Inhalt der Vorlesung
Elektrothermische Prozesstechnik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

1. Einführung / Übersicht über Verfahren / Energiewirtschaftliche Bedeutung
2. Grundlagen der Wärmelehre und der numerischen Simulation

   Wärmleitung, Konvektion, Strahlung, Strömung, Finite Elemente Methode
3. Numerische Simulation von Temperaturfeldern / Analytischer Vergleich
4. Energieeffizienz elektrothermischer Verfahren / Konduktive Erwärmung
5. Maxwell-Gleichungen / Leistungsumsetzung
6. Induktionserwärmung 1 (Wirkungsgrad und Schmelzen)
7. Induktionserwärmung 2 (Schmieden und Querfeld)
8. Induktionserwärmung 3 (Härten und Schweißen)
9. Induktionserwärmung 4 (Simulation)
10. Dielektrische Erwärmung
11. Indirekte Erwärmung / Organisatorisches

Einführung

- Wärmeübertragung

Wärmeübertragung ist der Transport thermischer Energie als Folge einer Temperaturdifferenz.

- Thermisches Gleichgewicht

Zwei Systeme im thermischen Gleichgewicht haben dieselbe Temperatur.

→ **0. Hauptsatz der Thermodynamik**

- Wärme

Wärme ist die Energie, die allein aufgrund eines Temperaturunterschiedes zwischen den Systemen über eine wärmedurchlässige Wand übertragen wird.

Die als Wärme übertragene Energie ist gleich der Änderung der inneren Energie eines geschlossenen Systems, vermindert um die als Arbeit übertragene Energie.

→ **1. Hauptsatz der Thermodynamik (Energieerhaltung)**

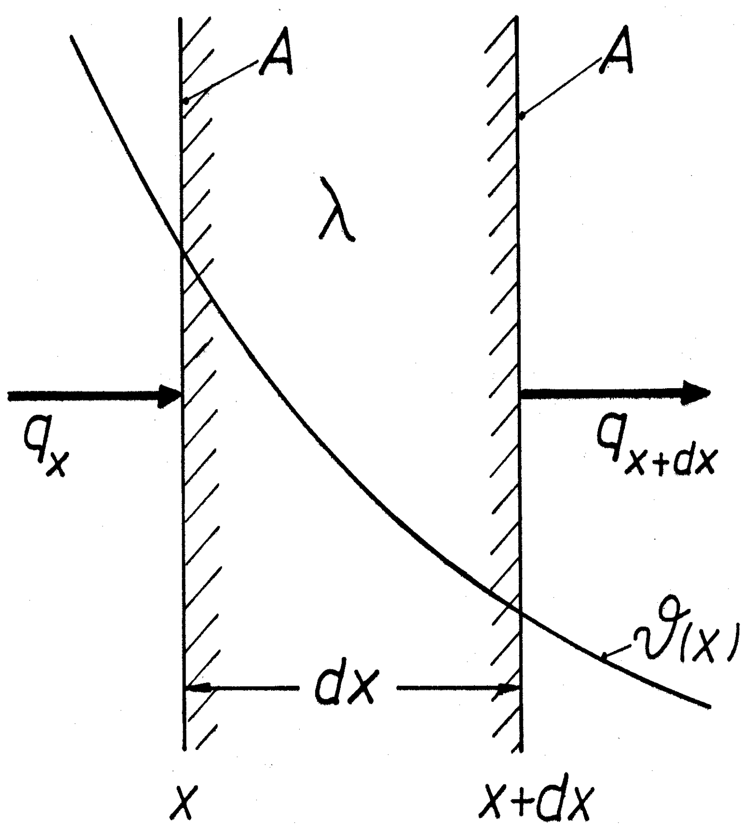
Wärmeübertragungsarten

1. Wärmeleitung
   - Stoffliche Energieträger notwendig
   - Gilt für alle Aggregatzustände
   - *Fourier*-Gesetz

2. Konvektion
   - Stoffliche Energieträger notwendig (makroskopisch)
   - Nur in Fluiden (Gase, Flüssigkeiten)
   - *Newton*-Gesetz

3. Wärmestrahlung
   - Keine stofflichen Energieträger notwendig
   - Austausch elektromagnetischer Strahlung
   - Gesetz von *Stefan* und *Boltzmann*

Wärmeleitung



- *Fourier*-Gesetz

$$\vec{q} = -\lambda \; grad \; \vartheta$$

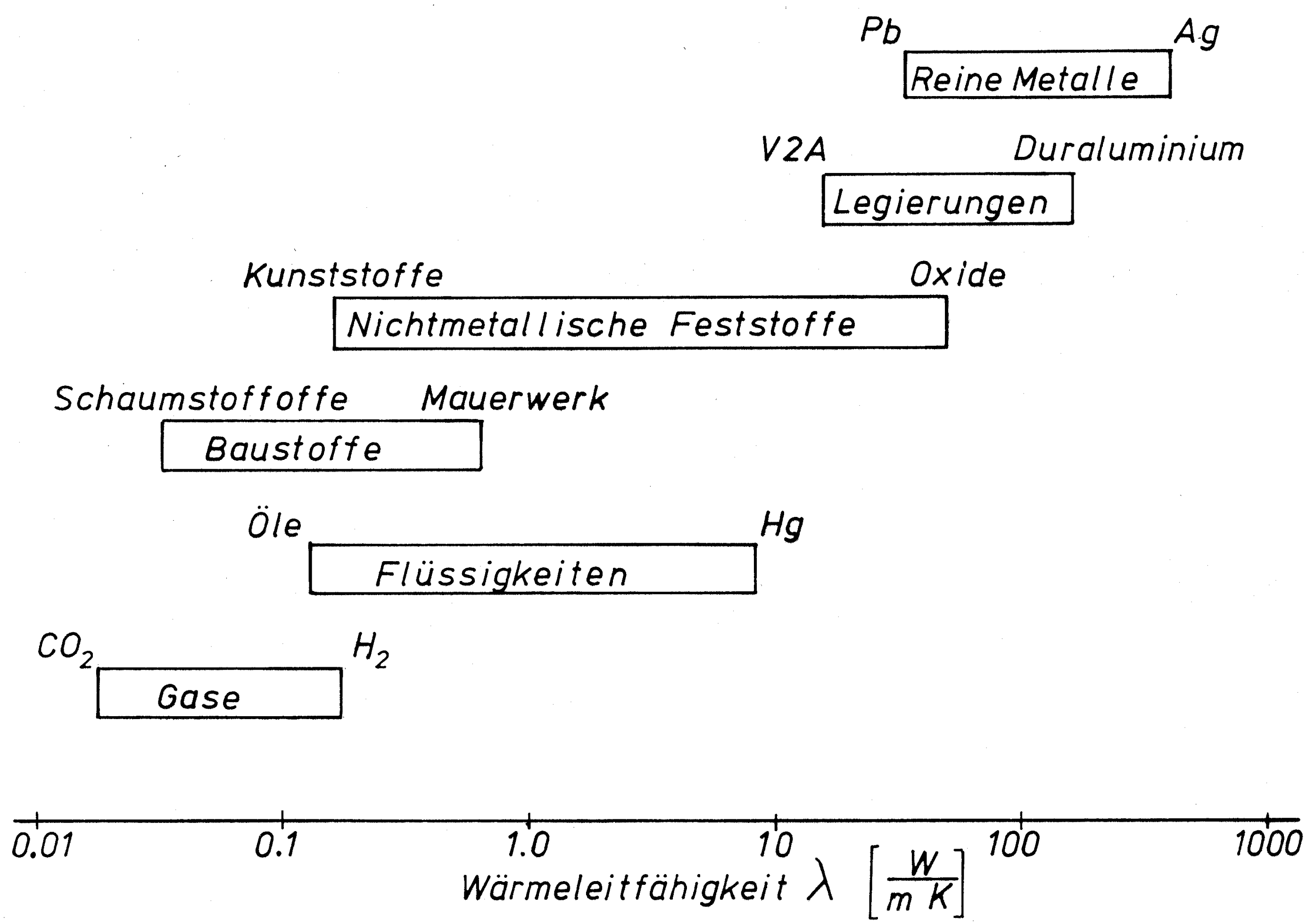
- stationäre eindimensionale Wärmeleitung

