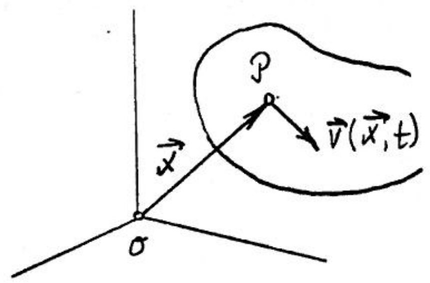
2. Felder und bewegte Körper

2.1. Grundgleichungen

2.1.1. Umformung der Maxwell-Gleichungen

Wir wählen zuerst als räumliches Bezugssystem ein festes Inertialsystem (Laborsystem), auf das alle Ortsangaben bezogen werden. Im betrachteten Raumbereich können sich bewegte, elektrisch leitfähige, elektrisch polarisierbare oder magnetisierbare Körper befinden.



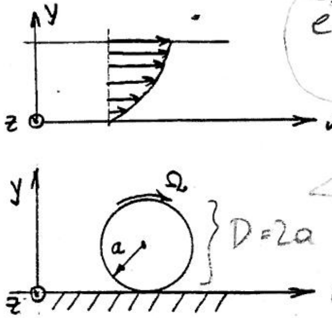
Sei $\mathcal{P}$ ein materieller Körperpunkt, der zur Zeit t mit einem Raumpunkt mit dem Ortsvektor $\vec{x}$ zusammenfällt und die Geschwindigkeit $\vec{v}$ besitzt. Für einen ganzen Körper liefert diese Zuordnung ein räumliches Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{x},t)$ (Raumpunkt mit Ortsvektor $\vec{x}$ muß zur Zeit t innerhalb des Körpers liegen)

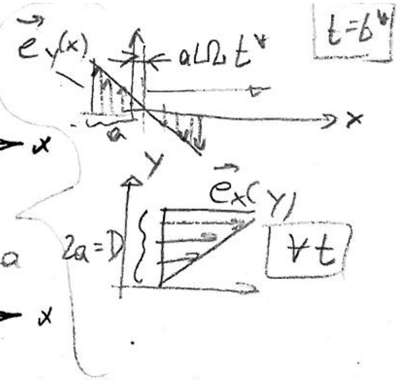
Beispiele:

a) stationäre eindimensionale Strömung einer Flüssigkeit, $\vec{v}(\vec{x},t) = v(y)\vec{e}_x$

b) ebenes Geschwindigkeitsfeld einer gleichförmig rollenden Walze

$\vec{v}(\vec{x},t) = \Omega y \vec{e}_x - \Omega(x - a\Omega t)\vec{e}_y$





In bezug auf das Laborsystem werden die Eigenschaften des elektromagnetischen Feldes durch die Gleichungen

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \vec{0}, \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0, \qquad (1),(2)$$

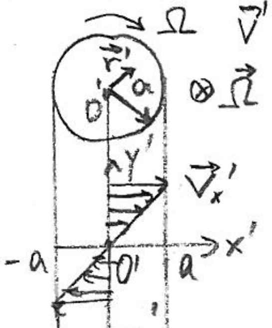
und die des Strom-Ladungsfeldes durch die Gleichungen

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \vec{S}, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \varrho \quad (\Rightarrow) \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{S} + \frac{\partial\varrho}{\partial t} = 0 \qquad (3),(4),(5)$$

erfaßt (auch bei Anwesenheit bewegter Medien!). Wir bringen den Gleichungssatz unter Verwendung des Geschwindigkeitsfelds $\vec{v}$ auf die Form

$$\left.\begin{aligned}
&\vec{\nabla}\times(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}) + \left[\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \vec{v}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{B} + \vec{\nabla}\times(\vec{B}\times\vec{v})\right] = \vec{0}, \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0,\\
&\vec{\nabla}\times(\vec{H}-\vec{v}\times\vec{D}) - \left[\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{v}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{D} + \vec{\nabla}\times(\vec{D}\times\vec{v})\right] = \vec{S} - \underbrace{\varrho\vec{v}}_{\text{Konvektionsstromdichte}}, \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \varrho,\\
&\vec{\nabla}\cdot(\vec{S}-\varrho\vec{v}) + \left[\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\varrho\vec{v})\right] = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Beispiel: Rollendes Rad, Winkelgeschwindigkeit Ω



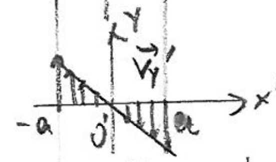
$\vec v'$ bezüglich Raddrehpunkt O': $\vec v' = \vec\Omega \times \vec r'$ ($\vec r = \vec x'$)

$\otimes\,\vec\Omega$ (Koordinatensystem (x', y', z'): $\vec r = x'\vec e_{x'} + y'\vec e_{y'}$, $\vec\Omega = \Omega(-\vec e_{z'})$)

$|\vec e_{x'}| = |\vec e_{y'}| = |\vec e_{z'}| = 1$

$$\vec v' = \begin{vmatrix} e_{x'} & e_{y'} & e_{z'} \\ 0 & 0 & -\Omega \\ x' & y' & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} y'\Omega \\ -x'\Omega \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} -a \le x' \le a \\ -a \le y' \le a \end{matrix}$$

$V_{x'max} = \Omega a$



$V_{y'max} = \Omega a$

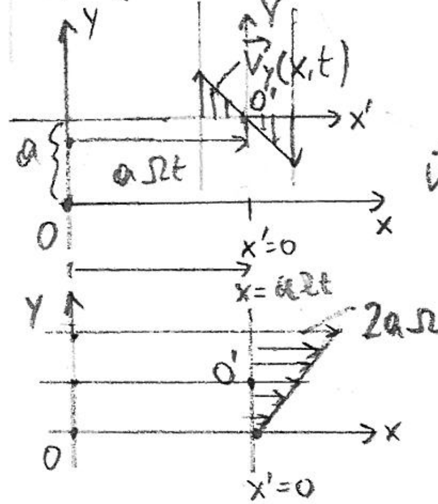
Bezüglich Laborsystem (x, y, z) mit Ursprung O gilt, dass die Geschwindigkeit des Raddrehpunkts O' ist: $\vec v_{O'} = \Omega a \cdot \vec e_x \Rightarrow x_{O'} = \Omega a t$, $x_0'(0) = 0$

Es ist $\vec e_{x'} = \vec e_x$, $\vec e_{y'} = \vec e_y$, $\vec e_{z'} = \vec e_z$; $y = y' + a$, $z = z'$; $x = a\Omega t + x'$

Die Geschwindigkeit der Radelemente bezüglich (x, y, z) sind:

$$\vec v = \vec v' + \vec v_{O'}: \quad \vec v = \begin{pmatrix} y\Omega \\ -(x - a\Omega t)\Omega \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\vec v(\vec x, t) = \Omega \cdot y \cdot \vec e_x - \Omega(x - a\Omega t) \cdot \vec e_y}$$

$$\vec v = \begin{pmatrix} y'\Omega + a\Omega \\ -x'\Omega \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y\Omega \\ -(x - a\Omega t)\Omega \\ 0 \end{pmatrix}$$



$V_{y\,max} = 2a\Omega$

Kontinuitätsgleichung: kein eigenes Grundgesetz, sondern direkte Folge der MAXWELL-Gleichungen:

$$\nabla\times\vec{H}-\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\vec{S}\;\Big|\;\nabla\cdot\quad\Rightarrow\quad\underbrace{\nabla\cdot(\nabla\times\vec{H})}_{=0}-\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\vec{D}=\nabla\cdot\vec{S}$$

$\vec{S}$: Stromdichte elektrisch

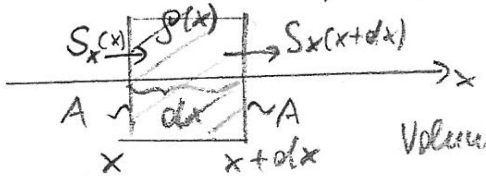
ρ: Ladungsdichte elektrisch

$$\nabla\cdot\vec{D}=\rho \qquad -\partial/\partial t\,\rho=\nabla\cdot\vec{S}$$

$$\nabla\cdot\vec{S}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0\;:\;\text{Kontinuitätsgleichung}$$

Anschaulich: $\nabla\cdot\vec{S}=\frac{\partial S_x}{\partial x}+\frac{\partial S_y}{\partial y}+\frac{\partial S_z}{\partial z}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$ z.B.: eindimensional

$$\frac{\partial S_x}{\partial x}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$



Volumen $dV=A\,dx$

Stromzufluss links:

$$I(x)=\int_A S_x(x)\cdot dA=S_x(x)A=I_{links}$$

Stromabfluss rechts:

$$I(x+dx)=\int_A S_x(x+dx)\cdot dA=S_x(x+dx)\cdot A=I_{rechts}$$

Ladungsanhäufung je Zeit dt: $dQ_{zu}-dQ_{ab}=dQ$

Ladungszufuhr links: $dQ_{zu}=I(x)\cdot dt$

($I=dQ/dt$!)

Ladungsabfuhr rechts: $dQ_{ab}=I(x+dx)\cdot dt$

$$dQ=[I(x)-I(x+dx)]\cdot dt=[S_x(x)-\underbrace{S_x(x+dx)}_{\approx S_x(x)+\frac{\partial S_x}{\partial x}\big|_x\cdot dx}]\cdot A\cdot dt=-\frac{\partial S_x}{\partial x}\Big|_x\cdot\underbrace{dx\cdot A}_{dV}\cdot dt$$

$$dQ=-dV\cdot dt\cdot\frac{\partial S_x}{\partial x}\Big|_x$$

Mit $dQ/dV=\rho$ folgt mit $\frac{dQ}{dV\,dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}\Rightarrow-\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{\partial S_x}{\partial x}$ als Ergebnis der Kontinuitätsgleichung!

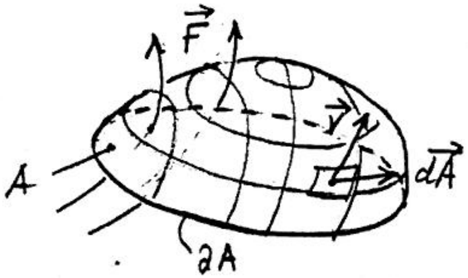
Makroskopisch: $I_{links}-I_{rechts}=(dQ_{zu}-dQ_{ab})/dt=dQ/dt\Rightarrow I_{links}-I_{rechts}=0\;\Big|\;\frac{d}{dt}=0$

$\Rightarrow$ 1. KIRCHHOFF sches Gesetz: Im Stationärzustand ($d/dt=0$) ist die Summe aller Ströme in einem Knoten Null!

Dies hat folgende Bedeutung. Die Kombinationen in den eckigen Klammern stellen die sogenannten mitgeschleppten Zeitableitungen für vektorielle Flußdichten $\vec{F}$ (steht für $\vec{D}$ oder $\vec{B}$) bzw. skalare Dichten ϱ dar,

$$\frac{d_c \vec{F}}{dt} := \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} + \vec{v}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{F} + \vec{\nabla}\times(\vec{F}\times\vec{v}), \qquad \frac{d_c \varrho}{dt} := \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\varrho\vec{v}) \,. \qquad (7)$$

Sei z.B. A irgendein (materiell gedachtes) Flächenstück mit dem Rand ∂A, das in einem Körper eingebettet ist und sich mit diesem bewegt und verformt. Jeder Flächenpunkt besitzt dann die Geschwindigkeit $\vec{v}$ des mit ihm zusammenfallenden Körperpunkts.



