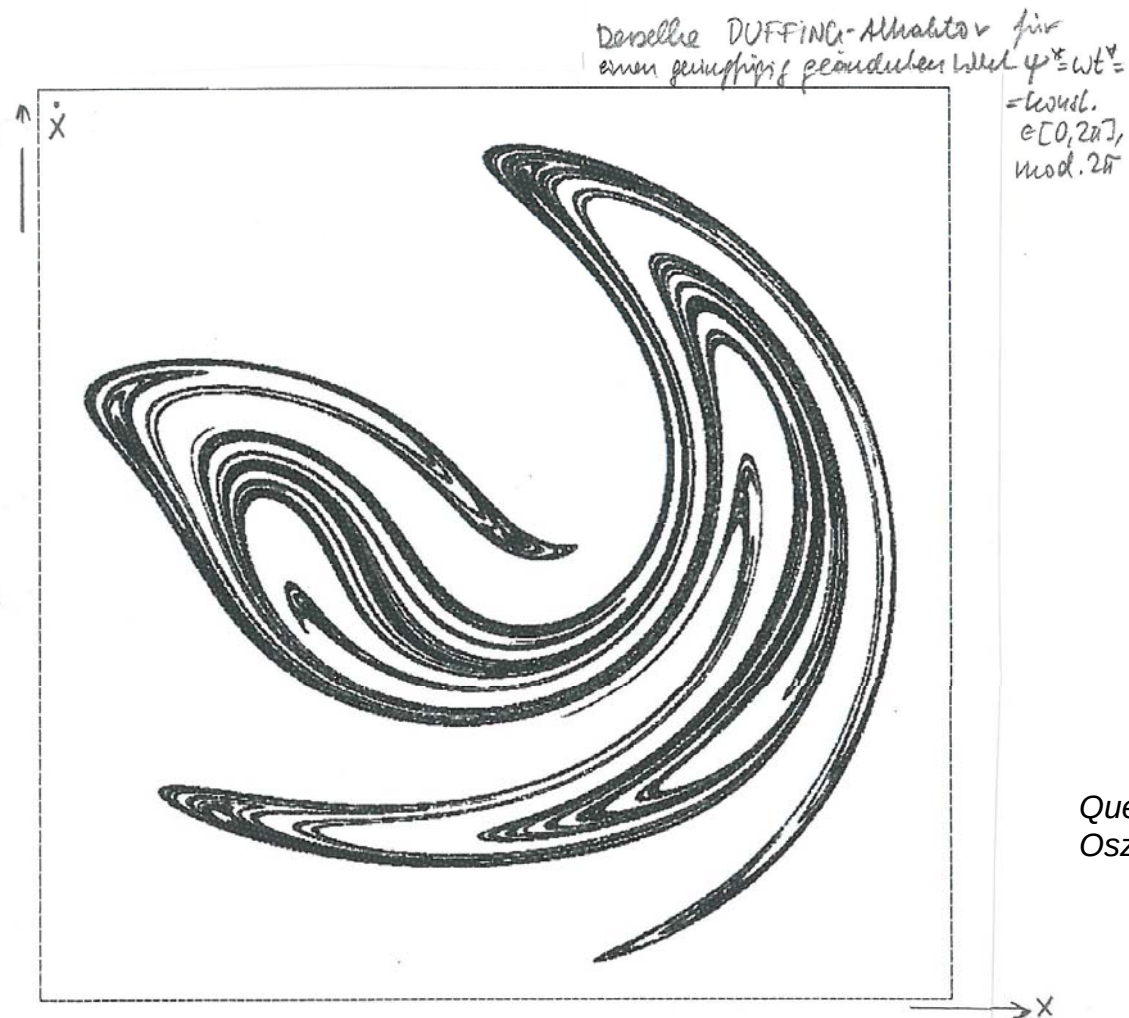
Quelle: Scholarpedia: Duffing-Oszillator, 2008



Chaotische Bewegungen des DUFFING'schen Schwingers (3)



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



Quelle: Scholarpedia: Duffing-
Oszillator, 2008

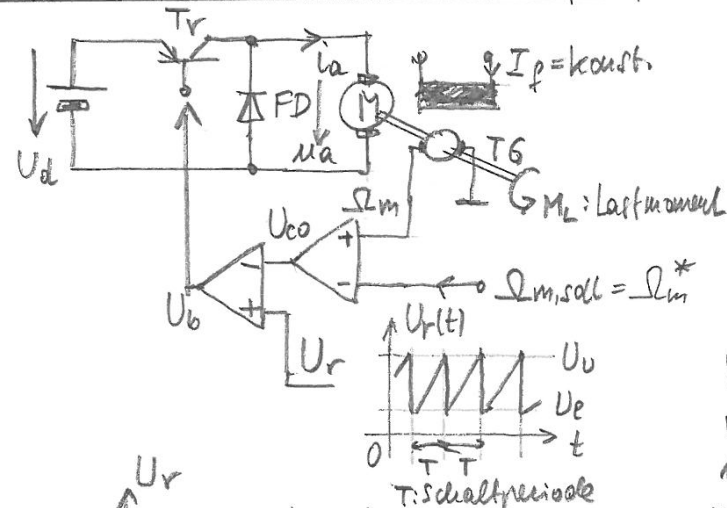


Chaotisches Verhalten eines geregelten DC-Antriebs (1)