$$q_x = -\lambda \frac{d\vartheta}{dx}$$ Wärmestromdichte

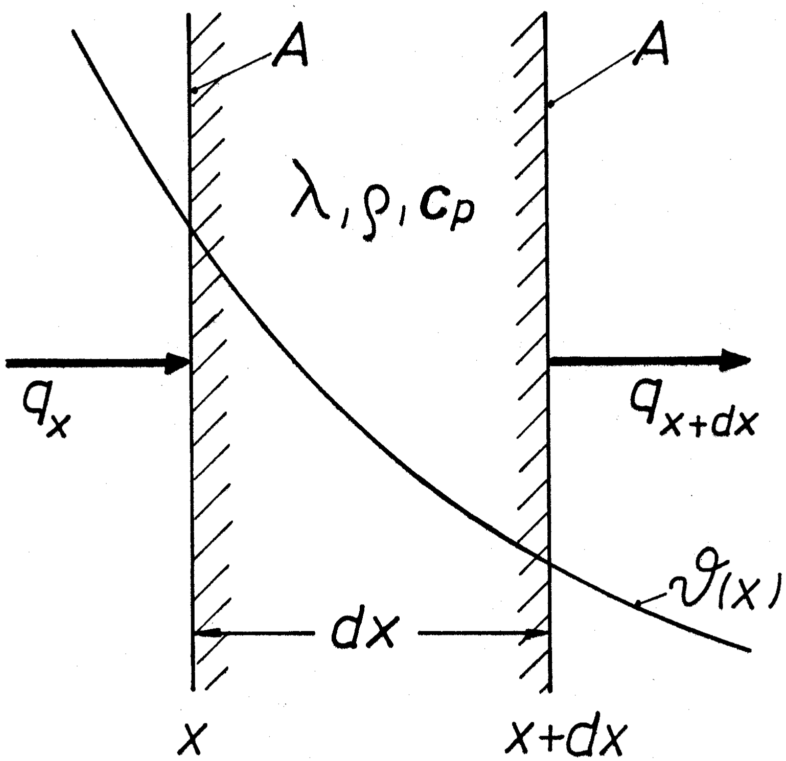
$$\Phi_x = -\lambda \cdot A \cdot \frac{d\vartheta}{dx}$$ Wärmestrom

$$R_W = \frac{\Delta x}{\lambda \cdot A}$$ Wärmewiderstand

Wärmeleitfähigkeiten verschiedener Stoffgruppen



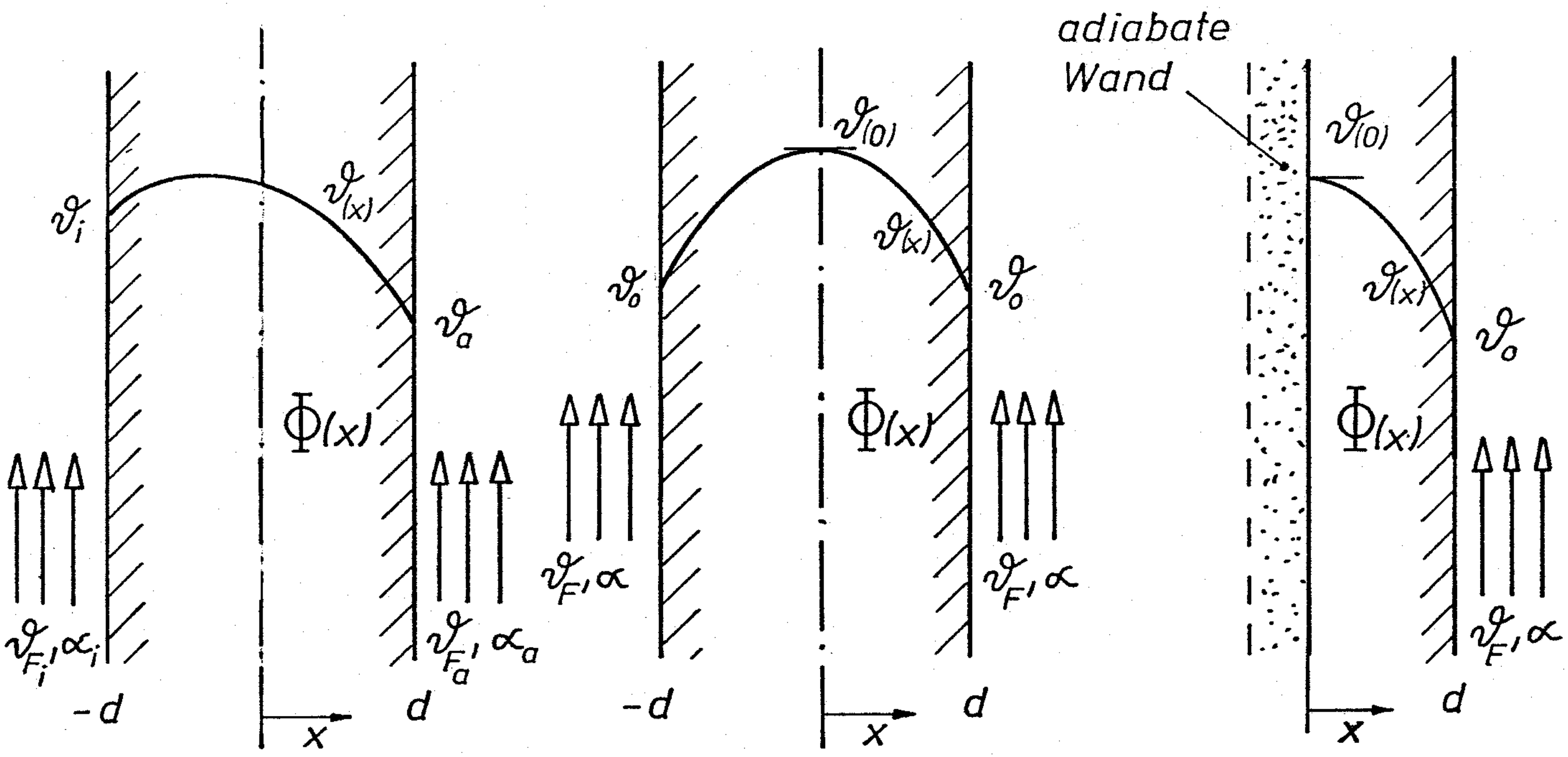
Wärmeleitungsgleichung



WLG für eindimensionalen Fall

$$\underbrace{c_p \cdot \rho \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial t}}_{\text{zeitliche Änderung der inneren Energie}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)}_{\text{Wärmeleitung}} + \underbrace{p}_{\text{Wärmequellen}}$$