Bezeichnet

$$\phi = \int_A \vec{F}\cdot d\vec{A}$$

den Fluß des Vektorfelds $\vec{F}$ durch das Flächenstück A zum Zeitpunkt t, so läßt sich zeigen, daß seine zeitliche Änderungsrate wieder als Flächenintegral über A ausgedrückt werden kann:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \underline{\frac{d}{dt}\int_A \vec{F}\cdot\vec{dA}} = \underline{\int_A \frac{d_c\vec{F}}{dt}\cdot\vec{dA}} = \int_A \left[\frac{\partial\vec{F}}{\partial t} + \vec{v}\,(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}) + \vec{\nabla}\times(\vec{F}\times\vec{v})\right]\cdot\vec{dA} \tag{8}$$

$= \int_A \frac{\partial\vec{F}}{\partial t}\cdot\vec{dA}$ (zufolge zeitl. Änderung von $\vec{F}$ in festem Raumpunkt)

$+ \int_A \underbrace{(\vec{\nabla}\cdot\vec{F})}_{\text{Divergenz v. } \vec{F}}\vec{v}\cdot\vec{dA}$ (zufolge Überstreichen der Quellen von $\vec{F}$)

$+ \oint_{\partial A} \vec{F}\cdot(\vec{v}\times\vec{ds})$ (zufolge Bewegung des Randes)

Stokes'scher Satz: $\int_A \nabla\times(\vec{F}\times\vec{v})\cdot d\vec{A} = \oint_{\partial A = S}(\vec{F}\times\vec{v})\cdot d\vec{s} = \oint_{\partial A}\vec{F}\cdot(\vec{v}\times d\vec{s})$

Ähnlich gilt für ein (materiell gedachtes) Volumen V mit dem Rand ∂V

$$\underline{\frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV = \int_V \frac{d_c\rho}{dt}\, dV} = \int_V \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v})\right] dV = \int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV + \oint_{\partial V}\rho\vec{v}\cdot\vec{dA}\,. \tag{9}$$

zufolge Bewegung der Fläche ∂V

gaußsche Satz ($\int_V \nabla\cdot\vec{F}\, dV = \int_A \vec{F}\cdot d\vec{A}$)

Umformung der MAXWELL-Gleichungen:

- $\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$ mit $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ und $\vec{v} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{v}$ folgt:

$$\underline{\underline{\nabla \times (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) + \left[\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{v}(\nabla \cdot \vec{B}) + \nabla \times (\vec{B} \times \vec{v})\right] = 0}} \qquad (6)_1$$

- $\nabla \times \vec{H} = \vec{S} + \partial \vec{D}/\partial t$ mit $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ und $\vec{v} \times \vec{D} = -\vec{D} \times \vec{v}$ folgt:

$$\underline{\underline{\nabla \times (\vec{H} - \vec{v} \times \vec{D}) - \left[\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{v}(\nabla \cdot \vec{D}) + \nabla \times (\vec{D} \times \vec{v})\right] = \vec{S} - \rho \vec{v}}} \qquad (6)_2$$

Aus $(6)_2$ folgt mit $\nabla \cdot (\nabla \times (\ldots)) = 0$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{(\nabla \cdot \vec{D})}_{\rho} - \nabla \cdot (\vec{v}\rho) = \nabla \cdot (\vec{S} - \rho \vec{v}) \Rightarrow \underline{\underline{\nabla \cdot (\vec{S} - \rho \vec{v}) + \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v})\right] = 0}} \quad (6)_3$$

Durch rein formale Umstellung wurde aus den MAXWELL-Gleichungen

$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$, $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ (1), (2)

$\nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{S}$, $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$ (3), (4)

und der Kontinuitätsgleichung

$\nabla \cdot \vec{S} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ (aus (3), (4))

$\Rightarrow$ der neue Gleichungssatz

$(6)_1$, $(6)_2$ mit jeweils gleichem Operatorterm in $[\ldots]$

und aus $(6)_2$ die neue Kontinuitätsgleichung $(6)_3$

Diese Umformung wurde bewusst so gemacht, weil

$$\frac{\partial\vec{F}}{\partial t}+\vec{v}(\nabla\cdot\vec{F})+\nabla\times(\vec{F}\times\vec{v})=\frac{d_c\vec{F}}{dt}\quad,\quad\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{v})=\frac{d_c\rho}{dt}$$ die totalen Ableitungen in einem mit $\vec{v}$ bewegten System darstellen! ⇒ deshalb auch als (mit $\vec{v}$) mitgeschleppte Zeitableitung bezeichnet! $\frac{d_c\vec{F}}{dt}$, $\frac{d_c\rho}{dt}$!

- Was ist der Unterschied zwischen der totalen Zeitableitung in einem ruhenden Laborsystem und jener in einem mit $\vec{v}$ bewegten System als mitgeschleppte Ableitung?

1) Die totale Zeitableitung $\frac{d\cdot}{dt}$ wirkt nur auf die abzuleitende Größe $\vec{F}(x,y,z,t)$, $\rho(x,y,z,t)$, nicht aber auf ein Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(x,y,z,t)$, da dieses im ruhenden System für die Änderung von $\vec{F},\rho$ keine Bedeutung hat!

2) Die mitgeschleppte Zeitableitung $\frac{d_c\cdot}{dt}$ wirkt sowohl auf $\vec{F},\rho$ als auch auf $\vec{v}$, weil sie die Änderungen von $\vec{F},\rho$ bezüglich des mit $\vec{V}$ bewegten Systems darstellt!

zu 1): $\rho(x,y,z,t)\Rightarrow\frac{d\rho}{dt}=\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial\rho}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial\rho}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{\partial\rho}{\partial x}\cdot v_x+\frac{\partial\rho}{\partial y}\cdot v_y+\frac{\partial\rho}{\partial z}\cdot v_z+\frac{\partial\rho}{\partial t}=$

$v_x=\partial x/\partial t,\ v_y=\partial y/\partial t,\ v_z=\partial z/\partial t$ $\qquad=\vec{V}\cdot\nabla\rho+\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{V}_c)$

$\vec{V}_c$ bedeutet: ∇ wirkt nicht auf $\vec{V}$.

c = Constant

zu 2): $\rho(x,y,z,t)$ bzgl. $\vec{V}(x,y,z,t)$: $\frac{d_c\rho}{dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{V})=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\vec{V}_c)+\nabla\cdot(\rho_c\vec{V})=$

$$=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{V}\cdot\nabla\rho+\rho(\nabla\cdot\vec{V})$$

zu 1): $\vec{F}(x,y,z,t) \Rightarrow \dfrac{d\vec{F}}{dt} = \begin{pmatrix} dF_x/dt \\ dF_y/dt \\ dF_z/dt \end{pmatrix}$

$$\frac{dF_x}{dt} = \frac{\partial F_x}{\partial x}\cdot\underbrace{\frac{\partial x}{\partial t}}_{v_x} + \frac{\partial F_x}{\partial y}\cdot\underbrace{\frac{\partial y}{\partial t}}_{v_y} + \frac{\partial F_x}{\partial z}\cdot\underbrace{\frac{\partial z}{\partial t}}_{v_z} + \frac{\partial F_x}{\partial t} = v_x\frac{\partial F_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial F_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial F_x}{\partial z} + \frac{\partial F_x}{\partial t} =$$

$$= \underbrace{v_x\cdot\left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right)}_{} + \underbrace{v_y\frac{\partial F_x}{\partial y} - v_x\frac{\partial F_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial F_x}{\partial z} - v_x\frac{\partial F_z}{\partial z}}_{} + \frac{\partial F_x}{\partial t} =$$

$$= v_x\cdot(\nabla\cdot\vec{F}) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(F_x v_y - F_y v_x) - \frac{\partial}{\partial z}(F_z v_x - F_x v_z)}_{} + \frac{\partial F_x}{\partial t} =$$

$$= \left[\vec{v}\cdot(\nabla\cdot\vec{F})\right]_x + \left[\nabla\times(\vec{F}\times\vec{v}_c)\right]_x + \frac{\partial F_x}{\partial t}$$

, denn: $\underbrace{\vec{F}\times\vec{v}}_{\vec{G}} = \begin{pmatrix} F_y v_z - F_z v_y \\ F_z v_x - F_x v_z \\ F_x v_y - F_y v_x \end{pmatrix}$ und

$$\nabla\times\vec{G} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial G_z}{\partial y} - \dfrac{\partial G_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial G_x}{\partial z} - \dfrac{\partial G_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial G_y}{\partial x} - \dfrac{\partial G_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{d\vec{F}}{dt} = \vec{v}\cdot(\nabla\cdot\vec{F}) + \nabla\times(\vec{F}\times\vec{v}_c) + \frac{\partial\vec{F}}{\partial t}}}$$

zu 2): $\dfrac{d_c}{dt}\vec{F} = \vec{v}\cdot(\nabla\cdot\vec{F}) + \nabla\times(\vec{F}\times\vec{v}) + \dfrac{\partial\vec{F}}{\partial t} =$

$$\underline{\underline{= \vec{v}\cdot(\nabla\cdot\vec{F}) + \nabla\times(\vec{F}\times\vec{v}_c) + \nabla\times(\vec{F}_c\times\vec{v}) + \frac{\partial\vec{F}}{\partial t}}}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fazit: Das neue System der MAXWELL-Gleichungen (6) kann mit zwei Gleichungen $(6)_1$, $(6)_2$ geschrieben werden:

$(6)_1$: $\nabla\times(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})+\frac{d_c\vec{B}}{dt}=0$, $(6)_2$: $\nabla\times(\vec{H}-\vec{v}\times\vec{D})-\frac{d_c\vec{D}}{dt}=\vec{S}-\rho\cdot\vec{v}$

in Ergänzung zu $(6)_2$ die Kontinuitätsgleichung $(6)_3$: $\nabla\cdot(\vec{S}-\rho\vec{v})+\frac{d_c\rho}{dt}=0$

Mit den neuen Größen: $\vec{\mathcal{E}}=\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}$: elektromotorische Intensität

$\vec{\mathcal{H}}=\vec{H}-\vec{v}\times\vec{D}$: magnetomotorische Intensität

$\vec{\mathcal{S}}=\vec{S}-\rho\vec{v}$: Konduktionsstromdichte

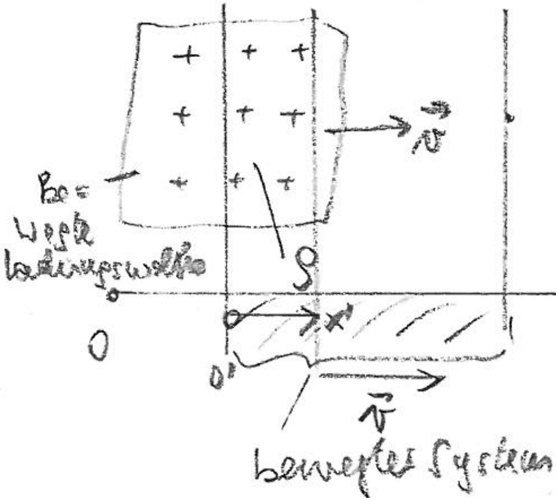
$\nabla\times(\vec{v}\times\vec{D})$: „RÖNTGEN"-Stromdichte

erhalten wir: $(6)_1$: $\nabla\times\vec{\mathcal{E}}+\frac{d_c\vec{B}}{dt}=0$, $(6)_2$: $\nabla\times\vec{\mathcal{H}}=\vec{\mathcal{S}}+\frac{d_c\vec{D}}{dt}$ bzw. $(6)_3$: $\nabla\cdot\vec{\mathcal{S}}+\frac{d_c\rho}{dt}=0$

- Während also im Laborsystem (Ruhsystem) eine Änderung von $\vec{B}$ ein Wirbelfeld $\vec{E}$ bewirkt ($\mathrm{rot}\,\vec{E}=-\partial\vec{B}/\partial t$), bewirkt eine Änderung von $\vec{B}$ bezüglich des mit $\vec{v}$ bewegten Systems ein Wirbelfeld $\vec{\mathcal{E}}$, das als Summe $\vec{E}$ und $\vec{v}\times\vec{B}$ dargestellt werden kann. Das ist die Aufspaltung in „Ruhe"-Induktion $\vec{E}$ und „Bewegungs"-Induktion $\vec{v}\times\vec{B}$.
- Während im Ruhsystem $\vec{S}$ und $\partial\vec{D}/\partial t$ das $\vec{H}$-Wirbelfeld erregen ($\mathrm{rot}\,\vec{H}=\vec{S}+\partial\vec{D}/\partial t$), erregt die Änderung von $\vec{D}$ bezüglich dem mit $\vec{v}$ bewegten System $\frac{d_c\vec{D}}{dt}$ gemeinsam mit der Summe aus $\vec{S}$ und negativer Konvektionsstromdichte $\rho\vec{v}$ das Wirbelfeld $\vec{\mathcal{H}}$ ($\mathrm{rot}\,\vec{\mathcal{H}}=\vec{\mathcal{S}}+d_c\vec{D}/dt$), das als $\vec{H}-\vec{v}\times\vec{D}$ dargestellt werden kann.
- Die Ladungsdichteänderung $d_c\rho/dt$ bezüglich des mit $\vec{v}$ bewegten Systems hängt von der Zuflussdifferenz von $\vec{S}$ und negativer Konvektionsstromdichte ab.

Beispiel: Rein mechanisch bewegte Ladung (ohne treibendes elektrisches Feld)

$\Rightarrow \vec{S}=0$, aber $\rho\vec{v}$ als Konvektionsstromdichte vorhanden. Sei ρ = konst. und $\vec{v}$ = konst.!