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Chaotisches Verhalten eines geregelten Gleichstromantriebs



Tr : Schalttransistor als Chopper

FD : Freilaufdiode

M : Fremdexcitierter Gleichstrommotor
(Feld ist konstant: $\Phi = \text{konst.}$)

TG : Tachogenerator misst die Ist-
Drehzahl $\Omega_m = \Omega_m^*$

Wenn $\Omega_m - \Omega_{m,soll} > 0$, dann
muss Transistor Transistor
werden; Wenn $\Omega_m - \Omega_{m,soll} < 0$, dann

Tr ein. U_d : Batteriespannung

Im ausgeglichenen Zustand:

$$\bar{U}_a = R_a \bar{I}_a + k \bar{\Omega}_m \Phi, \quad \bar{I}_a = \bar{I}_a$$

$$\bar{\Omega}_m = \bar{\Omega}_{m,soll}, \quad R_a, L_a: \text{Ankerwiderstand \& Induktivität}$$

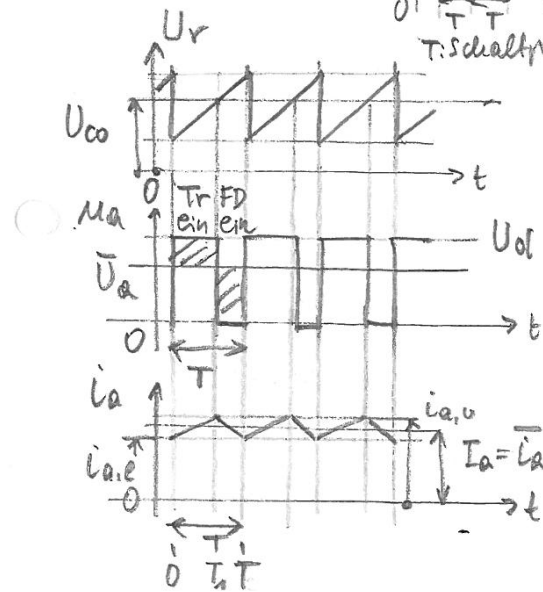
$$k \Phi: \text{Motorkonstante} \times \text{Fluss pro Pol}$$

$$\text{Bei } R_a \bar{I}_a \ll k \bar{\Omega}_m \Phi:$$

$$0 \leq t \leq T_1: U_d - k \bar{\Omega}_m \Phi = L_a \frac{dI_a}{dt}$$

$$T_1 \leq t \leq T: 0 - k \bar{\Omega}_m \Phi = L_a \frac{dI_a}{dt}$$

$$\text{und } I_a(0) = I_a(T) = I_{a,e}$$



Chaotisches Verhalten eines geregelten DC-Antriebs (2)



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

$$\dot{i}_{a,l} + \frac{U_d - k \Omega_m \Phi}{L_a} \cdot t = i_a; 0 \leq t \leq T_1$$

$$-\frac{k \Omega_m \Phi}{L_a} \cdot (T_1 - t) + i_{a,u} = \dot{i}_a; T_1 \leq t \leq T; \quad i_{a,u} = i_{a,l} + \frac{U_d - k \Omega_m \Phi}{L_a} \cdot T_1 \quad (1)$$

Aus (1) und (2) folgt: $\frac{T_1}{T} = \frac{k \Omega_m \Phi}{U_d}$

$$i_{a,l} = i_{a,u} + \frac{k \Omega_m \Phi}{L_a} \cdot (T_1 - T) \quad (2)$$

$0 \leq T_1 \leq T: 0 \leq \Omega_m \leq \Omega_{m,max}; \Omega_{m,max} = \frac{U_d}{k \Phi} = \Omega_{m0}$ (Leerlaufdrehzahl, da $R_a = 0$)

Dynamische Gleichungen:

$U_{co}(t) = g \cdot (\Omega_m(t) - \Omega_m^*)$ g : Verstärkung

$U_r(t) = U_e + (U_v - U_e) \cdot t/T, 0 \leq t \leq T$

$U_{co} > U_r$: Tr aus, FD ein; [1]