Beispiel (homogen verteilte Wärmequellen)



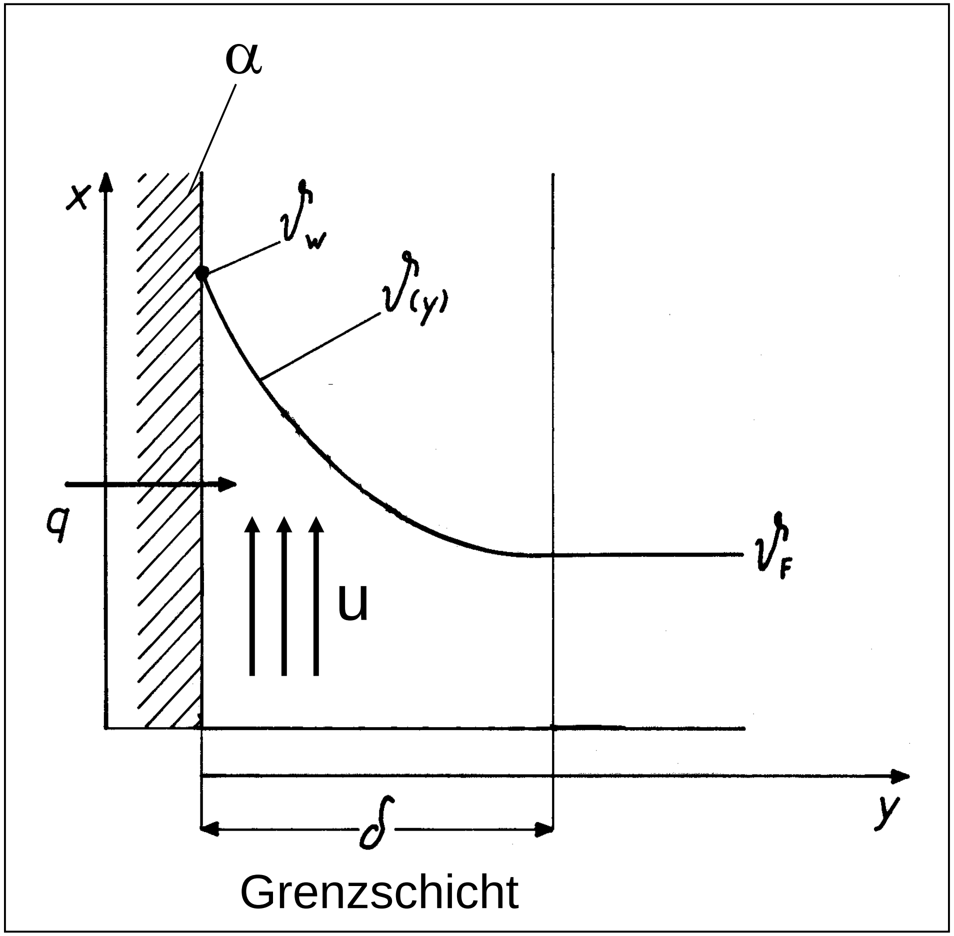
$\vartheta_i > \vartheta_a$

$\vartheta_i = \vartheta_a$

einseitig

adiabatisch isoliert

Konvektion



- *Newton*-Gesetz

$$q_K = \alpha \cdot (\vartheta_W - \vartheta_F)$$

- Wärmeübergangskoeffizient

$$\alpha = \alpha(c_p, \rho, \lambda, \eta; p, \vartheta, u; \mathrm{Form})$$

- Wärmestrom

$$\Phi_K = \alpha \cdot A \cdot (\vartheta_W - \vartheta_F)$$

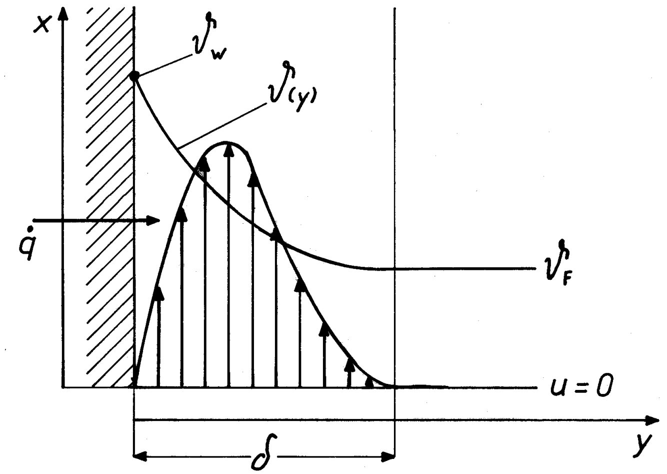
- Konv. Wärmewiderstand

$$R_{WK} = \frac{1}{\alpha \cdot A}$$

Konvektion

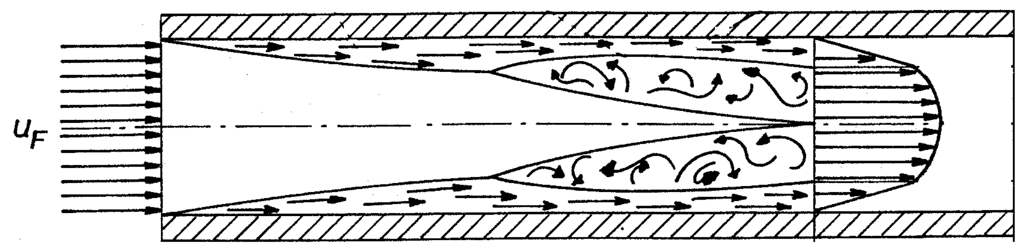
Freie Konvektion

- Teilchenbewegung durch innere Kräfte ➤ **thermischer Auftrieb!**
- *Beispiel:* senkrechte Wand



Erzwungene Konvektion

- Teilchenbewegung durch äußere Kräfte ➤ **Lüfter oder Pumpe!**
- *Beispiel:* Heizungsrohr