Wie groß ist am Ort x' im bewegten System die Ladungsdichteänderung? Sie ist Null, da sich die Ladungswolke gleich schnell mit dem bewegten System bewegt.

$$\nabla\cdot\vec{S}' + \frac{d_c\rho}{dt} = 0 \qquad \vec{S}' = \vec{S} - \rho\vec{v} = \vec{0} - \rho\vec{v}$$

$$-\nabla\cdot(\rho\vec{v}) = -\nabla\cdot(\underbrace{\rho}_{=\text{konst.}}\vec{v}_c) - \nabla\cdot(\rho_c\underbrace{\vec{v}}_{=\text{konst.}}) = \underline{\underline{0}}$$

Abschätzung der Größenordnung der Effekte

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\vec{\nabla}\times(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})+\left[\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\vec{v}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{B}+\vec{\nabla}\times(\vec{B}\times\vec{v})\right]=\vec{0} \qquad \vec{E}\rightarrow\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{H}-\vec{v}\times\vec{D})-\left[\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{v}\,\vec{\nabla}\cdot\vec{D}+\vec{\nabla}\times(\vec{D}\times\vec{v})\right]=\vec{S}-\rho\vec{v}, \qquad \vec{H}\rightarrow\vec{H}-\vec{v}\times\vec{D}$$

$$\mu_0\vec{H}=\vec{B}\rightarrow\mu_0\vec{H}-\mu_0\vec{v}\times\vec{D}=\mu_0\vec{H}-\mu_0\vec{v}\times\varepsilon_0\vec{E}=\vec{B}-\vec{v}\times\vec{E}/c^2 \qquad c=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$$

$$v\cdot\vec{B}\rightarrow v\cdot\vec{B}-v\cdot\vec{v}\times\vec{E}/c^2=v\cdot\vec{B}-\vec{e}_v\times\vec{E}\cdot(v/c)^2 \qquad \vec{v}=v\cdot\vec{e}_v \quad \left|\vec{e}_v\right|=1$$

Der Effekt v x B (Bewegungsinduktion) ist von der Größenordnung v·B.

Der Effekt ∇ x (v x D) (Rönten-Stromdichte) ist im „leeren“ Raum von der Größenordnung E·$(v/c)^2$ **<u>und damit um etwa 10^4 viel kleiner!</u>**

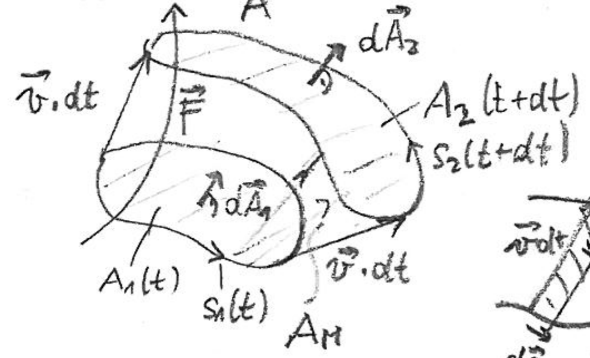
B = 1 T, E = 40 kV/cm (Durchschlagfeldstärke von Luft bei 1 bar, 20°C),
v = 100 m/s:

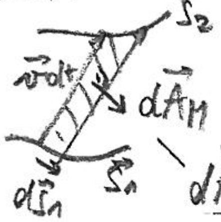
$$E=4\cdot10^6 V/m\rightarrow\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\Leftrightarrow 4\cdot10^6 V/m+100\cdot1V/m\Leftrightarrow +0.0025\%$$

$$B=1T\rightarrow\vec{B}-\mu_0\vec{v}\times\varepsilon_0\vec{E}\Leftrightarrow 1T-4\pi\cdot10^{-7}\cdot100\cdot8.854\cdot10^{-12}\cdot4\cdot10^6\Leftrightarrow -4.45\cdot10^{-7}\%$$

Die „lokale" Feldstärkeänderung $d_c\vec{F}/dt$ bezüglich des mit $\vec{v}$ bewegten Systems kann auch durch eine „integrale" Flussänderung $\frac{d\Phi}{dt}$ bezüglich der mit $\vec{v}$ bewegten Fläche ausgedrückt werden: Die totale Flussänderung ergibt sich durch die Änderung $\partial\vec{F}/\partial t$ und die sich mit $\vec{v}$ ändernde Fläche $A(t)$: $\Phi = \int_A \vec{F}\cdot d\vec{A}$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}\int_A \vec{F}\cdot d\vec{A} = \frac{\int_{A_2}\vec{F}(t+dt)\cdot d\vec{A}_2 - \int_{A_1}\vec{F}(t)\cdot d\vec{A}_1}{dt}$$





Achtung: A_1 und A_2 spannen das Volumen $d\vec{A}_1\cdot\vec{v}\,dt \approx d\vec{A}_2\cdot\vec{v}\cdot dt$ auf, dessen Mantelfläche A_M gemäß $d\vec{A}_M = d\vec{s}_1\times\vec{v}\,dt$ aufgespannt wird.

Auf dieses Volumen wird mit dessen Oberfläche „$(-A_1)$" + „A_2" + „A_M" der Gauss'sche Integralsatz angewendet:

$$d\vec{A}_M = d\vec{s}_1\times\vec{v}\,dt \approx d\vec{s}_2\times\vec{v}\,dt$$

Gauss'scher Satz: $\oint_A \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_V \mathrm{div}\,\vec{F} \cdot dV$ zum Zeitpunkt $t+dt$, $dV \approx d\vec{A}_1 \cdot \vec{v}\,dt$

$$\oint_A \vec{F}(t+dt) \cdot d\vec{A} = \int_{A_2} \vec{F}(t+dt) \cdot d\vec{A}_2 + \int_{A_1} \vec{F}(t+dt) \cdot (-d\vec{A}_1) + \int_{A_M} \vec{F}(t+dt) \cdot \underbrace{d\vec{A}_M}_{d\vec{s}_1 \times \vec{v} \cdot dt} =$$

$$= \int_{A_2} \vec{F}(t+dt) \cdot d\vec{A}_2 - \int_{A_1} \underbrace{\vec{F}(t+dt)}_{\vec{F}(t+dt) = \vec{F}(t) + \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} \cdot dt} \cdot d\vec{A}_1 + \oint_{s_1} \underbrace{\vec{F}(t+dt) \cdot (d\vec{s}_1 \times \vec{v})}_{d\vec{s}_1 \cdot (\vec{v} \times \vec{F})} \cdot dt = \int_{A_1} \mathrm{div}\,\vec{F}(t+dt) \, (d\vec{A}_1 \cdot \vec{v}) \cdot dt$$

$$\int_{A_2} \vec{F}(t+dt) \cdot d\vec{A}_2 - \int_{A_1} \vec{F}(t) \cdot d\vec{A}_1 - \int_{A_1} \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} \cdot dt \cdot d\vec{A}_1 + \oint_{s_1} d\vec{s}_1 \cdot (\vec{v} \times \vec{F}(t+dt))\,dt = \int_{A_1} \vec{v} \cdot (\mathrm{div}\,\vec{F}(t+dt) \cdot d\vec{A}_1)\,dt$$

$$d\Phi = \Phi_2(t+dt) - \Phi_1(t) = \int_{A_2} \vec{F}(t+dt) \cdot d\vec{A}_2 - \int_{A_1} \vec{F}(t) \cdot d\vec{A}_1 = \int_{A_1} \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} \cdot dt \cdot d\vec{A}_1 - \oint_{s_1} d\vec{s}_1 \cdot (\vec{v} \times \vec{F}(t+dt))\,dt +$$

$$+ \int_{A_1} \vec{v} \cdot (\mathrm{div}\,\vec{F}(t+dt)\, d\vec{A}_1)\,dt$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = \overbrace{\int_{A_1} \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} \cdot d\vec{A}_1}^{\partial \Phi / \partial t} - \oint_{s_1} d\vec{s}_1 \cdot \underbrace{(\vec{v} \times \vec{F}(t+dt))}_{-\vec{F} \times \vec{v}} + \int_{A_1} \vec{v} \cdot \mathrm{div}\,\vec{F}(t+dt) \cdot d\vec{A}_1, \quad dt \to 0;$$

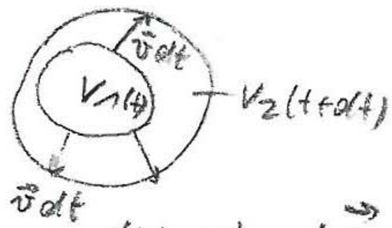
Mit $\oint_s \vec{G} \cdot d\vec{s} = \int_A (\nabla \times \vec{G}) \cdot d\vec{A}$ (Stokes'scher Integralsatz): $\dfrac{d\Phi}{dt} = \displaystyle\int_{A_1} \overbrace{\left[\frac{\partial \vec{F}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{F} \times \vec{v}) + \vec{v} \cdot (\nabla \cdot \vec{F}) \right]}^{d_c \vec{F} / dt\,!} \cdot d\vec{A}_1$

Für $\vec{F} = \vec{B}$ mit $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$: $\dfrac{d\Phi}{dt} = \underbrace{\dfrac{\partial \Phi}{\partial t}}_{①} - \underbrace{\oint_s (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s}}_{②}$

①: Ruheinduktion

②: Bewegungsinduktion

- $$\frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV = \frac{\int_{V_2} \rho(t+dt)\cdot dV_2 - \int_{V_1} \rho(t)\cdot dV_1}{dt}$$



$$\int_{V_2} \left[\rho(t) + \frac{\partial\rho}{\partial t}dt\right] dV_2 - \int_{V_1} \rho(t)\, dV_1 = \int_{V_2} \frac{\partial\rho}{\partial t}dt\, dV_2 + \int_{V_2-V_1} \rho(t)\, d(V_2-V_1) =$$

$$d(V_2-V_1) = d\vec{A}_1\cdot\vec{v}\,dt$$

$$\int_V \rho\, dV = \int_{\partial V} \mathrm{div}\,\rho\cdot d\vec{A}$$

$$= \int_{V_2} \frac{\partial\rho}{\partial t}dt\, dV + \int_{A_1=\partial V_1} \rho\cdot d\vec{A}_1\cdot\vec{v}\,dt \Rightarrow$$

Gauss'scher Satz: $= \int_V \nabla\cdot(\rho\vec{v})\,dV$

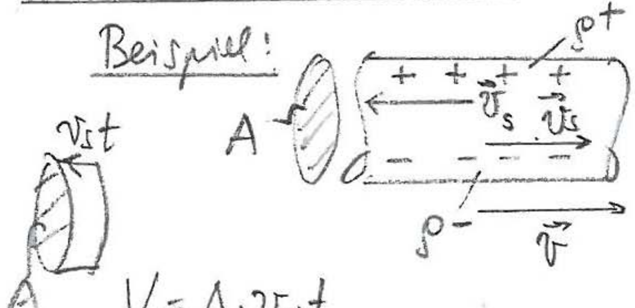
$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV = \int_{V_2} \frac{\partial\rho}{\partial t}\, dV + \int_{A_1} (\rho\vec{v})\, d\vec{A} \Rightarrow \frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV = \int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\, dV + \int_{A=\partial V} (\rho\vec{v})\, d\vec{A} =$$

$dt \to 0,\ V_2 \to V_1$

$$= \int_V \Big[\underbrace{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{v})}_{\frac{d_c}{dt}\rho}\Big]\cdot dV = \frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV$$

• Konduktionsstromdichte: $\vec{\mathfrak{S}} = \vec{S} - \rho\vec{v}$

Beispiel!



$\rho = \rho^+ + \rho^- = \rho^+ - \rho^+ = 0$, aber Ladungsdurchtritt
$\rho^+ > 0$, $\rho^- < 0$

durch Fläche A gemäß $Q^+ = \rho^+ V$ und $Q^- = \rho^- V = -Q^+$ je Zeit t, als $I = 2Q^+/t = S\cdot A = \mathfrak{S}\cdot A$

$$S = \frac{2\cdot\rho^+ A\cdot v_s t}{t\cdot A} = 2\rho^+ v_s$$

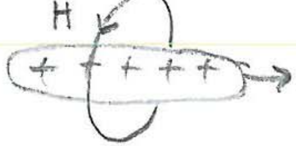
„Leitungsstromdichte" (Konduktionsstromdichte)

$V = A\cdot v_s\cdot t$

Hier ist $\mathfrak{S} = S$, da $\rho = 0$!

Dieser Strom erregt gemäß $\nabla\times\vec{\mathcal{H}} = \vec{\mathfrak{S}} + \frac{d_c\vec{D}}{dt}$ das Feld $\vec{\mathcal{H}} = \vec{H}$, wenn $\vec{D} = 0$ ist.

Beispiel: Bewegte Ladungswolke: $\rho\vec{v}$. Im Ruhesystem, wenn nur $\rho\vec{v}$ auftritt, erregt dieser Konvektionsstrom das Feld $\vec{H}$:



$(\vec{S} = \rho\vec{v})$

$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{S} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

$\partial\vec{D}/\partial t \approx 0$

Im mit $\vec{v}$ bewegten System ist $\vec{\mathfrak{S}} = \vec{S} - \rho\vec{v} = \rho\vec{v} - \rho\vec{v} = 0$: Es gibt keine Leitungsstromdichte, daher, wenn $\vec{D} \approx 0$, ist auch $\vec{\mathcal{H}} = 0$!