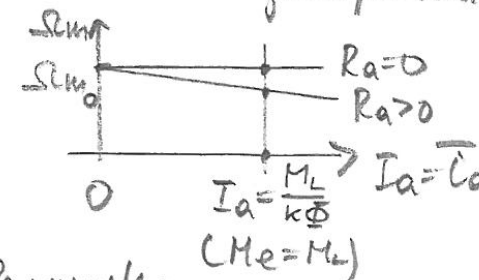
$U_{co} < U_r$: Tr ein, FD aus; [2]

Mechanische Parameter:

J : Gesamtkippsmoment

D : Dämpfung (viskose Reibung)

M_L : Lastmoment



Chaotisches Verhalten eines geregelten DC-Antriebs (3)



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

$$\left. \begin{aligned} J \frac{d\Omega_m}{dt} &= M_e - M_L - M_D = k\Phi i_a(t) - M_L - D \cdot \Omega_m \\ J \dot{\Omega}_m + D \Omega_m - k\Phi i_a &= -M_L \end{aligned} \right\} (1)$$

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + k\Omega_m \Phi = \begin{cases} 0 & [1] \\ U_d & [2] \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Zustand [1]: } \begin{cases} \dot{\Omega}_m = \frac{k\Phi}{J} i_a - \frac{D}{J} \Omega_m - \frac{M_L}{J} \\ \dot{i}_a = -\frac{R_a}{L_a} i_a - \frac{k\Phi}{L_a} \Omega_m \end{cases} \Rightarrow \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \Omega_m \\ i_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{D}{J} & \frac{k\Phi}{J} \\ -\frac{k\Phi}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_m \\ i_a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{M_L}{J} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zustand [2]:

$$\text{Zustandsvektor: } \vec{x} = \begin{pmatrix} \Omega_m(t) \\ i_a(t) \end{pmatrix}, \text{ Systemmatrix } \underline{A}, \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} -\frac{D}{J} & \frac{k\Phi}{J} \\ -\frac{k\Phi}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{pmatrix}$$

$$\text{Lastvektor: } \vec{E}_k \quad k=1,2, \quad \vec{E}_1 = \begin{pmatrix} -M_L/J \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ U_d/L_a \end{pmatrix}$$

Zustandsgleichung:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \underline{A} \cdot \vec{x}(t) + \vec{E}_k \quad k=1,2$$



Chaotisches Verhalten eines geregelten DC-Antriebs (4)



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Alternativ: Differentialgleichung 2. Ordnung:

$$\ddot{\Omega}_m + \left(\frac{R_a}{L_a} + \frac{D}{J}\right) \cdot \dot{\Omega}_m + \left(\frac{R_a \cdot D}{L_a J} + \frac{(k\Phi)^2}{L_a J}\right) = \frac{k\Phi}{J} \cdot \frac{U_d}{L_a} - \frac{M_L}{J} \left(\frac{R_a}{L_a}\right) - \frac{1}{J} \frac{dM_L}{dt}$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{R_a}{L_a} + \frac{D}{J}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{R_a}{L_a} + \frac{D}{J}\right)^2 - \left(\frac{D \cdot R_a}{J \cdot L_a} + \frac{(k\Phi)^2}{J \cdot L_a}\right)} = -\frac{1}{2} \left(\frac{R_a}{L_a} + \frac{D}{J}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{R_a}{L_a} - \frac{D}{J}\right)^2 - \frac{(k\Phi)^2}{J \cdot L_a}}$$

Δ

a) $\Delta = 0$: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\alpha$, $\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{R_a}{L_a} + \frac{D}{J}\right)$

b) $\Delta > 0$: $\lambda_1 = -\alpha + \sqrt{\Delta}$, $\lambda_2 = -\alpha - \sqrt{\Delta}$, $\sqrt{\Delta} < \alpha$, $T_1 = -\frac{1}{\lambda_1}$, $T_2 = -\frac{1}{\lambda_2}$

c) $\Delta < 0$: $\lambda_1 = -\alpha + j\sqrt{\Delta}$, $\lambda_2 = -\alpha - j\sqrt{\Delta}$: System ist schwingungsfähig

Lösung des DGL-Systems (linear, 2. Ordnung, konst. Koeffizienten): für

$$\vec{X}(t) = -A^{-1} \cdot \vec{E}_k + B(t-t_0) \cdot [\vec{X}(t_0) + A^{-1} \cdot \vec{E}_k], k=1,2$$

Aufangsbedingung bei $t=t_0$: $\vec{X}(t_0)$

$B(t)$: Übergangsmatrix

a) $\Delta = 0$: $B(t) = e^{-\alpha t} \cdot [E - t \cdot (2\alpha E - A)]$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Einheitsmatrix

b) $\Delta > 0$: $B(t) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot [e^{\lambda_1 t} \cdot (\lambda_2 E - A) - e^{\lambda_2 t} \cdot (\lambda_1 E - A)]$

c) $\Delta < 0$: $B(t) = e^{-\alpha t} \cdot [\cos(\sqrt{\Delta} t) E + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \cdot (\alpha E + A) \cdot \sin(\sqrt{\Delta} t)]$