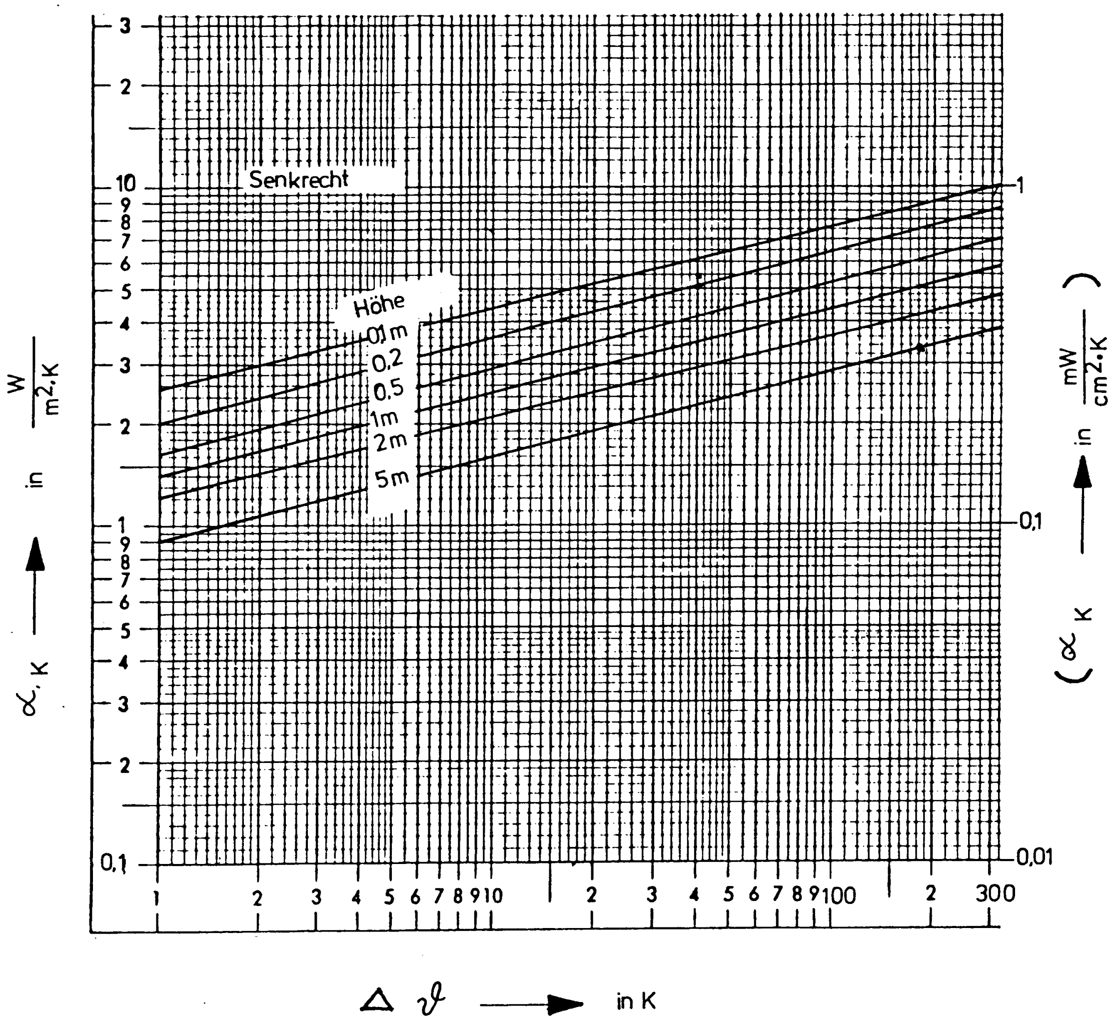
Wärmeübergangskoeffizient

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\alpha = \alpha\left(\underbrace{c_p, \rho, \lambda, \eta}_{\text{Stoffwerte}};\ \underbrace{p, \vartheta, u}_{\text{Zustandswerte}};\ \underbrace{\text{Form}}_{\text{Oberflächen-geometrie}}\right)$$

- Tabellen
- Diagramme, Kurven
- Kennzahlen

α mit Hilfe von Diagrammen



α_K = Wärmeübergangskoeffizient

durch freie Konvektion an ebenen senkrechten Flächen!

(Abhängigkeit von Gesamthöhe und Übertemperatur $\Delta\vartheta_i$;

Umgebungstemperatur 20 °C)

α mit Hilfe von Kennzahlen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Re ← laminare Strömung

turbulente Strömung

$$\mathrm{Re}_{krit} = 2300$$

erzwungene Konvektion

$$\mathrm{Nu} = f_{(\mathrm{Re},\mathrm{Pr})}$$

$$\alpha \Leftarrow \mathrm{Nu} = \frac{\alpha \cdot L}{\lambda}$$

Pr

freie Konvektion

$$\mathrm{Nu} = f_{(\mathrm{Gr},\mathrm{Pr})}$$

Gr

Definitionen der Kennzahlen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Nusselt

$$Nu = \frac{\alpha \cdot L}{\lambda} = \frac{\text{konvektiver Wärmeübergang}}{\text{Wärmeleitung}}$$

- Prandtl

$$Pr = \frac{\eta \cdot c_p}{\lambda} = \frac{\nu}{a} = \frac{\text{Ausbreitungsgeschwindigkeit der Abbremsung der Strömung}}{\text{Ausbreitungsgeschwindigkeit der Temperaturfront}}$$

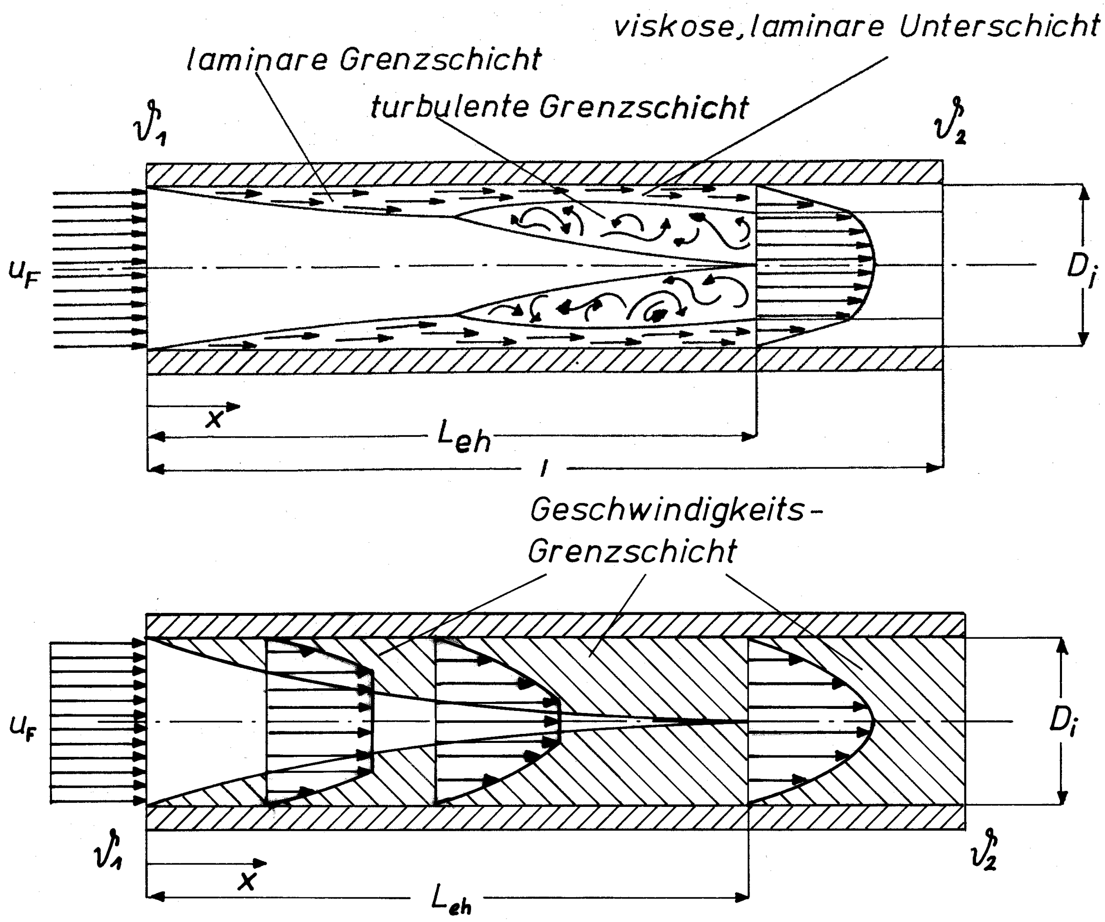
- Reynolds

$$Re = \frac{u_F \cdot L}{\nu} = \frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Zähigkeitskraft}}$$