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Überdies sind im nichtrelativistischen Grenzfall die Felder

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}, \quad \vec{\mathcal{H}} = \vec{H} - \vec{v}\times\vec{D}, \quad \vec{\mathcal{J}} = \vec{S} - \rho\vec{v} \qquad (10)$$

als elektrische Feldstärke, als magnetische Feldstärke bzw. als Stromdichte in bezug auf die bewegten Körperpunkte zu interpretieren (elektromotorische Intensität, magnetomotorische Intensität, Konduktionsstromdichte). Für die Formulierung von Materialgleichungen ist es günstig, die elektrische Polarisation $\vec{P}$ und die Magnetisierung $\vec{\mathcal{M}}$ in bezug auf bewegte Körperpunkte über die Verknüpfungsbeziehungen

$$\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \mu_0\vec{\mathcal{M}}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}, \qquad \vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{\mathcal{M}} - \vec{P}\times\vec{v} \qquad (11)$$

sieht man bei Galilei-Transform.

tatsächliche körperfeste Magnetisierung

einzuführen (scheinbare Magnetisierung $\vec{M} = \vec{\mathcal{M}} + \vec{P}\times\vec{v}$ in raumfestem Punkt). Damit lassen sich (für den nichtrelativistischen Grenzfall) die Materialgleichungen analog denen für ruhende Körper angeben, z.B. (einfachste, lineare Materialgleichungen)

$$\vec{H}\chi_m = \vec{\mathcal{M}}$$

$$\vec{\mathcal{J}} = \varkappa\vec{\mathcal{E}}, \quad \vec{P} = \varepsilon_0\chi_e\vec{\mathcal{E}}, \quad \vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{\mu_0}\frac{\chi_m}{1+\chi_m}\vec{B}. \qquad (12)$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{\chi_m}\vec{\mathcal{M}} + \mu_0\vec{\mathcal{M}}$$

$$\rightarrow \vec{\mathcal{M}} = 1/\mu_0\left(\frac{\chi_m}{1+\chi_m}\right)\vec{B}$$

Dem aus (6) mit (7) und (10) folgenden Gleichungssatz

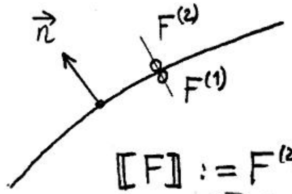
$$\left.\begin{array}{lll} \vec{\nabla}\times\vec{\mathcal{E}} + \dfrac{d_c\vec{B}}{dt} = \vec{0}\,, & \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0\,, & \\ \vec{\nabla}\times\vec{\mathcal{H}} - \dfrac{d_c\vec{D}}{dt} = \vec{\mathcal{J}}\,, & \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho\,, & \vec{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{J}} + \dfrac{d_c\rho}{dt} = 0 \end{array}\right\} \qquad (13)$$

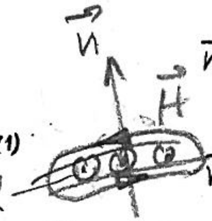
(Flächen rotor = 0 (rot $\vec{E} = 0$!)

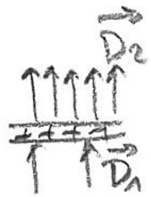
sind an materiellen Flächen die Sprungbedingungen

$\vec{n} \times (\vec{E}^{(2)} - \vec{E}^{(1)}) = 0$

Φ = const







$$[\![F]\!] := F^{(2)} - F^{(1)}$$

$\vec{S}\cdot l = \vec{\alpha}$

$$\left.\begin{array}{ll} \vec{n}\times[\![\vec{\mathcal{E}}]\!] = \vec{0}\,, & \vec{n}\cdot[\![\vec{B}]\!] = 0\,, \\ \vec{n}\times[\![\vec{\mathcal{H}}]\!] = \vec{\alpha}\,, & \vec{n}\cdot[\![\vec{D}]\!] = \sigma \end{array}\right\} \qquad (14)$$

zugeordnet, falls $\vec{\alpha}$ die konduktive Flächenstromdichte und σ die Flächenladungsdichte bezeichnet.

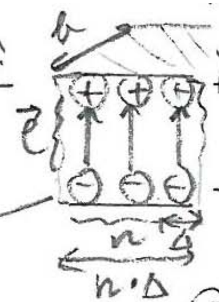
$\frac{dQ}{dA}$

Beachten Sie: Die Gleichungen (13) stellen lediglich eine Umformung der ursprünglichen Maxwell-Gleichungen (1) bis (4) dar, sie enthalten daher keine zusätzliche physikalische Information. Erst in den Verknüpfungen der Größen über Materialgleichungen (z.B. (12)) zusammen mit (11) wird die Bewegung berücksichtigt.

(P × $\vec{\mathcal{X}}$!)

• Polarisation:

ruhender Körper

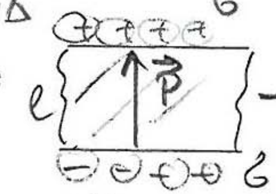


el. Dipolmoment: $n\cdot Q\cdot\vec{l}$, $\vec{P} = \dfrac{nQ\vec{l}}{V} = \dfrac{n\cdot Q\cdot l}{n\Delta l b}\,\vec{e}_l = \dfrac{Q}{\Delta b}\,\vec{e}_l = \sigma\,\vec{e}_l$

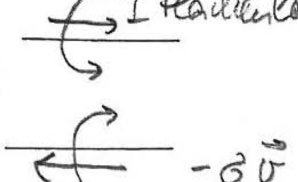
σ: Flächenladungsdichte an der Oberfläche $n\Delta\cdot b$: $\sigma = Q/(\Delta b)$

Ein bewegter polarisierter Körper trägt zur Magnetisierung bei!

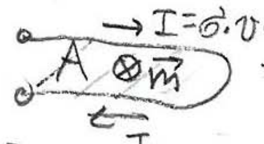
bewegter Körper:



≙

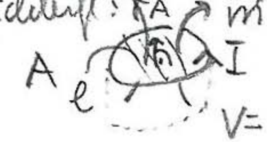


I Flächenladungsstrom $\sigma\vec{v}$: erzeugt magn. Feld wie bei einer Stromschleife:



$\vec{m} = \vec{M}\cdot V$

Magnetisches Feld („Moment") einer Kreisschleife: $\vec{A}$, $\vec{m} = I\cdot\vec{A}$, $d\vec{m} = I\,d\vec{A}$



$V = A\cdot l$

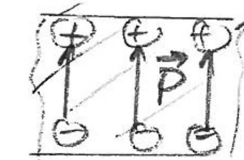
$$\vec{M} = \frac{\sum \vec{m}_i}{V} = \frac{d\vec{m}}{dV} \mathrel{\hat{=}} \frac{IA\,\vec{e}_A}{Al} = \frac{I}{l}\vec{e}_A$$

$$\vec{M} = \vec{P}\times\vec{v} = \sigma\,\vec{e}_l\times\vec{v} = \sigma v\,\vec{e}_A = \frac{I}{l}\vec{e}_A$$

• Materialgesetze:

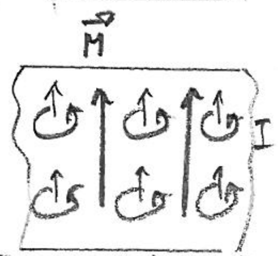
Sie wurden im Ruhsystem (Größen $\vec{B}, \vec{H}, \vec{D}, \vec{E}$) für ruhende Körper ($\vec{v}=0$) formuliert:

a) el. polarisierbare Körper: Modell:



$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon \cdot \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon_0 (1+\chi_e) \vec{E}, \quad \vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

b) magnetisierbare Körper: Modell:

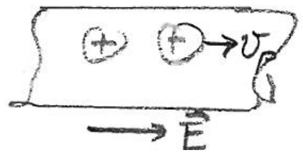


$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{J} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} = \mu \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu_0 (1+\chi_m) \vec{H}$$

$$\Rightarrow \vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \frac{\vec{B}}{\mu_0 (1+\chi_m)} = \frac{\chi_m}{1+\chi_m} \cdot \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

c) el. leitfähige Körper: Modell:

$$\vec{J} = \kappa \vec{E}$$



Relativ zum bewegten System tritt nun lokal im bewegten Körper die el. Feldstärke $\vec{\mathcal{E}} = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$ auf, die die Ladungsträger treibt als Konduktionsstromdichte $\vec{\mathcal{J}} = \vec{J} - \rho\vec{v}$, die also ausschließlich auf $\vec{\mathcal{E}}$, und nicht auch auf Konvektion ($\rho\vec{v}$) beruht. Letztere ist ja auch relativ zu $\vec{v}$ Null.

$$\vec{\mathcal{J}} = \kappa \vec{\mathcal{E}}$$

Ein polarisierbarer Körper erscheint im ruhenden wie im bewegten System polarisiert: $\vec{\mathcal{P}} = \vec{P}$. $\vec{P}$ ist aber nun zufolge $\vec{\mathcal{E}} = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$: $\vec{P} = \varepsilon_0 \cdot \chi_e \cdot \vec{\mathcal{E}}$

Ein magnetisierter Körper (Magnetisierung $\vec{\mathcal{M}}$, gemessen im bewegten Körper) hätte im Ruhsystem dieselbe Magnetisierung $\vec{M}$, solange kein polarisierter Körper bewegt wird. Wenn dieser aber vorhanden und bewegt wird, tritt eine zusätzliche Magnetisierung $\vec{P} \times \vec{v}$ auf, sodass in Summe im Ruhsystem gilt: $\vec{M} = \vec{\mathcal{M}} + \vec{P} \times \vec{v}$, als „scheinbare" Magnetisierung. Nur $\vec{\mathcal{M}}$ ist von $\vec{B}$ abhängig: $\vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{\chi_m}{1+\chi_m} \cdot \vec{B}$

Zusammenfassung:

Bewegtes Medium $\vec{v}$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} + \frac{d_c \vec{B}}{dt} = \vec{0} \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}} - \frac{d_c \vec{D}}{dt} = \vec{\mathcal{S}} \qquad \nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{\mathcal{E}}$$

$$\vec{\mathcal{S}} = \varkappa \vec{\mathcal{E}}$$

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{\chi_m}{1+\chi_m} \vec{B}$$

$$\vec{\mathcal{E}} = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\vec{\mathcal{H}} = \vec{H} - \vec{v} \times \vec{D}$$

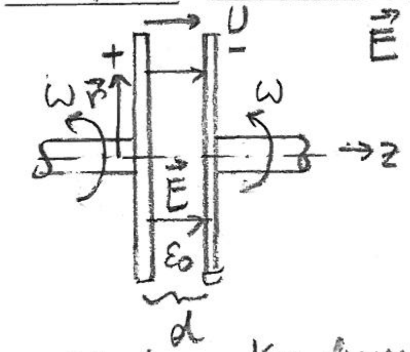
$$\vec{\mathcal{S}} = \vec{S} - \rho \vec{v}$$

$$\vec{M} = \vec{\mathcal{M}} + \vec{P} \times \vec{v}$$

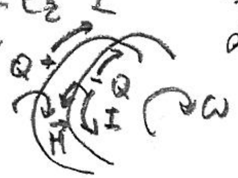
$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

<u>Beispiel A: Rotierender Kondensator!</u> (Quelle: SOMMERFELD / Elektrodynamik, 1949)



$\vec E = \frac{U}{d}\vec e_z$

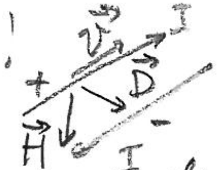


Bei Rotation entsteht ein Konvektionsstrom I, der ein $\vec H$-Feld, nach innen gerichtet, erregt.

$I \sim \rho \cdot v$

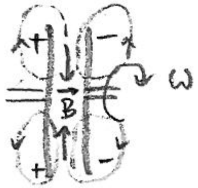
$\vec v = \vec \omega \times \vec r$

Geladener Kondensator: Feld E ($Q = C \cdot U = \frac{\varepsilon_0 A}{d} U \Rightarrow D = Q/A = \varepsilon_0 E$) im Ruhsystem, bei $\omega = 0$: $\vec H = 0$ im Ruhsystem. Im bewegten System (mit $r >> d$ als Linearbewegung $v = \omega r$ interpretiert), fließt relativ zur Bewegung kein Strom $\Rightarrow \mathcal{H} = 0$, aber relativ zum Ruhsystem tritt der Konvektionsstrom I auf, der $\vec H$ erregt:



$\vec H = \vec{\mathcal{H}} + \vec v \times \vec D = \vec v \times \vec D$: nach innen zur Achse gerichtet! $c_0^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$

$\vec B = \mu_0 \vec H = \mu_0 \vec v \times \vec D = \mu_0 \vec v \times \varepsilon_0 \vec E = \frac{\vec v \times \vec E}{c^2}$!