Chaotisches Verhalten eines geregelten DC-Antriebs (5)



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Innerehalb $0 \leq t \leq T$ existieren zwei Fälle: - kein Schaltprinzip zwischen

(A): Tr bleibt offen oder geschlossen

(A) $U_{co}(t)$ und $U_r(t)$

(B): Tr schließt oder öffnet m -Mal bei
 m Schaltprinzipien

- mindestens ein Schaltprinzip

(B) zwischen U_{co} und U_r

Fall (A): $\vec{x}_{n+1} = -A^{-1} \vec{E}_k + B(T) \cdot (\vec{x}_n + A^{-1} \vec{E}_k) \quad k=1,2$

$\vec{x}_n = \vec{x}(t_n), \vec{x}_{n+1} = \vec{x}(t_n + T) \quad t_n = nT$

Fall (B): $t^* = nT + \delta_i T, \quad 0 = \delta_0 < \delta_1 < \dots < \delta_m < 1, \quad i=1, \dots, m$

t^* : Schaltzeitpunkte innerhalb T : „multipler“ Schalten

z.B.: $m=1$: (i) Sei $U_{co}(t_n) > U_e$: Zustand [1] in $T \leq t \leq nT + \delta_1 T$
aber $< U_r$

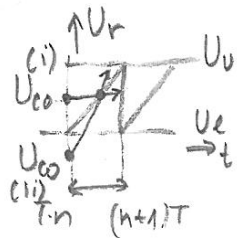
dann $U_{co} = U_r$ bei: $nT + \delta_1 T$ Zustand [2]: $nT + \delta_1 T \leq t \leq (n+1)T$

Berechnung von δ_1 : $\Omega_m^x + \frac{U_e + (U_r - U_e)\delta_1}{g} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot [-A^{-1} \vec{E}_1 + B(\delta_1 T)(\vec{x}_n + A^{-1} \vec{E}_1)] = 0$

$\Rightarrow \vec{x}(nT + \delta_1 T) = -A^{-1} \vec{E}_1 + B(\delta_1 T) \cdot (\vec{x}_n + A^{-1} \vec{E}_1)$, weil im Zustand [1], und

$\vec{x}_{n+1} = -A^{-1} \vec{E}_2 + B(\underbrace{T - \delta_1 T}_{\hat{= t - t_0}}) \cdot (\underbrace{\vec{x}(nT + \delta_1 T)}_{\hat{= t_0}} + A^{-1} \vec{E}_2)$, weil im Zustand [2]





(ii) $U_{co}(n) < U_e$: Zustand [2], $nT \leq t < nT + \delta_n T$,

Zustand [1]: $nT + \delta_n T \leq t < (n+1)T$

Berechnung von δ_n : $\Omega_{in}^* + \frac{U_e + (U_o - U_e) \cdot \delta_n}{T} - (1) \cdot [-A^{-1} \vec{E}_2 + B(\delta_n T)(\vec{x}_n + A^{-1} \vec{E}_2)] = 0$

$\Rightarrow \vec{x}(nT + \delta_n T) = -A^{-1} \vec{E}_2 + B(\delta_n T) \cdot (\vec{x}_n + A^{-1} \vec{E}_2)$, weil im Zustand [2], und

$\vec{x}_{n+1} = -A^{-1} \vec{E}_1 + B(T - \delta_n T) \cdot (\vec{x}(nT + \delta_n T) + A^{-1} \vec{E}_1)$, weil im Zustand [1]
 $\hat{=} t - t_0 \quad \hat{=} t_0$

In ähnlicher Weise werden für $m > 1$ die Beziehungen für δ_i , $i=1, \dots, m$ und daraus $\vec{x}(nT + \delta_i T)$ und daraus

$\vec{x}_{n+1} = -A^{-1} \vec{E}_k + B(T - \delta_m T) \cdot (\vec{x}(nT + \delta_m T) + A^{-1} \vec{E}_k)$, $k=1,2$ abgeleitet.

Die Plots von $\vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}, \vec{x}_{n+2}$ sind POINCARÉ-Darstellungen von $\vec{x}(t) = (\Omega_m(t), i_a(t))$ für die Zeiten $nT, (n+1)T, (n+2)T$ usw.

• Periodische Schaltlösung: $m=1 \rightarrow$ stationäre Lösung für $\Omega_m(t), i_a(t)$

I: Für $m=1$ und stationäre Lösung müssen gelten: $U_e < U_{co} < U_o$ bei nT .