- Grashof

$$Gr = \frac{g \cdot \beta \cdot L^3 \cdot (\vartheta_W - \vartheta_F)}{\nu^2} = \frac{\text{Auftriebskraft}}{\text{Zähigkeitskraft}}$$

Laminare und turbulente Rohrströmung



$$Re = \frac{u_F \cdot L}{\nu}$$

$$Pr = \frac{\nu}{a}$$

$$Nu = \frac{\alpha \cdot L}{\lambda}$$

Rechenbeispiel

Durch ein beheiztes Rohr der Länge L = 18 m strömt Wasser mit einem Massenstrom von $\dot{m} = 0{,}18\,\mathrm{kg/s}$ bei einem Druck von p = 1 bar. Das Rohr weist einen Innendurchmesser von $d_i = 2\,\mathrm{cm}$ auf. Die Eintrittstemperatur des Wassers beträgt $\vartheta_e = 55°C$, die Austrittstemperatur $\vartheta_a = 65°C$.

1. Freie oder erzwungene Konvektion? → Rohrströmung → $\boxed{\text{erzwungen!}}$

2. Laminare oder turbulente Strömung? → $Re = \frac{u_F \cdot d_i}{\nu} = \frac{\dot{m} \cdot d_i}{\rho \cdot \pi \cdot d_i^2 / 4 \cdot \nu} = 24537$

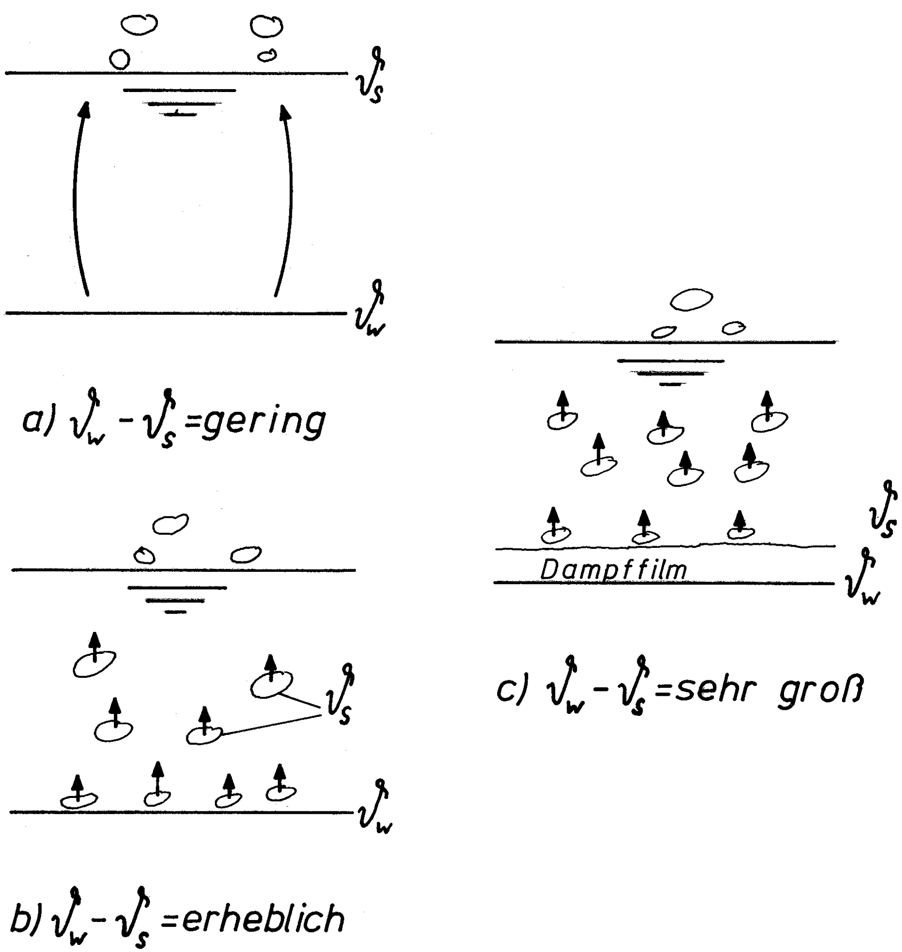
$$\boxed{Re > Re_{krit} = 2300 \;\Rightarrow\; \text{turbulente Strömung!}}$$

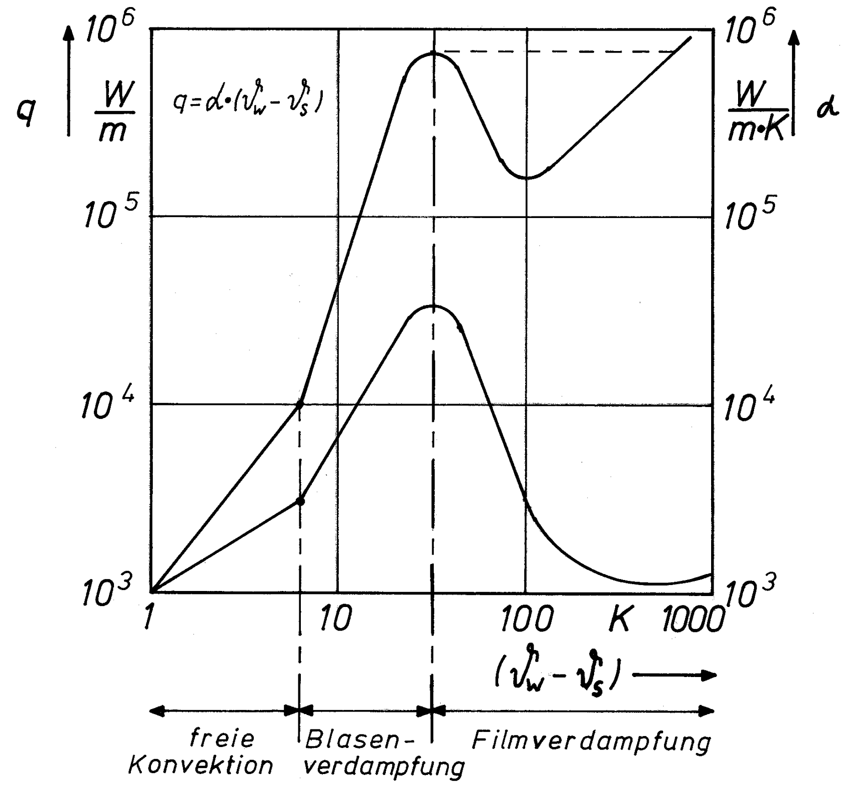
3. Wärmeübergangskoeffizient? → $\alpha = \frac{\lambda \cdot Nu}{d_i}$

$$Nu = 0{,}0235 \cdot \left(Re^{0,8} - 230\right) \cdot \left(1{,}8 \cdot Pr^{0,3} - 0{,}8\right) \cdot \left(1 + \left(\frac{d_i}{L}\right)^{\frac{2}{3}}\right) \cdot \left(\frac{\eta_F}{\eta_W}\right)^{0,14}$$