$\vec B$ kann außen gemessen werden (erstmals gemessen von ROWLAND, 1876), deshalb heißt I: ROWLAND-Strom.

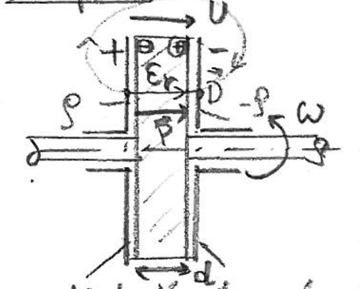
Zahlenbeispiel: $E = 10^6\,V/m = 1\,kV/mm$ ($E_D = 4\,kV/mm$ in Luft, 1 bar!), $v = 100\,\frac{m}{s}$

$v = 2\pi n r$

$$B = \frac{E\cdot v}{c^2} = \frac{10^6\cdot 100}{(3\cdot 10^8)^2} \approx \frac{10^8}{10^{17}} = 10^{-9}\,\frac{Vs}{m^2} = \underline{\underline{10^{-9}\,T}} \text{ sehr klein!}$$

$r = 0{,}5\,m \Rightarrow n = 318/s = 1910/min$

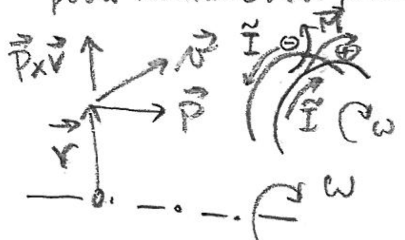
Beispiel B: a) Rotierendes Dielektrikum: $\vec D = \varepsilon_0\vec E + \vec P = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec E$, $\vec P = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec E$



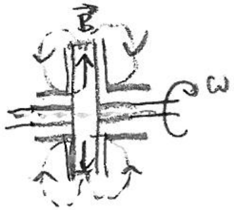
feste Kondensatorplatten

Nur $\vec P$ rotiert, $\vec D$ rotiert nicht, denn außerhalb der Platten ist $\vec D = \varepsilon_0\vec E_A$ nicht rotierend, und die Quellen von $\vec D$ (also $\operatorname{div}\vec D = \rho$), also ρ, rotieren nicht! Daher ist $\vec H = \vec{\mathcal{H}} + \underbrace{\vec v \times \vec D}_{=0} = 0$! trifft nicht auf

Aber es existiert die Magnetisierung $\vec P \times \vec v$, da $\vec P$ rotiert; anders ausgedrückt: eine Flussdichte $\vec B$ auftritt im Ruhesystem bei rotierendem $\vec P$: $\vec B = \mu_0(\vec P \times \vec v)$



Dieses Feld $\vec B$ ist nach außen gerichtet! Unterschied zum ROWLAND-Strom!



(Messungen von RÖNTGEN 1888)

$\tilde I \sim P v$: RÖNTGEN-Strom

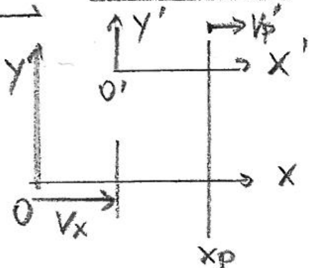
$B = \mu_0 v(\varepsilon - \varepsilon_0)|\vec E| =$
$= \mu_0\varepsilon_0 v(\varepsilon_r - 1)E =$
$= \frac{1}{c^2}Ev(\varepsilon_r - 1)$

nach außen (z.B.: $\varepsilon_r = 4$) $\Big\}$ $B \approx \frac{3}{4}\cdot 10^{-9}\,T$

(E ggü. über Bsp. A nur 1/4!)

b) Versuch von EICHENWALD: 1904: Platten und Dielektrikum rotieren mit ω: $B = \underbrace{\mu_0 vD}_{\text{nach innen}} - \underbrace{\mu_0 vP}_{\text{nach außen}} = \mu_0 v(D - P) = \mu_0 v\varepsilon_0 E$ unabhängig vom verwendeten Dielektrikum, nach innen gerichtet!

Achtung! Die MAXWELL-Gleichungen mit $\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{S}}, \vec{\mathcal{H}}, \vec{\mathcal{B}}, \vec{\mathcal{D}}$ sind nur Umformungen jener Originalgleichungen aus dem Ruhsystem $\vec{E}, \vec{S}, \vec{H}, \vec{B}, \vec{D}$. Durch den Effekt $\vec{B} \times \vec{v}$ kommt aber Neues bei den Materialgleichungen hinzu. Dies ist wegen der Annahme derselben Zeit t im Ruhsystem und im bewegten System eine Galilei-Transformation!



$x_p = x_p' + v_x t$ allg.: $\vec{x} = \vec{x}' + \vec{v} \cdot t$

Bei Bewegung im x-Richtung: $v_x = v$:

$x' = x - vt,\ y' = y,\ z' = z,\ t' = t$

Tatsächlich ist dann aber $v_p = v_p' + v_x$ u. U. größer als c_0, die Vakuumlichtgeschwindigkeit! Dieser ist aber gemäß dem Versuch von MICHELSON und MORLEY 1881 eine Konstante! Daher müsste korrekterweise stets die LORENTZ-Transformation verwendet werden, die im 0-System und 0'-System c stets als denselben Wert c_0 ergibt!

Für Bewegung nur in x-Richtung ($v_x = v$) lautet die Lorentz-Transformation:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z$$

Die Formulierung der MAXWELL-Gleichungen im Ruhsystem (x, y, z, t) und im mit $\vec{v}$ (hier: $\vec{v} = v\vec{e}_x$) bewegten System (x', y', z', t') ergibt dieselbe Form!

Beweis: Mit $\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \gamma$ folgt $\frac{\partial x'}{\partial x} = \gamma$, $\frac{\partial t'}{\partial x} = -\frac{v}{c^2}\gamma$, $\frac{\partial t'}{\partial t} = \gamma$, $\frac{\partial x'}{\partial t} = -v\gamma \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial A(x',y',z',t')}{\partial x'}\cdot\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x} \quad (y'=y, z'=z) \Rightarrow \frac{\partial A}{\partial x} = \gamma\cdot\left(\frac{\partial A}{\partial x'} - \frac{v}{c^2}\frac{\partial A}{\partial t'}\right)$$

$$\frac{\partial\cdot}{\partial t} = \frac{\partial\cdot}{\partial x'}\cdot\frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial\cdot}{\partial t'}\cdot\frac{\partial t'}{\partial t} = \gamma\cdot\left(\frac{\partial\cdot}{\partial t'} - v\cdot\frac{\partial\cdot}{\partial x'}\right); \quad \frac{\partial\cdot}{\partial y} = \frac{\partial\cdot}{\partial y'}; \quad \frac{\partial\cdot}{\partial z} = \frac{\partial\cdot}{\partial z'}$$

, angewendet auf: $\mathrm{rot}\,\vec{E} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \partial E_z/\partial y - \partial E_y/\partial z \\ \partial E_x/\partial z - \partial E_z/\partial x \\ \partial E_y/\partial x - \partial E_x/\partial y \end{pmatrix} = -\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial z'} - \gamma\left(\frac{\partial E_z}{\partial x'} - \frac{v}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial t'}\right) = -\gamma\cdot\left(\frac{\partial B_y}{\partial t'} - v\frac{\partial B_y}{\partial x'}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial z'} - \frac{\partial}{\partial x'}\gamma\cdot\left(E_z + vB_y\right) = -\frac{\partial}{\partial t'}\gamma\cdot\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right)$$

Mit den neuen Größen $E_x = E_x'$, $\gamma\cdot(E_z + vB_y) = E_z'$, $\gamma\cdot(B_y + \frac{v}{c^2}E_z) = B_y'$ folgt:

$$\frac{\partial E_x'}{\partial z'} - \frac{\partial E_z'}{\partial x'} = -\frac{\partial B_y'}{\partial t'}$$

, analog die anderen beiden Gleichungen für B_x und B_z $\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{rot}'\vec{E}' = -\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'}$, wobei rot' mit x', y', z' auszuführen ist.

Also: $\vec{E}$-Komponente parallel zu $\vec{v}$ (hier: x-Richtung): keine Änderung: $\vec{E}_v' = \vec{E}_v$, $\vec{B}_v' = \vec{B}_v$

$\vec{E}$-Komponente senkrecht zu $\vec{v}$: ändert sich:

$\vec{E}_n' = \gamma\cdot(\vec{E}_n + \vec{v}\times\vec{B})$, $\vec{B}_n' = \gamma\cdot\left(\vec{B}_n - \frac{\vec{v}\times\vec{E}}{c^2}\right)$ mit $\vec{E}_n + \vec{E}_v = \vec{E}$, $\vec{B}_n + \vec{B}_v = \vec{B}$

$\vec{E}_n' + \vec{E}_v' = \vec{E}'$, $\vec{B}_n' + \vec{B}_v' = \vec{B}'$

In gleicher Weise zeigt man dies für die anderen drei MAXWELL-Gleichungen!

Zusammenfassung: $\nabla' = \left(\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial z'}\right)$ (Quelle: Cullwick: Electromagnetism & Relativity, Longmans, LONDON, 1957)

$$\left.\begin{aligned} \nabla' \times \vec{H}' &= \vec{S}' + \frac{\partial \vec{D}'}{\partial t'} \\ \nabla' \times \vec{E}' &= -\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'} \\ \nabla' \cdot \vec{D} &= \rho' \\ \nabla' \cdot \vec{B} &= \vec{0} \end{aligned}\right\} \text{ mit } \begin{aligned} \vec{E}' &= \vec{E}_v + \mu \cdot (\vec{E}_n + \vec{v} \times \vec{B}) \\ \vec{D}' &= \vec{D}_v + \mu \cdot \left(\vec{D}_n + \frac{\vec{v} \times \vec{H}}{c^2}\right) \\ \vec{H}' &= \vec{H}_v + \mu \cdot (\vec{H}_n - \vec{v} \times \vec{D}) \\ \vec{B}' &= \vec{B}_v + \mu \cdot \left(\vec{B}_n - \frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c^2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_v' + \mu \cdot (\vec{E}_n' - \vec{v} \times \vec{B}') \\ \vec{D} &= \vec{D}_v' + \mu \cdot \left(\vec{D}_n' - \frac{1}{c^2}(\vec{v} \times \vec{H}')\right) \\ \vec{H} &= \vec{H}_v' + \mu \cdot (\vec{H}_n' + \vec{v} \times \vec{D}') \\ \vec{B} &= \vec{B}_v' + \mu \cdot \left(\vec{B}_n' - \frac{1}{c^2}(\vec{v} \times \vec{E}')\right) \end{aligned}$$

In der Näherung für niedrige Geschwindigkeiten $v \ll c$: die Terme $\sim \frac{1}{c^2}$ sind vernachlässigbar!

$\Rightarrow \mu \approx 1$

$$\Rightarrow \vec{E}' \cong \vec{E}_v + \vec{E}_n + \vec{v} \times \vec{B} = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \vec{\mathcal{E}}$$

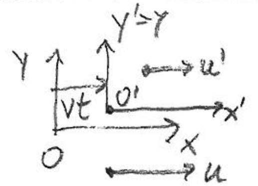
$$\vec{D}' \cong \vec{D}_v + \vec{D}_n + \vec{0} = \vec{D}$$

$$\vec{H}' \cong \vec{H}_v + \vec{H}_n - \vec{v} \times \vec{D} = \vec{H} - \vec{v} \times \vec{D} = \vec{\mathcal{H}}$$

$$\vec{B}' \cong \vec{B}_v + \vec{B}_n - \vec{0} = \vec{B}$$

FAZIT: Die Terme $\vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}}, \vec{D}, \vec{B}$ anstelle $\vec{E}', \vec{H}', \vec{D}', \vec{B}'$ sind die auftretenden Feldgrößen bei der Galilei-Transformation, die gültig ist, solange $v \ll c$!

Weitere Eigenschaften:



- Die elektrische Ladung q ist eine Invariante! $q = q'$!
- Die Masse ist nicht invariant: $m' = \gamma m = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$, m_0: bei $v=0$: Ruhmasse
- Geschwindigkeitsaddition: Galilei-Transformation: z.B.: in x-Richtung: u' im O'-System, $u = v + u'$ im O-System

  Lorentz-Transformation: $u = \frac{u'+v}{1+u'\cdot v/c^2} \le c$
- Die Kraft F ändert sich gemäß: $(v = v_x)$

  $\vec{F}' = (F_x', F_y', F_z') \Rightarrow F_x = F_x'$, $F_y = F_y'/\gamma = F_y'\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, $F_z = F_z'/\gamma$
- Elektromagnetische Kraft: sei $\vec{u}'$ die Geschwindigkeit der bewegten Ladung q in O', also $\vec{F}' = q\cdot(\vec{E}' + \vec{u}' \times \vec{B}')$. Dann ist wegen der Transformation von $\vec{u}' \to \vec{u}$, $\vec{B}' \to \vec{B}, \vec{E}$, $\vec{E}' \to \vec{E}, \vec{B}$ und $q' = q$ die Lorentz-Kraft $\vec{F} = q\cdot(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$. Die Kraftgleichung ist LORENTZ-invariant!