$\rightarrow \delta_n \in [0,1]$. Dann ist die Lösung $\Omega_m(t), i_a(t)$ periodisch mit T !
T-periodische Lösung

II: Für $m=1$ und stationäre Lösung, also $U_e < U_{co} < U_o$ bei nT , wiederholt sich $i_a(t), \Omega_m(t)$ erst nach $p \cdot T$ Perioden, wobei $U_{co} = U_r$ ist bei:

$nT + \delta_1 T, (n+1)T + \delta_2 T, \dots, (n+p)T + \delta_p T \Rightarrow pT$ -periodische Lösung

Chaotisches
Verhalten eines
geregelter DC-
Antriebs (6)



Chaotisches Verhalten eines geregelten DC-Antriebs (7)



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Beispiel: $U_e = 0V$, $U_0 = 2,2V$, $T = 4ms$, $g = 0,5; \dots; 4 V_s$

$U_d = 100V$, $R_a = 3,5\Omega$, $L_a = 36mH$, $k\Phi = 0,1324Vs$

$D = 564 \cdot 10^{-6} Nms$, $J = 9,71 \cdot 10^{-4} kgm^2$, $M_L = 0,39 Nm$, $\Omega_m^* = 100/s$

Kontrolle für stationäre Lösung ohne Schalten:

$$M_e - M_L - M_D = 0 \quad k\Phi I_a = M_L + D \cdot \Omega_m^*, I_a = \frac{0,39 + 564 \cdot 10^{-6} \cdot 100}{0,1324} = 3,37A$$

$$k\Phi \Omega_m + R_a I_a = U_a = 0,1324 \cdot 100 + 3,5 \cdot 3,37 = 25,04V \rightarrow s_a = 0,75$$

$$T_a = \frac{L_a}{R_a} = \frac{36 \cdot 10^{-3}}{3,5} = 10,28ms, T_a > T \quad (10,28 > 4)$$

$$\begin{aligned} 1) &: nT \leq t \leq 0,75T + nT \\ 2) &: nT + 0,75T \leq t \leq (n+1)T \end{aligned}$$

$$\lambda_{1,2} = -48,9 \pm \sqrt{48,9^2 - 557,87} = \begin{cases} -6,082/s \\ -91,717/s \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{R_a}{L_a} + \frac{D}{J} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{3,5}{36 \cdot 10^{-3}} + \frac{564 \cdot 10^{-6}}{9,71 \cdot 10^{-4}} \right) = 48,9 \frac{1}{s}$$

$$T_1 = 164,4ms, T_2 = 10,9ms$$

Nähe bei
der mech.
Zeitkonstanten

nähe bei der
ele. Zeitkonstanten T_a

$$\frac{D}{J} \cdot \frac{R_a}{L_a} + \frac{(k\Phi)^2}{J L_a} = \frac{0,589722}{56,39} + \frac{0,1324^2}{9,71 \cdot 10^{-4} \cdot 36 \cdot 10^{-3}} = 557,87 \frac{1}{s^2}$$