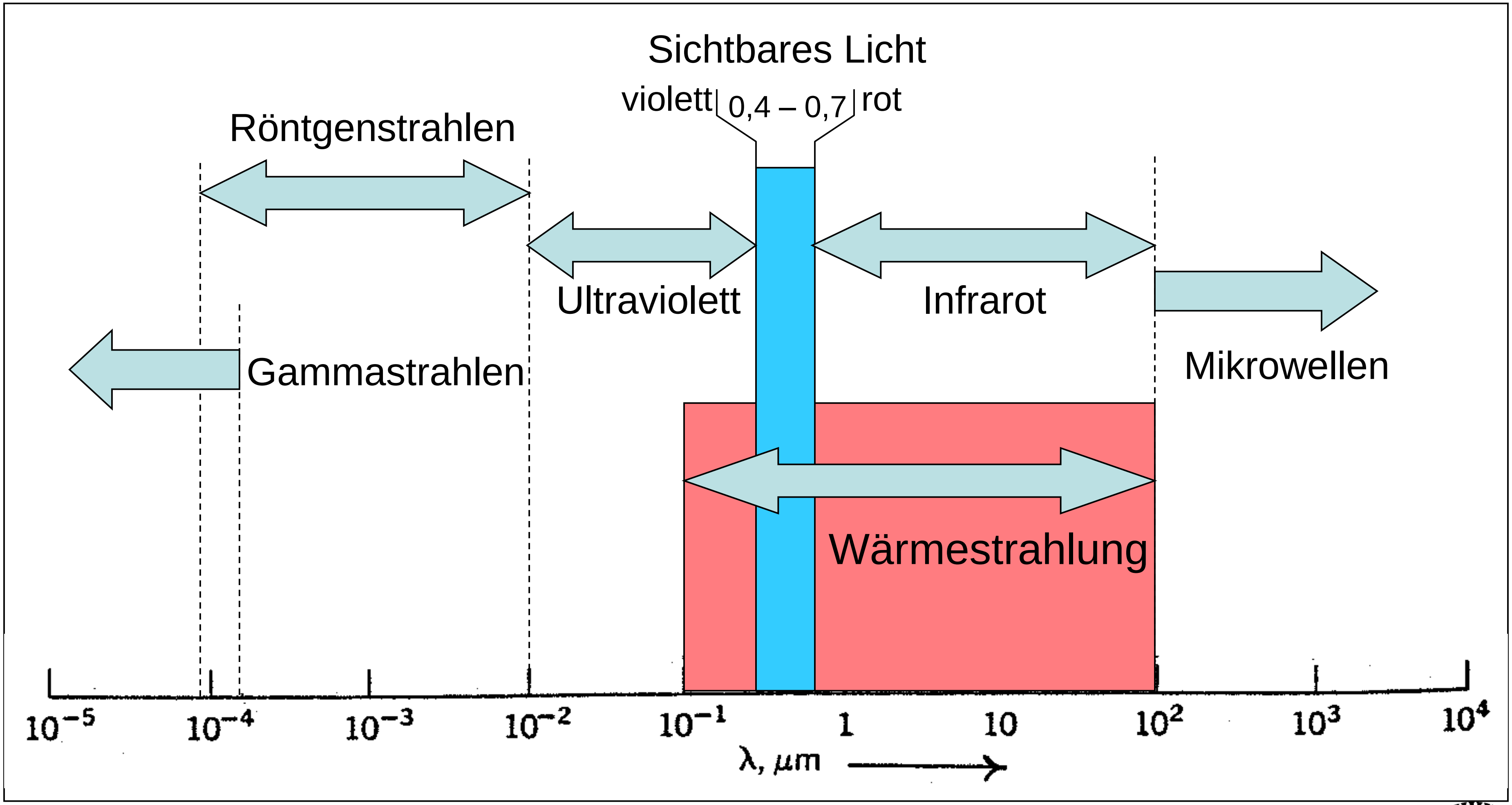
$$\boxed{\alpha = 3943{,}7 \,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2 \cdot K}}}$$

Wärmeübergang bei Verdampfung

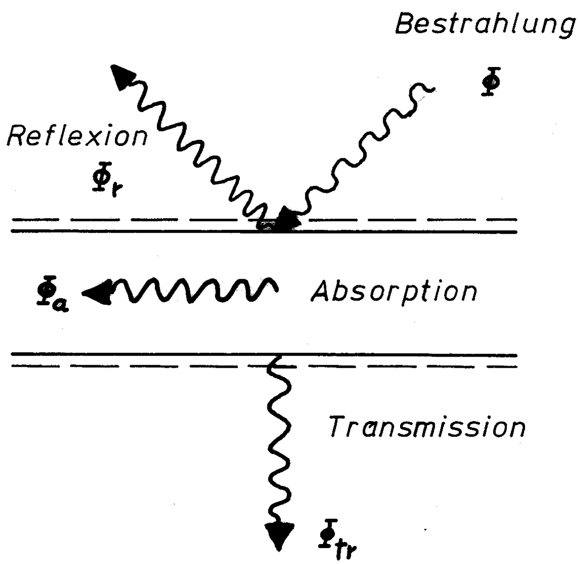




Wärmestrahlung



Absorption, Reflexion und Transmission



Strahlungsbilanz

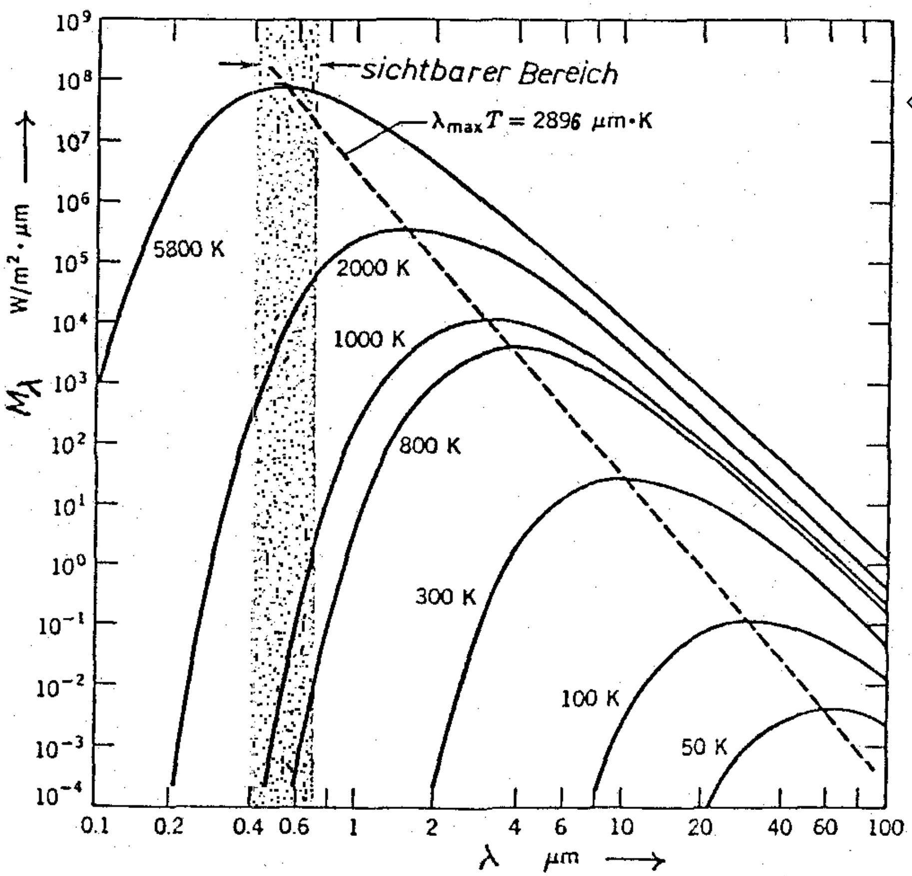
$$\Phi = \Phi_r + \Phi_a + \Phi_{tr}$$

- Reflexionsgrad $\rho = \dfrac{\Phi_r}{\Phi}$
- Absorptionsgrad $\alpha = \dfrac{\Phi_a}{\Phi}$
- Transmissionsgrad $\tau = \dfrac{\Phi_{tr}}{\Phi}$