ACHTUNG: $\vec{u} \ne \vec{v}$! $u_x = \frac{u_x'+v}{1+v\cdot u_x'/c^2}$, $u_{y,z} = \frac{u_{y,z}'}{\gamma\cdot(1+v u_x'/c^2)}$ $\quad \vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$, $\vec{u}' = (u_x', u_y', u_z')$

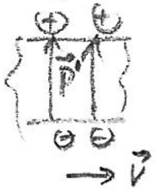
- Magnetisierung: $\vec{M}_n' = \gamma[\vec{M}_n - (\vec{P}\times\vec{v})]$, $\vec{M}_v' = \vec{M}_v$; $\vec{M}_n = \gamma[\vec{M}_n' + (\vec{P}'\times\vec{v})]$
- Polarisation: $\vec{P}_n' = \gamma\cdot[\vec{P}_n - \varepsilon_0(\vec{v}\times\mu_0\vec{M})]$, $\vec{P}_v' = \vec{P}_v$; $\vec{P}_n = \gamma[\vec{P}_n' + \varepsilon_0(\vec{v}\times\mu_0\vec{M}')]$

$\Rightarrow \vec{D}' = \varepsilon_r\varepsilon_0\vec{E}'$, $\vec{B}' = \mu_r\mu_0\vec{H}' \Rightarrow \vec{D} + \frac{\vec{v}\times\vec{H}}{c^2} = \varepsilon_r\varepsilon_0\cdot(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$

$$\vec{B} - \frac{\vec{v}\times\vec{E}}{c^2} = \mu_r\mu_0\cdot(\vec{H} - \vec{v}\times\vec{D})$$

Bewegte polarisierbare und magnetisierbare Materialien: bei $v \ll c$: $\gamma \approx 1$

$\vec{M}_n = \vec{P}' \times \vec{v} + \vec{M}_n'$, $\vec{M}_v = \vec{M}_v'$ $\qquad$ $\vec{P}_n = \vec{P}_n' + \varepsilon_0(\vec{v} \times \vec{M}'\mu_0)$, $\vec{P}_v = \vec{P}_v'$



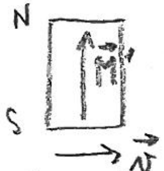
⊕⊕ $\rightarrow \vec{v} \triangleq I$

⊗ $\vec{M} = \vec{P}' \times \vec{v}$

⊖⊖ $\rightarrow \vec{v} = -I$

Nur ein $\vec{P}' \perp \vec{v}$ bewirkt ein $\vec{M}$ und damit $\vec{B} = \mu_0 \vec{M}$

(RÖNTGEN)

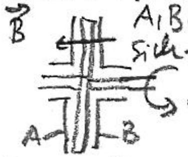


N

$\vec{M}' \rightarrow \vec{v}$ ⊙ $\vec{P}$ tritt auf!

S

Versuch von WILSON (1904):



$\left.\begin{array}{l}\vec{B}' = \mu_0 \vec{H}' + \mu_0 \vec{M}' = \\ = \mu_0 \vec{M}' \; (\vec{H}' = 0)\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{E} = \gamma(-\vec{v} \times \vec{B}') \approx -(\vec{v} \times \vec{B}') = -(\vec{v} \times \mu_0 \vec{M}') \Rightarrow$

$\vec{D} = 0 = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \vec{P} = -\varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon_0 \mu_0 (\vec{v} \times \vec{M}')$

$\vec{E}' = 0 = \vec{E}_v' + \vec{E}_n'$

$\vec{P}' = 0 \longrightarrow \vec{P} = \varepsilon_0 \mu_0 (\vec{v} \times \vec{M}') = \frac{1}{c^2}(\vec{v} \times \vec{M}')$

FAZIT: Selbst bei nichtrelativistisch kleinen Geschwindigkeiten $v \ll c$ führt eine bewegte polarisierte Materie zu einem $\vec{M}$ und damit $\vec{B}$ und eine bewegte magnetisierte Materie zu einem $\vec{P}$ und damit $\vec{E}$!

RÖNTGEN: $\vec{M} = \vec{P}' \times \vec{v}$ $\qquad$ WILSON: $\vec{P} = \frac{1}{c^2} \cdot (\vec{v} \times \vec{M}')$

ABER: Der WILSON-Effekt ist um den Faktor $1/c^2$ kleiner und wird daher i.A. vernachlässigt: $\vec{P} \approx \vec{P}'$ $\quad \vec{M} \approx \vec{M}' + \vec{P}' \times \vec{v}$

2.1.2. Normierung der Differentialgleichungen

Die allgemeinen Gleichungen des elektromagnetischen Feldes und des Strom-Ladungsfeldes bei Anwesenheit bewegter Körper sind für viele Anwendungen unnötig kompliziert. Um geeignete Näherungen zu finden ist es günstig, eine Normierung vorzunehmen.

L ... charakteristisches Längenintervall,
T ... charakteristisches Zeitintervall,
v_0 ... charakteristische materielle Geschwindigkeit,

des zu berechnenden Problems

$\varkappa, \varepsilon, \mu$ ... charakteristische Werte der el. Leitfähigkeit, der Dielektrizitätskonstanten, der Permeabilität,

$B_0, E_0, H_0, D_0, S_0, \rho_0$ ... charakt. Bezugswerte, die über

$$H_0 = B_0/\mu, \quad D_0 = \varepsilon E_0, \quad S_0 = \varkappa E_0, \quad \rho_0 = D_0/L = \varepsilon E_0/L \tag{15}$$

zusammenhängen. Mit

$$\left.\begin{aligned} &\vec{B} = \vec{b} B_0, \quad \vec{E} = \vec{e} E_0, \quad \vec{H} = \vec{h} B_0/\mu, \quad \vec{D} = \vec{d}\varepsilon E_0, \quad \vec{S} = \vec{s}\varkappa E_0, \quad \rho = \rho' \underbrace{\varepsilon E_0/L}_{\rho_0}, \\ &\vec{v} = \vec{\nu} v_0, \quad \vec{\nabla} = \frac{1}{L}\vec{\nabla}', \quad t = T\tau, \quad c^2 = 1/(\mu\varepsilon) \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d_c\vec{F}}{dt} = \frac{1}{T}\frac{d_c\vec{F}}{d\tau}, \quad \frac{d_c\vec{F}}{d\tau} = \frac{\partial\vec{F}}{\partial\tau} + \frac{v_0 T}{L}\left[\vec{\nu}\,\vec{\nabla}'\cdot\vec{F} + \vec{\nabla}'\times(\vec{F}\times\vec{\nu})\right], \\ &\frac{d_c\rho}{dt} = \frac{1}{T}\frac{d_c\rho}{d\tau}, \quad \frac{d_c\rho}{d\tau} = \frac{\partial\rho}{\partial\tau} + \frac{v_0 T}{L}\vec{\nabla}'\cdot(\rho\vec{\nu}) \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

lassen sich die Gleichungen (6) in der Form

$$\left.\begin{aligned}
&\vec{\nabla}' \times \left(\vec{e} + \frac{v_0 B_0}{E_0}\vec{v} \times \vec{b}\right) + \frac{L}{T}\frac{B_0}{E_0}\frac{d_c \vec{b}}{d\tau} = \vec{0}, \qquad \vec{\nabla}' \cdot \vec{b} = 0, \\
&\vec{\nabla}' \times \left(\vec{h} - \frac{v_0 E_0}{c^2 B_0}\vec{v} \times \vec{d}\right) - \frac{L}{T}\frac{E_0}{c^2 B_0}\frac{d_c \vec{d}}{d\tau} = \mu \varkappa L \frac{E_0}{B_0}\vec{s}, \quad \vec{\nabla}' \cdot \vec{d} = \varrho', \\
&\vec{\nabla}' \cdot \vec{s} + \frac{\varepsilon}{\varkappa T}\frac{d_c \varrho'}{d\tau} = 0
\end{aligned}\right\} \quad (18)$$

schreiben. Es ergibt sich nun ein Ansatzpunkt für die gewünschten Näherungen, wenn die aus den (positiven) Bezugsgrößen gebildeten Vorfaktoren extreme Werte annehmen.

2.1.3. Das elektrische Feldsystem

Gilt

$$\frac{L}{T}\frac{B_o}{E_o} \ll 1 \qquad \text{und} \qquad \frac{v_o B_o}{E_o} \ll 1, \tag{19}$$

so sprechen wir von einem elektrischen Feldsystem. Gl. $(18)_1$ vereinfacht sich zu $\vec{\nabla}' \times \vec{e} = \vec{0}$, d.h., das elektrische Feld ist wirbelfrei.

Mit

$$\left.\begin{array}{l} T_d = \mu \varkappa L^2 \text{ ... Diffusionszeitkonstante} \\ T_R = \varepsilon / \varkappa \text{ ... Relaxationszeitkonstante} \end{array}\right\} \tag{20}$$

(des Magn.felds (Vgl.: Kippenhahn/Plasmaphysik))

(→ PASCHKE/AE1)

gilt dann

$$\vec{\nabla}' \times \vec{e} = \vec{0}, \qquad \vec{\nabla}' \cdot \vec{d} = \varrho', \qquad \vec{\nabla}' \cdot \vec{s} + \frac{T_R}{T}\frac{d_c \varrho'}{d\tau} = 0 \tag{21}$$

und

$$\vec{\nabla}' \times \left(\vec{h} - \frac{v_o^2/c^2}{v_o B_o/E_o}\vec{v} \times \vec{d}\right) - \frac{L^2/(cT)^2}{L B_o/(T E_o)}\frac{d_c \vec{d}}{d\tau} = \frac{T_d/T}{L B_o/(T E_o)}\vec{s}. \tag{22}$$

Nach Beseitigung der Normierung haben wir die Gleichungen

$$\underline{\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{0}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \varrho, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{J}} + \frac{d_c \varrho}{dt} = 0}, \tag{23}$$

und

$$\vec{\nabla} \times \underbrace{(\vec{H} - \vec{v} \times \vec{D})}_{\vec{\mathcal{H}}} - \frac{d_c \vec{D}}{dt} = \vec{\mathcal{J}}, \tag{24}$$

denen die Sprungbedingungen an materiellen Flächen

$$\vec{n}\times[\![\vec{E}]\!]=\vec{0},\quad \vec{n}\cdot[\![\vec{D}]\!]=\sigma \quad \text{und} \quad \vec{n}\times[\![\vec{\mathcal{H}}]\!]=\vec{\alpha} \tag{25}$$

zugeordnet sind. Das System ist durch die Verknüpfungsbeziehung...

$$\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P} \tag{26}$$

und durch Materialgleichungen, z.B.

$$\vec{P}=\vec{P}(\vec{E}),\quad \vec{\mathcal{J}}=\vec{\mathcal{J}}(\vec{E}), \tag{27}$$

zu vervollständigen.