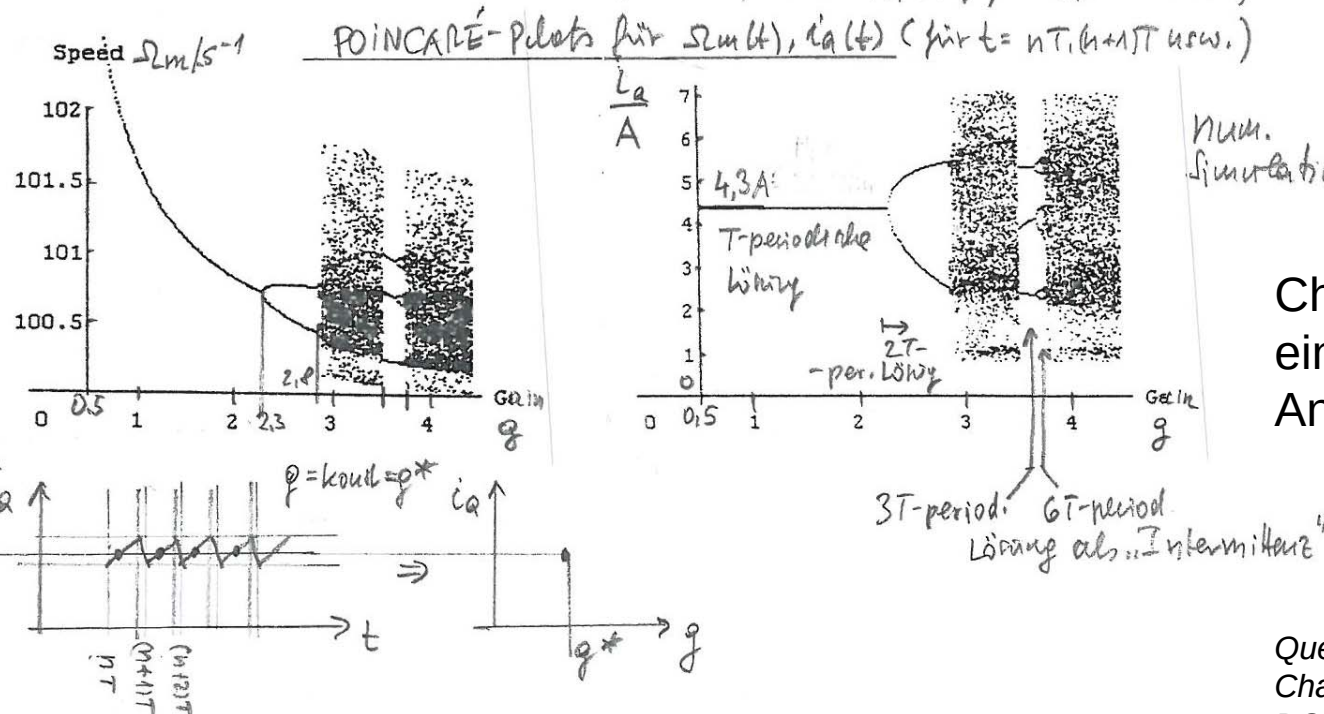
Die Drehzahländerung ist wegen

$T_1 = 164,4ms \gg T = 4ms$ träge im Vergleich zum Schaltzyklus.



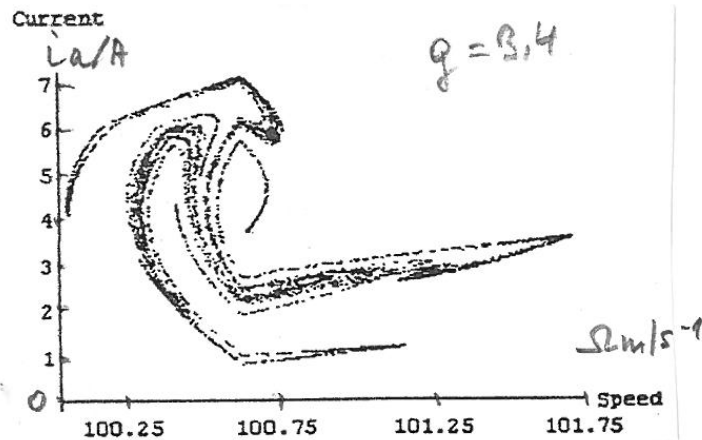


Numerische Lösung $\vec{x}(t) = (\Omega_m(t), i_a(t))$ als POINCARÉ-plot für $nT, (n+1)T$, usw.
für Ω_m und i_a in Abhängigkeit der veränderlichen Verhältnisse $0,5 \dots 4 = g$
(aus: CHAU, K.T.; CHEN, J. H. et al. / Chaotic behaviour in a simple DC Drive,
Conf. IEEE, PEDS'97, Singapore, p. 473 ÷ 479)



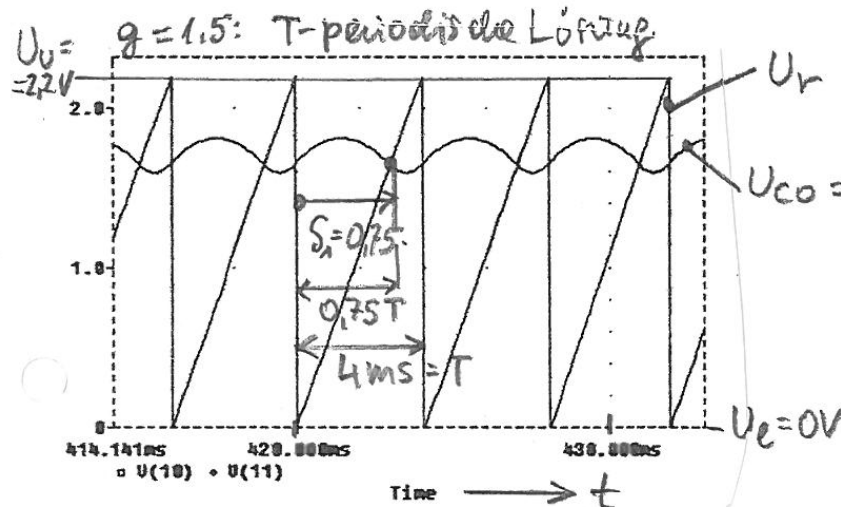
$0,5 \leq g \leq 2,3$: T-periodische Lösung für $\vec{x}(t) = (\Omega_m(t), i_a(t))$
 $2,3 \leq g \leq 2,8$: 2T-period. Lösung
 $2,8 \leq g \leq 2,85$: Periodenverdopplung bis hin zum chaotischen Verlauf
 $3,6 \leq g \leq 3,8$: Intermitenz mit 3T- und 6T-period. Lösungen