$$1 = \rho + \alpha + \tau$$

Idealer schwarzer Körper:	$\alpha = 1;\ \rho = 0;\ \tau = 0$	, z. B. Schnee
Idealer weißer Körper:	$\alpha = 0;\ \rho = 1;\ \tau = 0$	, z. B. blanke Metalle
Diathermer Körper:	$\alpha = 0;\ \rho = 0;\ \tau = 1$	, z. B. Luft
Grauer Körper:	$\alpha < 1$	, z. B. reale Körper

Abstrahlung (Emission)



*Planck´*sche Verteilung für schwarze Körper

- *Wien´*sches Verschiebungsgesetz:

$$\lambda_{max} \cdot T = 2896\,\mu mK$$

- Spezifische Ausstrahlung des schwarzen Körpers:

  Stefan-Boltzmann-Gesetz!

$$M_S = q = \sigma \cdot T^4 = C_S \cdot \left(\frac{T}{100}\right)^4$$

mit $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot K^4}$ bzw. $C_S = 5{,}67 \cdot \frac{W}{m^2 \cdot K^4}$

(*Stefan-Boltzmann*-Konstante) (Strahlungskonstante des schwarzen Körpers)

Ausstrahlung des grauen Körpers

- Spezifische Ausstrahlung des grauen Strahlers:

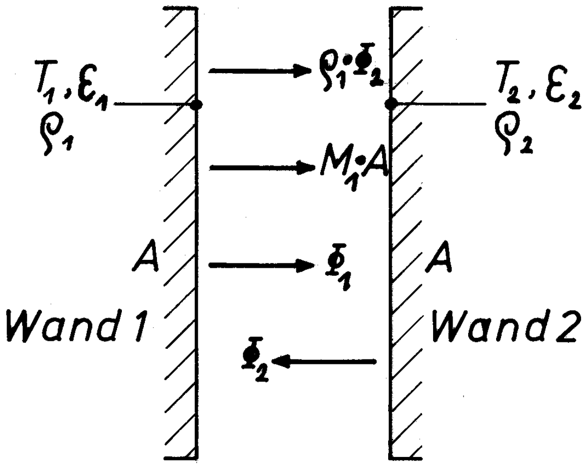
$$M = \varepsilon \cdot \sigma \cdot T^4 = \varepsilon \cdot C_S \cdot \left(\frac{T}{100}\right)^4$$

- *Kirchhoff´* sches Gesetz:

$$\varepsilon = \alpha$$

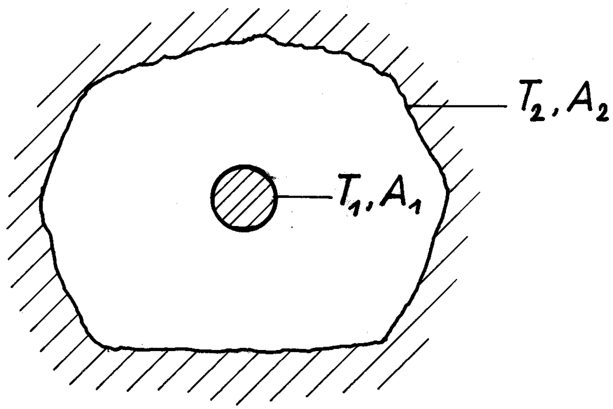
Kupfer, poliert	**20 °C**	**0,030**
Aluminium, blank	**20 °C (170 °C)**	**0,052 (0.099)**
Eisen, blank	**20 °C**	**0,240**
Kupfer, oxidiert	**20 °C**	**0,780**
Eisen, verrostet	**20 °C**	**0,850**
Schwarzer Lack, matt	**20 °C**	**0,970**
Holz, Buche	**20 °C**	**0,935**
Eis, glatt; Wasser	**20 °C**	**0,966**

Wärmeübertragung durch Strahlung



$$\Phi_{12} = A_1 \cdot C_{12} \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right]$$

mit $C_{12} = \dfrac{C_S}{\dfrac{1}{\varepsilon_1} + \dfrac{1}{\varepsilon_2} - 1}$ (Strahlungs-austauschkonstante)

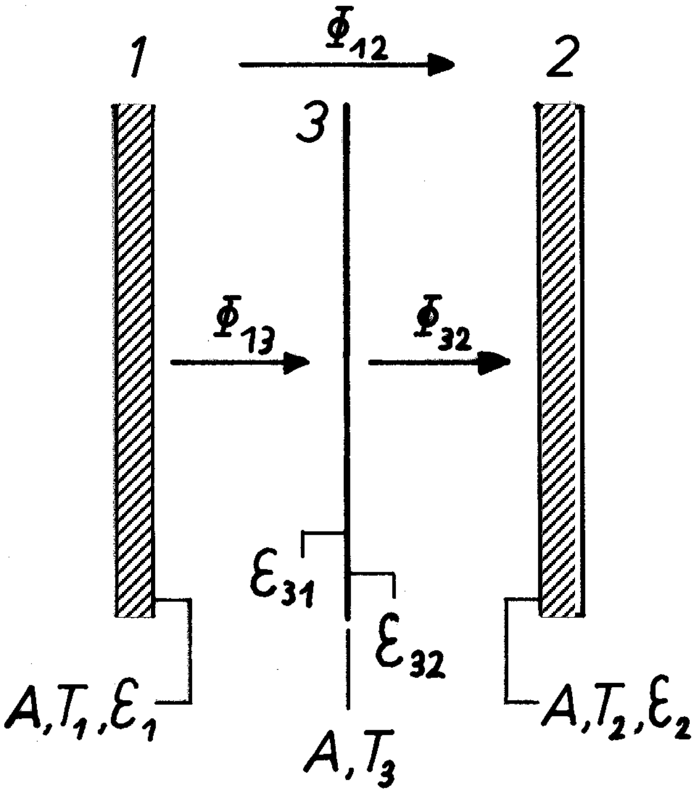


Grauer Strahler mit ihn vollständig umschließender Fläche:

$$\Phi_{12} = A_1 \cdot C_{12} \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right]$$

mit $C_{12} = \dfrac{C_S}{\dfrac{1}{\varepsilon_1} + \dfrac{A_1}{A_2} \cdot \left(\dfrac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)}$

Strahlungsschutzschirme



$$\Phi_{12} = A_1 \cdot C_{12} \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right]$$