2.1.4. Das magnetische Feldsystem

Gilt dagegen

$$\frac{L}{cT}\frac{E_0}{cB_0}\ll 1,\quad \frac{V_0}{c}\frac{E_0}{cB_0}\ll 1,\quad \frac{T_R}{T}=\frac{\varepsilon}{\varkappa T}\ll 1, \tag{28}$$

so sprechen wir von einem magnetischen Feldsystem. In guter Näherung kann man dann den Gleichungssatz

$$\vec{\nabla}'\cdot\vec{b}=0,\quad \vec{\nabla}'\times\vec{h}=\frac{T_d E_0}{LB_0}\vec{s},\quad \vec{\nabla}'\cdot\vec{s}=0 \tag{29}$$

und

$$\vec{\nabla}'\times\left(\vec{e}+\frac{V_0^2/c^2}{V_0E_0/(c^2B_0)}\vec{v}\times\vec{b}\right)+\frac{L^2/(cT)^2}{LE_0/(c^2TB_0)}\frac{d_c\vec{b}}{d\tau}=\vec{0} \tag{30}$$

oder, in entnormierter Form,

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 , \quad \vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{\mathcal{J}} , \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{J}} = 0, \tag{31}$$

und

$$\vec{\nabla}\times\underbrace{(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})}_{\vec{\mathcal{E}}} + \frac{d_c\vec{B}}{dt} = \vec{0} \tag{32}$$

zusammen mit den Sprungbedingungen an materiellen Flächen

$$\vec{n}\cdot[\![\vec{B}]\!] = 0 , \quad \vec{n}\times[\![\vec{H}]\!] = \vec{\alpha} \quad \text{und} \quad \vec{n}\times[\![\vec{\mathcal{E}}]\!] = \vec{0} \tag{33}$$

verwenden. Weiters haben wir die Veknüpfungsbeziehung

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M} \qquad \text{Da } \vec{P} = 0 \Rightarrow \vec{\mathcal{M}} = \vec{M} \quad (\vec{v}\times\vec{P} = \vec{0}) \tag{34}$$

und einen Satz von Materialgleichungen, z.B.

$$\vec{\mathcal{J}} = \vec{\mathcal{J}}(\vec{\mathcal{E}}) , \quad \vec{M} = \vec{M}(\vec{B}) \tag{35}$$

2.1.5. Kräfte und Drehmomente

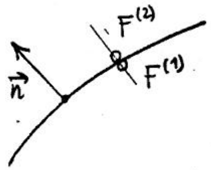
Eine befriedigende Untersuchung des Kraftangriffs in Körpern erfordert die Einbeziehung auch der mechanischen Eigenschaften. Wir verschieben diese Diskussion in den dritten Hauptabschnitt und beschränken uns hier bei der Formulierung der Kraftdichten auf nicht magnetisierbare und elektrisch nicht polarisierbare Körper. $\left\{ \begin{array}{l} \vec{M} = \vec{0} \\ \vec{P} = \vec{0} \end{array} \right.$ Die Ausdrücke für die resultierenden Kräfte und Drehmomente sind allerdings, im Rahmen der jeweils angezeigten Näherung, allgemein verwendbar.

Das elektromagnetische Feld bewirkt in einem geladenen und stromdurchflossenen Körper die Kraftdichte $\vec{f} = \vec{F}/V$!

$$\vec{f} = \rho\vec{E} + \vec{J}\times\vec{B} = \rho(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}) + (\vec{S} - \rho\vec{v})\times\vec{B} = \rho\vec{E} + \vec{S}\times\vec{B} + \underbrace{\rho\vec{v}\times\vec{B} - \rho\vec{v}\times\vec{B}}_{0}$$

$$\vec{f} = \rho\vec{\mathcal{E}} + \vec{J}\times\vec{B} = \rho\vec{E} + \vec{S}\times\vec{B} \qquad (36)$$

und an einer materiellen Fläche die Flächenkraftdichte ($\vec{f}^s = \vec{F}/A$)



$$\langle F\rangle = \tfrac{1}{2}(F^{(2)} + F^{(1)}), \qquad [\![F]\!] = F^{(2)} - F^{(1)}$$

$$\vec{f}^s = \sigma\langle\vec{\mathcal{E}}\rangle + \vec{\alpha}\times\langle\vec{B}\rangle. \qquad (37)$$

$$\vec{f}^s = \vec{f}\cdot L$$

Die Normierung (16) sowie

$$\sigma = \sigma'\varepsilon_0 E_0, \qquad \vec{\alpha} = \vec{\alpha}'\, B_0/\mu_0 \qquad (38)$$

führt dann zusammen mit (20) auf die Darstellungen

$$\vec{f} = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{L}\left\{\rho'\left[\vec{e} + \frac{v_0 B_0}{E_0}\vec{\nu}\times\vec{b}\right] + \frac{L}{T_R}\frac{B_0}{E_0}\vec{s}\times\vec{b}\right\}$$

$$\frac{L}{T_R}\frac{B_0}{E_0} = \frac{L B_0}{T E_0}\cdot \underbrace{\frac{T}{T_R}}_{\approx 1}$$

$$= \frac{B_0^2}{\mu_0 L}\left\{\rho'\left[\left(\frac{E_0}{c B_0}\right)^2\vec{e} + \frac{v_0}{c}\frac{E_0}{c B_0}\vec{\nu}\times\vec{b}\right] + \frac{T_d E_0}{L B_0}\vec{s}\times\vec{b}\right\},$$

(39)

$$\vec{f}^s = \varepsilon_0 E_0^2\left\{\sigma'\left\langle\vec{e} + \frac{v_0 B_0}{E_0}\vec{\nu}\times\vec{b}\right\rangle + \left(\frac{c B_0}{E_0}\right)^2\vec{\alpha}'\times\langle\vec{b}\rangle\right\}$$

$$= \frac{B_0^2}{\mu_0}\left\{\sigma'\left\langle\left(\frac{E_0}{c B_0}\right)^2\vec{e} + \frac{v_0}{c}\frac{E_0}{c B_0}\vec{\nu}\times\vec{b}\right\rangle + \vec{\alpha}'\times\langle\vec{b}\rangle\right\}.$$

Zum elektrischen Feldsystem gehören dann mit

$$\frac{L}{T}\frac{B_0}{E_0} \ll 1, \quad \frac{v_0 B_0}{E_0} \ll 1, \quad \frac{L}{T_R}\frac{B_0}{E_0} \ll 1; \; (T_R \gtrsim T), \quad \left(\frac{c B_0}{E_0}\right)^2 \ll 1 \qquad (40)$$

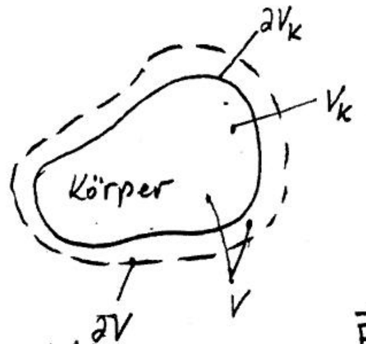
die Ausdrücke

$$\vec{f} = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{L}\rho'\vec{e}, \qquad \vec{f}^s = \varepsilon_0 E_0^2\,\sigma'\langle\vec{e}\rangle \qquad (41)$$

oder, entnormiert,

$$\vec{f} = \rho\vec{E}, \qquad \vec{f}^s = \sigma\langle\vec{E}\rangle \qquad (42)$$

Wir umgeben den betrachteten Körper mit einer geschlossenen Fläche ∂V, die ganz im leeren Raum (oder außerhalb des Feldbereichs) verläuft. Für die resultierende Kraft ergibt sich unter Verwendung von $(23)_{1,2}$ und $(25)_{1,2}$



$V_K \to V$ (Inneres in Volumen!)

$$\vec{F} = \int_{V_K} \vec{f}\, dV + \int_{\partial V_K} \vec{f}^s\, dA = \int_{\partial V} \varepsilon_0 \left(\vec{E}\,\vec{E}\cdot\vec{n} - \tfrac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{E}\,\vec{n} \right) dA \, , \qquad (43)$$

und für das resultierende Drehmoment bezüglich des Koordinatenursprungs

$$\vec{T} = \int_{V_K} \vec{x}\times\vec{f}\, dV + \int_{\partial V_K} \vec{x}\times\vec{f}^s\, dA = \int_{\partial V} \varepsilon_0\, \vec{x}\times\left(\vec{E}\,\vec{E}\cdot\vec{n} - \tfrac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{E}\,\vec{n} \right) dA \, . \qquad (44)$$

Die Ausdrücke (43) und (44) gelten, im Gegensatz zu (42), auch für elektrisch polarisierbare Körper, solange die Voraussetzungen des elektrischen Feldsystems zutreffen und die geschlossene Fläche ∂V im leeren Raum (oder außerhalb des Feldbereichs) liegt.

Für das <u>magnetische Feldsystem</u> folgt andererseits mit

$$\frac{L}{cT_d}\frac{E_0}{cB_0} \ll 1\,, \quad \frac{v_0}{c}\frac{L}{T_d} \ll 1\,; \quad \frac{v_0}{c}\frac{E_0}{cB_0} \ll 1\,, \quad \left(\frac{E_0}{cB_0}\right)^2 \ll 1 \tag{45}$$

die Kraftdichte und die Flächenkraftdichte

$$\vec{f} = \frac{B_0^2}{\mu_0 L}\frac{T_d E_0}{L B_0}\vec{s}\times\vec{b}\,, \qquad \vec{f}^s = \frac{B_0^2}{\mu_0}\vec{\alpha}'\times\langle\vec{b}\rangle\,, \tag{46}$$

d.h. $$\vec{f} = \vec{J}\times\vec{B}\,, \qquad \vec{f}^s = \vec{\alpha}\times\langle\vec{B}\rangle\,. \qquad \vec{f} = \varkappa(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})\times\vec{B} \tag{47}$$

Die resultierende Kraft und das resultierende Drehmoment bezüglich des Ursprungs lassen sich unter Verwendung von $(31)_{1,2}$ und $(33)_{1,2}$ wiederum als Integrale über eine den Körper vollständig einschliessende und ganz im leeren Raum (oder außerhalb des Feldbereichs) verlaufende Fläche ∂V ausdrücken:

$$\vec{F} = \int_{V_K}\vec{f}\,dV + \int_{\partial V_K}\vec{f}^s\,dA = \int_{\partial V}\frac{1}{\mu_0}\left(\vec{B}\,\vec{B}\cdot\vec{n} - \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{B}\,\vec{n}\right)dA\,, \tag{48}$$

$$\vec{T} = \int_{V_K}\vec{x}\times\vec{f}\,dV + \int_{\partial V_K}\vec{x}\times\vec{f}^s\,dA = \int_{\partial V}\frac{1}{\mu_0}\vec{x}\times\left(\vec{B}\,\vec{B}\cdot\vec{n} - \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{B}\,\vec{n}\right)dA\,. \tag{49}$$

Wichtig: Die Flächenintegrale in (43), (44), (48) und (49) liefern nur dann ein sinnvolles Ergebnis, wenn sie tatsächlich über eine geschlossene Hülle erstreckt werden. Werte, die sich aus der Integration über Teilbereiche ergeben, sind i.a. nicht als entsprechende Anteile der Kraft oder des Drehmoments zu interpretieren. Die Integranden in (43) und (48) sind auch nicht als Flächenkräfte aufzufassen und etwa an der Oberfläche des Körpers zu lokalisieren.

(sie würden ja aus dem Volumen heraus berechnet!)

Volumenkraft: $\vec{F}_V = \int_{V_k} \vec{f}\cdot dV = \int_{V_k} \rho\vec{E}\cdot dV = \int_{V_k} [\nabla\cdot\vec{D}]\cdot\vec{E}\, dV = \int_{V_k} [\nabla\cdot\vec{E}]\cdot\vec{E}\,\varepsilon_0\, dV =$

$\nabla\cdot\vec{D} = \rho$, $= \int_{V_k} \{\vec{E}\cdot\varepsilon_0(\nabla\cdot\vec{E}) - \vec{0}_{\varepsilon_0}\}\, dV$

$\nabla\times\vec{E} = \vec{0}$, Körper nicht polarisierbar: $\vec{P} = 0$: $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}$

$\vec{E}\times(\underbrace{\nabla\times\vec{E}}_{\vec{0}}) = \vec{0} = \nabla\cdot(\vec{E}\cdot\vec{E}_c) - (\vec{E}\cdot\nabla)\vec{E} = \nabla(\vec{E}^2)\cdot\frac{1}{2} - (\vec{E}\cdot\nabla)\vec{E} = \vec{0}$

$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}\cdot(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}\cdot(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{A}\cdot\vec{C}) - (\vec{A}\cdot\vec{B})\cdot\vec{C}$; $\nabla(\vec{E}^2)\frac{1}{2} = \Big|_{\text{z.B.: 1-dim}} \frac{\partial}{\partial x}(E_x^2)\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\frac{\partial(E_x^2)}{\partial E_x}\cdot\frac{\partial E_x}{\partial x} =$

$= 2\frac{1}{2}E_x\frac{\partial E_x}{\partial x} = E_x\cdot\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(E_x\cdot E_{xc})$

$\vec{F}_V = \int_{V_k}\{\vec{E}\cdot\varepsilon_0(\nabla\cdot\vec{E}) - \frac{\varepsilon_0}{2}\nabla(\vec{E}^2) + (\vec{E}\cdot\nabla)\vec{E}\varepsilon_0\}\cdot dV \overset{*)}{=}$

$\vec{E}\cdot(\nabla\cdot\vec{E}) + (\vec{E}\cdot\nabla)\vec{E} = (\nabla\cdot\vec{E})\vec{E} \Leftrightarrow (\nabla\cdot\vec{E})\vec{E} = (\nabla\cdot\vec{E}_c)\vec{E} + (\nabla\cdot\vec{E})\vec{E}_c = (\vec{E}_c\cdot\nabla)\vec{E} + \vec{E}_c(\nabla\cdot\vec{E}) =$

$= (\vec{E}\cdot\nabla)\vec{E} + \vec{E}\cdot(\nabla\cdot\vec{E})$

$\overset{*)}{=} \int_{V_k}\{\varepsilon_0(\nabla\cdot\vec{E})\vec{E}\, dV - \int_{V_k}\frac{\varepsilon_0}{2}\nabla(\vec{E}^2)\cdot dV =$ Gauss'scher Satz:

$\int_V \mathrm{div}\vec{F}\, dV = \oint_{A=\partial V}\vec{F}\cdot d\vec{A} \Rightarrow \int_V dV\cdot\nabla\cdot\ldots = \oint_{\partial V} d\vec{A}\cdot\ldots$

$= \oint_{\partial V_k}\varepsilon_0(d\vec{A}\cdot\vec{E})\vec{E} - \oint_{\partial V_k}\frac{\varepsilon_0}{2}d\vec{A}\cdot\vec{E}^2 =$

mit $d\vec{A} = \vec{n}\cdot dA$ $\quad = \underline{\oint_{\partial V_k}[\varepsilon_0(\vec{E}\cdot\vec{n})\vec{E} - \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2\cdot\vec{n}]\cdot dA = \vec{F}_V}$

<u>Oberflächenkraft:</u> $\vec f_S = \sigma\cdot\frac{1}{2}(\vec E_1+\vec E_2)$, $\vec n\cdot[\![\vec D]\!]=\sigma$, $\vec D=\varepsilon_0\vec E$: $\sigma=\varepsilon_0\vec n\cdot[\vec E_2-\vec E_1]$

$$\vec f_S = \frac{1}{2}\varepsilon_0\,\vec n\cdot(\vec E_2-\vec E_1)\cdot(\vec E_1+\vec E_2) = \frac{\varepsilon_0}{2}\{\underbrace{\vec n(\vec E_2-\vec E_1)\cdot(\vec E_1+\vec E_2)}_{\vec C[\vec A\cdot\vec B]} -$$

$(\vec C\cdot\vec A)\vec B = \vec C(\vec A\cdot\vec B) - \vec A\times(\vec C\times\vec B)$, $[\vec C\cdot\vec A]\cdot\vec B$

$$-\underbrace{(\vec E_2-\vec E_1)\times(\vec n\times(\vec E_1+\vec E_2))}_{\vec A\times[\vec C\times\vec B]}\} \Rightarrow$$

$\vec n\times[\![\vec E]\!]=0 \to \vec n\times[\vec E_2-\vec E_1]=\vec 0$: $\vec n\times\vec E_2=\vec n\times\vec E_1$

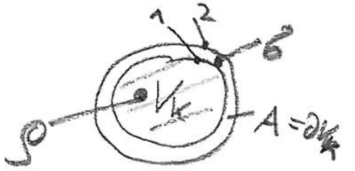
$$\Rightarrow \vec f_S = \frac{1}{2}\varepsilon_0\{\vec n(\cancel{\vec E_1\vec E_2}+\vec E_2^2-\vec E_1^2-\cancel{\vec E_1\vec E_2}) - \underbrace{\vec E_2\times\vec n\times\vec E_1}_{\vec E_2\times\vec n\times\vec E_2} - \vec E_2\times\vec n\times\vec E_2 + \vec E_1\times\vec n\times\vec E_1 + \underbrace{\vec E_1\times\vec n\times\vec E_2}_{\vec E_1\times\vec n\times\vec E_1}\} =$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0\{\vec n[(\vec E_2^2-\vec E_1^2) - 2(\vec E_2\times(\vec n\times\vec E_2) - \vec E_1\times(\vec n\times\vec E_1))]\} =$$

$\vec A\times(\vec B\times\vec A) = \vec B(\vec A\cdot\vec A) - \vec A(\vec A\cdot\vec B)$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0\{\vec n(\vec E_2^2-\vec E_1^2) - 2(\vec n(\vec E_2^2) - \vec E_2(\vec n\cdot\vec E_2) - \vec n(\vec E_1^2) + \vec E_1(\vec n\cdot\vec E_1))\}$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0\{-\vec n(\vec E_2^2-\vec E_1^2) + 2(\vec E_2(\vec n\cdot\vec E_2) - \vec E_1(\vec n\cdot\vec E_1))\}$$



$$\vec f_S = [\varepsilon_0(\vec E_2\cdot\vec n)\vec E_2 - \frac{\varepsilon_0}{2}\vec E_2^2\cdot\vec n] - [\varepsilon_0(\vec E_1\cdot\vec n)\vec E_1 - \frac{\varepsilon_0}{2}\vec E_1^2\cdot\vec n] \to \vec F_S = \oint_{\partial V_K}\vec f_S\,dA \;,\; \vec F = \vec F_V + \vec F_S =$$

$\vec E_2 = \vec E$ außerhalb V_K

$$= \int_{V_K}\vec f\,dV + \oint_{\partial V_K}\vec f_S\cdot dA = \cancel{\oint_{\partial V_K}\varepsilon_0[(\vec E_1\cdot\vec n)\vec E_1 - \frac{1}{2}\vec E_1^2\cdot\vec n]\,dA} + \oint_{\partial V_K}\{[\ldots\vec E_2\ldots] - \cancel{[\ldots\vec E_1\ldots]}\}\,dA = \underline{\underline{\oint_{\partial V_K}\varepsilon_0[(\vec E\cdot\vec n)\vec E - \frac{1}{2}\vec E^2\cdot\vec n]\,dA}}$$

Diese Kraft muss auch gelten, wenn das Volumen $V > V_K$ ist und dieses einschließt! Es ist dann an der Hüllfläche ∂V: $\vec E_1 = \vec E_2$ und daher kann direkt geschrieben werden:

$$\underline{\vec F = \oint_{\partial V}[\varepsilon_0(\vec E\cdot\vec n)\vec E - \frac{\varepsilon_0}{2}\vec E^2\cdot\vec n]\cdot dA} \qquad (43)$$

$(V_K \in V)$

Da dann auch eine $\vec P \neq 0$ eingeschlossen ist, gilt (43) dann auch, wobei $\vec E$ auch von $\vec P$ bestimmt wird.

Modellvorstellung:

Zu F_V und F_S im Volumen V_K und an der Oberfläche ∂V_K wird eine weitere äußere Hülle ∂V um ∂V_K gelegt. Wäre dort σ', gäbe es zusätzliche Kraft F_S' mit:

$\vec{F}_S' = \oint_{\partial V} \{[\ldots\vec{E}_3\ldots] - [\ldots\vec{E}_2\ldots]\}\,dA$, addiert zu $\vec{F} = \int_{\partial V_K} [\ldots\vec{E}_2\ldots]\,dA$, ergibt

$\partial V \approx \partial V_K$, ∂V_K innerhalb ∂V: $\vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_S' = \oint_{\partial V} [\ldots\vec{E}_3\ldots]\,dA$; nun lässt man $\sigma' \to 0$ gehen, $\vec{F}_S' \to 0$,

und $\vec{F}' = \vec{F} = \oint_{\partial V} [\ldots\vec{E}_3\ldots]\cdot dA$. So umhüllt auch ein größeres Volumen den Körper und erfasst über das Flächenintegral der MAXWELL'spannungen $\vec{\sigma} = \varepsilon_0 [(\vec{E}\cdot\vec{n})\vec{E} - \frac{1}{2}\vec{E}^2\cdot\vec{n}]$ an der Fläche ∂V, integriert über ∂V, richtig die gesamt Kraft $\vec{F}$ auf den Körper. Die lokalen Größen $\vec{\sigma}$ haben i.A. KEINE lokale Kraftbedeutung, außer in folgender Ausnahme: Polarisierbarer (magnetisierbarer) Körper mit $\varepsilon_r \to \infty$ ($\mu_r \to \infty$) und $\partial V = \partial V_K$: Dann greifen nämlich die Körperkräfte direkt an der Oberfläche an; allerdings dürfen dann im Körper keine freien Ladungen ($\Rightarrow \rho = 0$) bzw. keine el. Ströme ($\Rightarrow \vec{J} = \vec{0}$) auftreten. $\vec{F}$ ist dann reine Oberflächenkraft und $\vec{\sigma}$ direkt die lokale Flächenkraftdichte!

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Magnetische Volumenkraft:

$$\vec{F}_{V} = \int_{V_k} \vec{f} \cdot dV = \int_{V_k} (\vec{J} \times \vec{B}) \cdot dV = \int_{V_k} (\underbrace{\nabla \times \vec{H}}_{\vec{J}}) \times \vec{B}_c \cdot dV = -\int_{V_k} \vec{B} \times (\nabla \times \vec{B}) \cdot dV / \mu_0 =$$

nicht magnetisierbar: $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, $\vec{B} \times (\nabla \times \frac{\vec{B}}{\mu_0}) = \nabla (\vec{B}^2) \frac{1}{2} - (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B}$, wegen $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ auch

$$= -\int_{V_k} [\nabla \vec{B}^2 \tfrac{1}{2} - (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} - \vec{B} \cdot (\nabla \cdot \vec{B})] \frac{dV}{\mu_0} = \int_{V_k} [(\nabla \cdot \vec{B}) \vec{B} - \nabla \vec{B}^2 \tfrac{1}{2}] \frac{dV}{\mu_0} \underset{\uparrow}{=}$$

$$(\nabla \vec{B}) \vec{B} = (\nabla \cdot \vec{B}_c) \vec{B} + (\nabla \cdot \vec{B}) \vec{B}_c = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{B} (\nabla \cdot \vec{B})$$

Gauß'sche Integralregel

$$\int_V dV \cdot \nabla \cdot \ldots = \oint_{\partial V} d\vec{A} \cdot \ldots$$

$$= \oint_{\partial V_k} \frac{1}{\mu_0} [(d\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{B} - d\vec{A} \cdot \vec{B}^2 / 2] = \oint_{\partial V_k} \frac{1}{\mu_0} [(\vec{B} \cdot \vec{n}) \vec{B} - \vec{n} \cdot \frac{\vec{B}^2}{2}] dA$$

$$d\vec{A} = \vec{n} \cdot dA$$

Magnetische Oberflächenkraft: $\vec{f}_s = \vec{\alpha} \times \langle \vec{B} \rangle = \hat{\alpha} \times \frac{\vec{B}_1 + \vec{B}_2}{2}$ $\vec{\alpha}$: Flächenstromdichte $\left[\frac{A}{m}\right]$

$$\vec{\alpha} = \vec{n} \times [\vec{H}_2 - \vec{H}_1] = \vec{n} \times [\![\vec{H}]\!]$$

$$\vec{f}_s = \left(\vec{n} \times [\vec{B}_2 - \vec{B}_1]\frac{1}{\mu_0}\right) \times \frac{1}{2}(\vec{B}_1 + \vec{B}_2) = \frac{1}{2\mu_0}\left[(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot (\vec{n} \cdot (\vec{B}_1 + \vec{B}_2)) - \vec{n}[(\vec{B}_1 + \vec{B}_2) \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1)]\right] =$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{B} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{C}) \quad \vec{A} \cdot (\vec{C} \cdot \vec{B})$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{A}(\vec{C} \cdot \vec{B})$$

$$= \frac{1}{2\mu_0}\left[(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot (\underbrace{\vec{n} \cdot \vec{B}_1 + \vec{n} \cdot \vec{B}_2}_{2\vec{n} \cdot \vec{B}_1 = 2\vec{n} \cdot \vec{B}_2}) - \vec{n}\,(\vec{B}_2^2 - \vec{B}_1^2)\right] =$$

$$\vec{n} \cdot [\![\vec{B}]\!] = 0 = \vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{B}_2 = \vec{n} \cdot \vec{B}_1$$

$$= \frac{1}{\mu_0}\left[\vec{B}_2(\vec{n} \cdot \vec{B}_2) - \vec{B}_1(\vec{n} \cdot \vec{B}_1) - \vec{n}\,\frac{1}{2}(\vec{B}_2^2 - \vec{B}_1^2)\right]$$

$$\vec{F}_s = \oint_{\partial V_K} \vec{f}_s \, dA = \oint_{\partial V_K} \left\{\left[\frac{1}{\mu_0}(\vec{B}_2 \cdot \vec{n})\vec{B}_2 - \vec{n}\vec{B}_2^2 \frac{1}{2\mu_0}\right] - \left[\frac{1}{\mu_0}(\vec{B}_1 \cdot \vec{n})\vec{B}_1 - \vec{n}\vec{B}_1^2 \frac{1}{2\mu_0}\right]\right\} dA$$

$$\vec{F} = \vec{F}_s + \vec{F}_V = \oint_{\partial V_K} \{[\ldots \vec{B}_2 \ldots] - \cancel{[\ldots \vec{B}_1 \ldots]}\} dA + \oint_{\partial V_K} \cancel{[\ldots \vec{B}_1 \ldots]} dA = \underline{\underline{\oint_{\partial V_K} \frac{1}{\mu_0}\left[(\vec{B} \cdot \vec{n})\vec{B} - \vec{n}\,\vec{B}^2/2\right] dA}}$$