Chaotisches Verhalten eines geregelten DC-Antriebs (9)



Darstellung von $\vec{x}(t = nT, (n+1)T, (n+2)T, \dots) = (\Omega_m, i_a)$ als „seltener Attraktor“ für einen langen Zeitraum

Da i_a klein, daher groß ist, schwankt i_a sehr stark ($1A \leq i_a \leq 7A$, $\bar{i}_a = 3.5A$, analytisch: $3.37A$), aber Ω_m schwankt wenig ($100s^{-1} \leq \Omega_m \leq 101.75s^{-1}$)



periodische stationäre T-period.
Lösung (Rechnung)

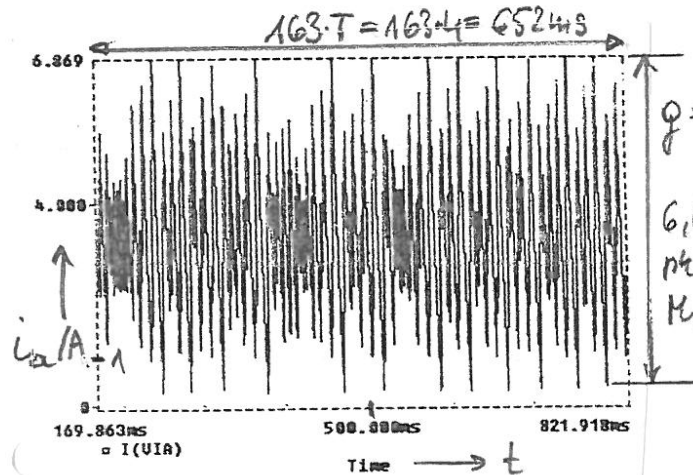
Quelle: Chau, K.T. et al.:
Chaotic behaviour in a simple
DC drive, IEEE-PEDS-Conf.
1997, Singapore, 473-479



Chaotisches Verhalten eines geregelten DC-Antriebs (10)



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

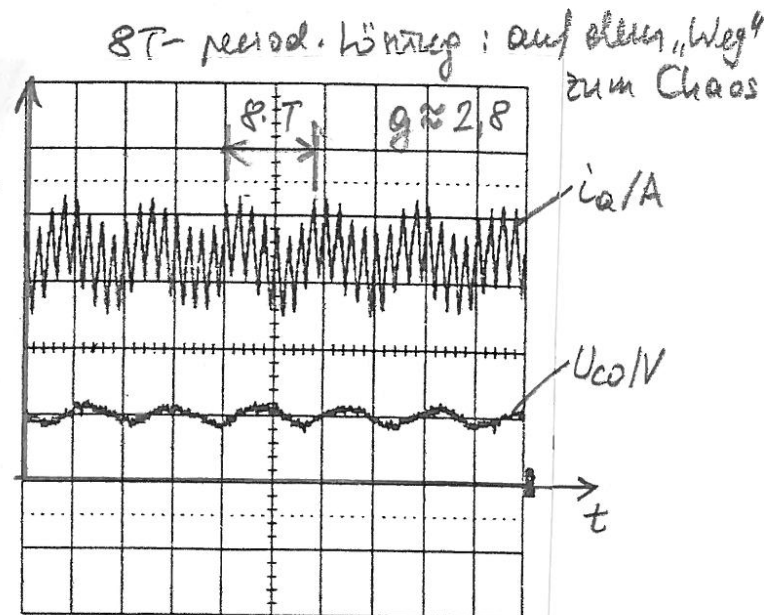
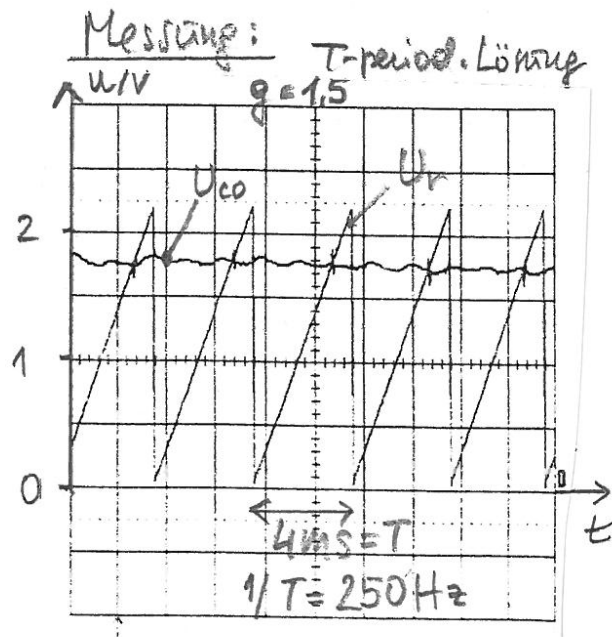