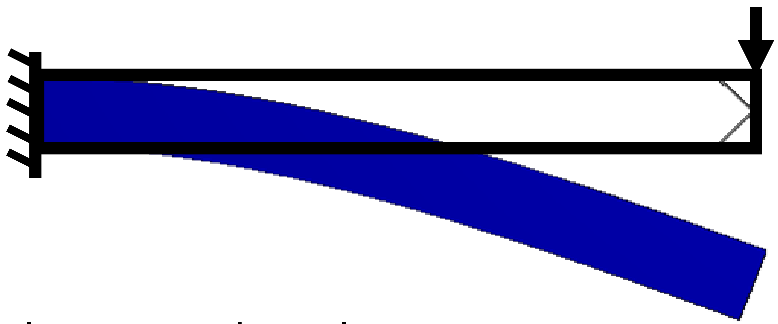
$$\text{mit } C_{12} = \frac{C_S}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{1-\varepsilon_{31}}{\varepsilon_{31}} + \frac{1-\varepsilon_{32}}{\varepsilon_{32}}}$$

Falls $\varepsilon \equiv \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{32}$:

- 1 Schirm: $\Phi_{12_1} = \frac{1}{2} \Phi_{12_0}$
- n Schirme: $\Phi_{12_n} = \frac{1}{n+1} \Phi_{12_0}$

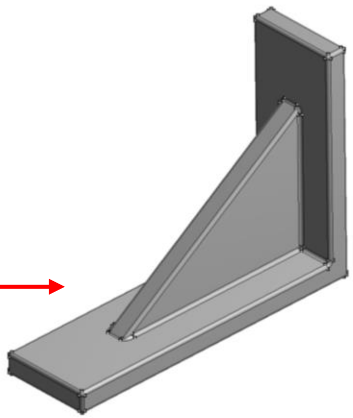
Grundlagen der numerischen Simulation

- Mechanische Verformungen, Dehnungen und Spannungen können für einfache Geometrien bereits mit einfachen Gleichungen beschrieben werden.
  - z.B. die Durchbiegung eines eingespannten Balkens:



$$\boxed{u = \frac{F\,l^3}{3EI}}$$

- Für die Berechnung von komplexeren Geometrien ist das nicht so einfach, da es dafür keine fertigen Gleichungen gibt!
- Hier wird die Finite Elemente Methode (FEM) verwendet um die gewünschten Größen zu berechnen.

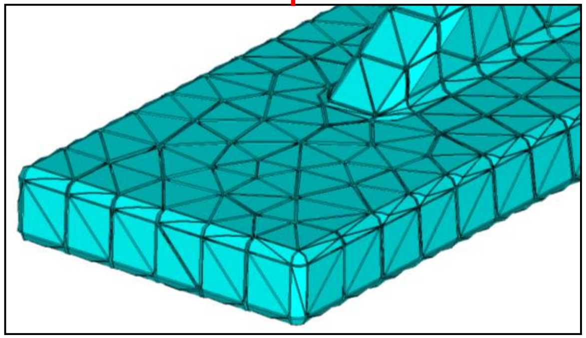


- Der Ansatz kann für Temperaturfelder, Elektromagnetik und Strömungsmechanik übernommen werden

Grundlagen der numerischen Simulation

- Die Geometrie wird in eine endliche (finite) Anzahl von mathematisch „einfach“ zu berechnenden Bereichen (Elementen) aufgeteilt: Vernetzung/Diskretisierung.

- Diese Elemente sind typischerweise:
  - Linien, Dreiecke, Vierecke, Hexaeder, Prismen, Pyramiden sowie Tetraeder.



- Die Elemente selbst beschreiben jeweils die Steifigkeit des Teilbereiches mit einfachen Gleichungen.

- Verbunden sind die einzelnen Elemente durch Verbindungspunkte: Knoten

- Die Software setzt die durch die Elemente beschriebenen Einzelsteifigkeiten zu einer Gesamtsteifigkeit $\underline{\underline{K}}$ der Struktur zusammen und löst das folgende Gleichungssystem: $\vec{F} = \underline{\underline{K}} \cdot \vec{u}$

F: Vektor der äußeren Kräfte
K: Gesamtsteifigkeitsmatrix
u: Vektor der Knotenverschiebungen

Grundlagen der numerischen Simulation

Randbedingungen allgemein:

Für jede simulierte Physik (Temperatur, Elektromagnetik, Mechanik, usw.) sind zwingend Randbedingungen nötig, um die Gleichungssysteme bestimmt zu lösen. Dagegen ist beispielsweise kein Setzen von Lasten (Wärmegeneration, Stromstärken, Kräfte, usw.) erforderlich. Falls keine Lasten implementiert sind, resultiert ein zulässiges Null-Ergebnis.

Randbedingungen im Elektromagnetischen:

- Grundsätzlich stehen hinter den Lösungsalgorithmen PDGL, die gelöst werden müssen (hier: Maxwell-Gleichungen). Um die Integrationskonstanten der gelösten Ansatzfunktionen letztlich bestimmen zu können, sind Randbedingungen nötig
- In der elektromagnetischen Analyse können Randbedingungen sein:
  - Spannung
  - Strom (Beachtung der Kirchhoffschen Knotensätze wichtig)
  - Magnetischer Fluss Parallel
  - Diverse Randbedingungen aus Symmetriegründen oder Gründen einer sich wiederholenden Struktur (Beispiel: E-Maschine)

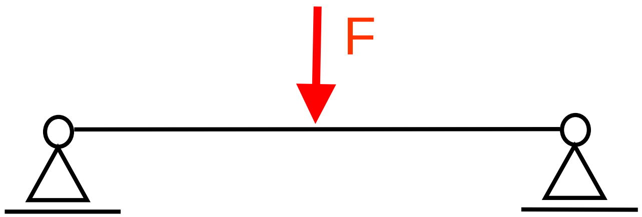
Randbedingungen im Thermischen:

- Auch hier werden PDGL gelöst (Wärmeleitungsgleichung). Zur Lösung werden thermische Randbedingungen benötigt.
- Im Thermischen sind diese nötig, um die Grundsätze der Thermodynamik zu erfüllen
- Beispielsweise kann ein Körper mit innerer Wärmequelle, aber ohne Randbedingungen, die eine Wärmeabfuhr nach außen ermöglichen, nicht für den stationären Fall berechnet werden (Temperatur geht gegen unendlich, vgl. 1. Hauptsatz der Energieerhaltung)
- In der thermischen Analyse können Randbedingungen sein:
  - Konvektion
  - Strahlung
  - Leitung an einen angrenzenden Körper
- Eine zeitliche abhängige („transiente“) Analyse hat die Wärmekapazität als Randbedingung und kann theoretisch ohne Randbedingungen berechnet werden

Grundlagen der numerischen Simulation

Randbedingungen im Mechanischen:

- Bauteile sollten immer statisch bestimmt gelagert werden → keine Starrkörperbewegung
- Eine statisch unbestimmte Lagerung lässt Starrkörperbewegungen zu, die zu singulären Steifigkeitsmatrizen führen und deshalb nicht berechenbar sind:



$$\underline{\underline{K}}\,\underline{u} = \underline{F} \qquad \underline{u} = \underline{\underline{K}}^{-1}\underline{F}$$

- Die Inverse der Steifigkeitsmatrix kann bei statisch unbestimmter Lagerung nicht bestimmt werden (Starrkörperbewegung). Damit ist die Aufgabe nicht lösbar.
- Auch wenn seitlich keine Belastung auftritt, muss diese Bewegung verhindert werden!