Rechnung:

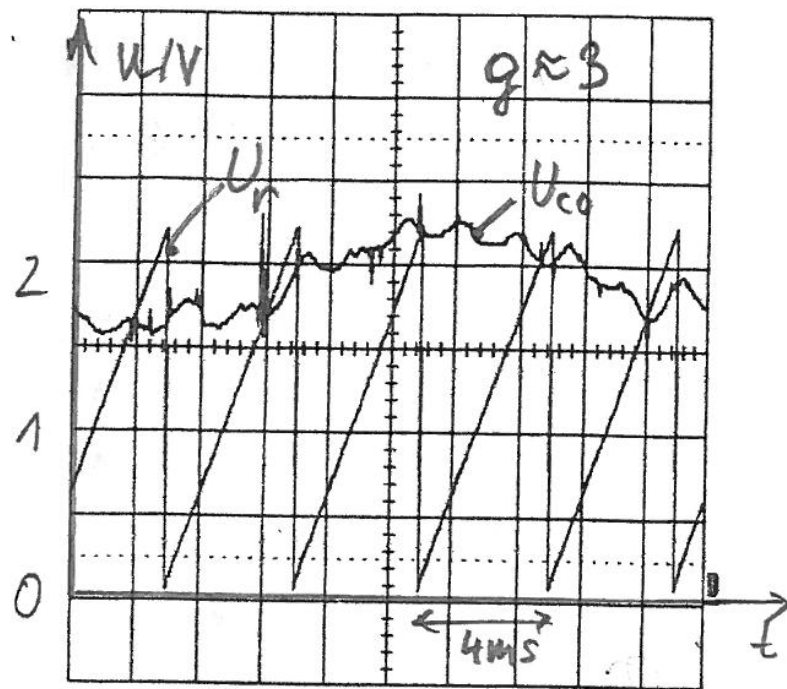
Chaotischer Stromverlauf $i_a(t)$

bei $q = 3,4$, passend zum obigen
seltsamen Attraktor

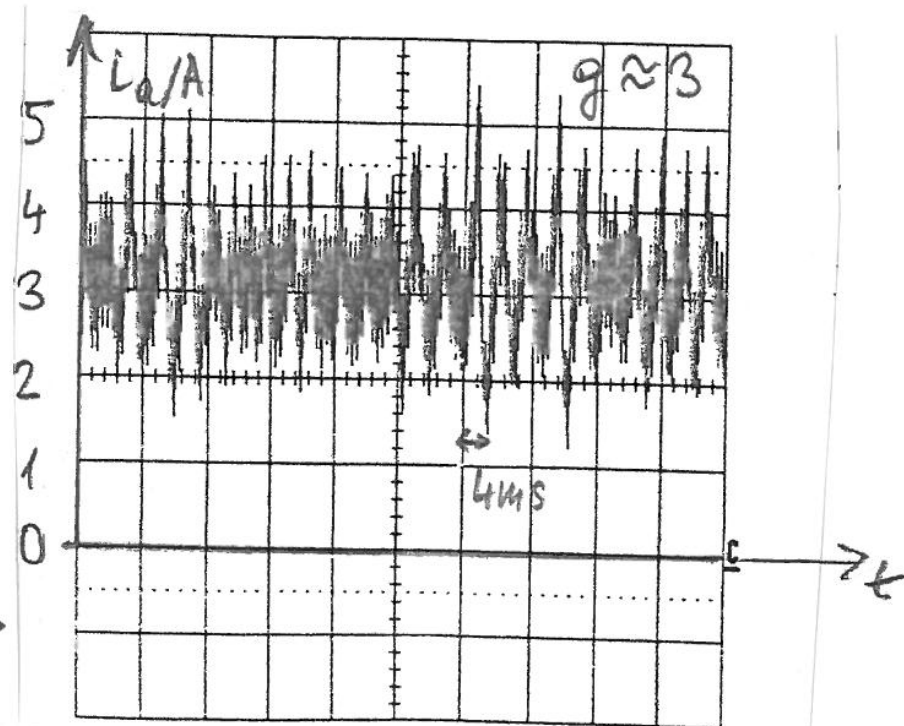
Quelle: Chau, K.T. et al.:
Chaotic behaviour in a simple
DC drive, IEEE-PEDS-Conf.
1997, Singapore, 473-479



Chaotisches Verhalten eines geregelten DC-Antriebs (11)



Chaotischer Verlauf von U_{co}
(Messung)



Chaotischer Verlauf des Ankerstroms
(Messung)

Quelle: Chau, K.T. et al.:
 Chaotic behaviour in a simple
 DC drive, IEEE-PEDS-Conf.
 1997, Singapore, 473-479

